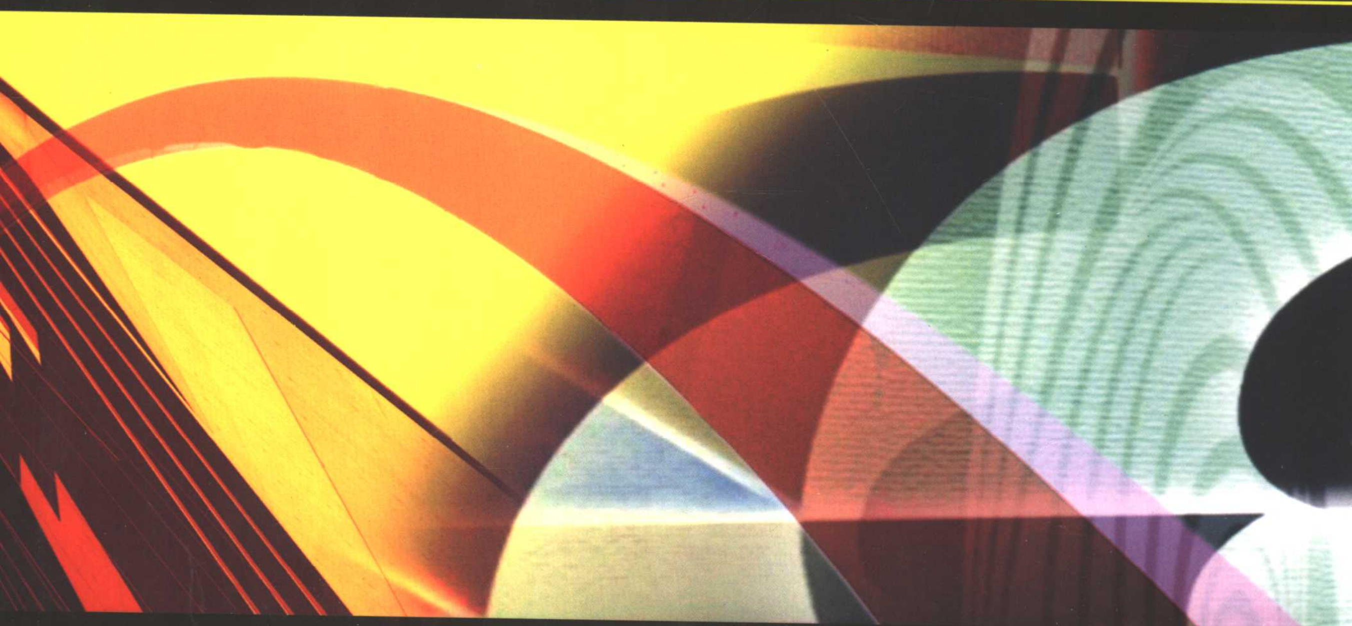
# 复合材料层合板壳理论探索

刘人怀 著

## Probe into the Theory of Laminated Composite Plates and Shells



暨南大学出版社
Jinan University Press

# 复合材料层合板壳理论探索

刘人怀　著

暨南大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

复合材料层合板壳理论探索/刘人怀著.
—广州：暨南大学出版社，2006.4
ISBN 7-81079-333-0

Ⅰ.复…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.复合材料-壳体-理论研究　Ⅳ.TH136

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第108557号

出版发行：暨南大学出版社

---

**地　址**：中国广州暨南大学
**电　话**：总编室（8620）85221601　85226581
　　　　营销部（8620）85227972　85220602（邮购）
**传　真**：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
**邮　码**：510630
**网　址**：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

---

**排　版**：广州市星辰文化发展部
**印　刷**：佛山市浩文彩色印刷有限公司

---

**开　本**：787mm×1092mm　1/16
**印　张**：20.5
**字　数**：392千
**版　次**：2006年4月第1版
**印　次**：2006年4月第1次

---

**定　价**：42.00元

---

**（暨大版图书如有印装质量问题，请与出版社总编室联系调换）**

# 序　言

随着工业技术在20世纪的飞跃发展，复合材料在近年来作为一种新材料被引入并开始在航空、航天、造船、能源、交通、建筑、机械、生物医学和体育等部门大量应用。它具有许多优异性能，如比强度高、比刚度大、抗疲劳性能好、减震性能好和材料性能可以设计等。因此，对复合材料本身，特别是做成工程中板壳构件后的研究，引起了国际理论界和工程界的高度重视。复合材料的发展水平，是一个国家科技水平和经济实力的反映。学者们预言，人类在经过石器时代、铜器时代和铁器时代后，21世纪将会成为复合材料时代。

在复合材料板壳力学领域中，无疑，非线性稳定性属前沿研究领域，是非常重要的问题。特别是，复合材料层合圆柱壳和复合材料层合扁球壳再次成为焦点。由于纤维正交铺层原因，学者们集中讨论较简单的复合材料层合圆柱壳的非线性问题，而对复合材料层合扁球壳的非线性问题一直未触及。著者于1988年9月在加拿大卡尔加里大学土木工程系做访问学者时，开始了这一问题的研究，并于1991年在《中国科学》第7期上发表了这一领域的第一篇学术论文。随后，著者进行了一系列复合材料层合板壳理论特别是非线性理论方面的研究工作，在国内外学术刊物上发表了20多篇学术论文，其中一些工作是与助手和学生合作完成的。为了便于读者应用，现将这些论文整理后汇编成书出版。书中所存在的缺点和错误，著者诚恳地希望读者指正。

刘人怀

2003年7月31日于暨南大学明湖苑

# 目　录

# 第一章
# 复合材料层合矩形板

# 1.1 计及高阶影响的复合材料层合矩形板非线性弯曲的简化理论*

## 一、引　言

近年来，复合材料层合结构的几何非线性问题已引起更多关注。在Kirchhoff假设下，一些研究人员已经研究了各向异性层合板的非线性力学特性，并得到包含一些典型问题分析在内的许多乐观的结果[1-7]。由于Kirchhoff假设忽略了横向剪切变形的影响，因此这些结果仅能适用于非常薄的板。

众所周知，对于纤维加固的复合材料层合板，面内弹性模量与横向剪切模量的比值相对说来较大，因此就须考虑横向剪切变形的影响。考虑到这个事实，就需要建立一个能够计及横向变形的理论。1966年，Habip[8]基于三维弹性理论，系统地提出了非均匀的各向异性板的一般理论。这个理论包含了横向剪切和法向应变、加速度以及温度场。随后，Wu和Vinson[9,10]研究了在Berger近似下层合各向异性板的非线性振动问题。Berger近似的限制是仅能用于带有面内不可移动边界条件的板。应用有限元法，Reddy[11-17]和Hinridisen[18]等人研究了层合板的非线性问题，如弯曲、自由振动和瞬变响应。此外，Sivakumaran和贾春元[19-21]基于Reissner-Mindlin型理论创立了一个精确理论，并应用迦辽金步骤和谐波平衡原理研究了层合矩形板的非线性振动问题。然而，Reissner-Mindlin型板理论不能满足在板的上、下表面横向剪切应力为零的条件，而且三维理论用于分析实际问题相当难于操作。因此，提出一个不仅精确而且也较简单的简化

* International Journal of Non-Linear Mechanics, 26(5), 537~545(1991), 原文英文。合作者：何陵辉

理论是十分必要的。

在本文中，应用虚位移原理，系统地提出了一个计及高阶影响的复合材料层合板的非线性弯曲问题的简化理论。通过引入由关于线性问题的 Reddy 理论[22]所得的位移场，本文理论说明了横向剪切应变在厚度上的抛物线变化的原因，以至于在计算剪切应力时就不需要应用剪切修正因子。再者，因为板的总挠度可分解为一个由弯曲而产生的挠度和一个由剪切而产生的挠度，所以本文理论控制方程的解将变得较简单。此外，在均匀横向载荷作用下对称正交层合板的非线性弯曲问题被作为一个特殊情况进行研究。本文所得到的结果与由三维理论[17]所得的结果相当一致。

## 二、控制方程和边界条件

考虑一个在 $z$ 方向等厚度为 $h$，在 $x$ 方向长度为 $a$，在 $y$ 方向宽度为 $b$ 的层合矩形板。参考面 $z = 0$ 被置放在未变形的中面上，而且假定板的两个邻边分别与 $x$ 轴和 $y$ 轴重合。这个板由有限个均匀正交各向异性层完全粘合在一起而构成。每一层有任意的厚度和弹性性质，而且正交各向异性轴的方向与板的轴相关。在横向载荷 $q(x,y)$ 作用下，假定板的位移场类似于文献[22]，则有

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - zw^b_{,x}(x,y) + z^2\xi_x(x,y) + z^3\zeta_x(x,y),$$
$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - zw^b_{,y}(x,y) + z^2\xi_y(x,y) + z^3\zeta_y(x,y),$$
$$w(x,y) = w^b(x,y) + w^s(x,y) \qquad (2.1\text{a-c})$$

其中 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$ 和 $w(x,y)$ 分别是一个点在 $x$、$y$ 和 $z$ 方向的位移分量，$u_0(x,y)$ 和 $v_0(x,y)$ 是 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 在中面上的值，$w^b$ 和 $w^s$ 分别是板由弯曲和剪切所产生的挠度，应用以下横向剪切应力 $\sigma_{zx}$ 和 $\sigma_{zy}$ 在板的上、下表面为零的条件

$$\sigma_{zx}(x,y,\pm h/2) = 0,\quad \sigma_{zy}(x,y,\pm h/2) = 0 \qquad (2.2\text{a,b})$$

可确定未知函数 $\xi_x(x,y)$、$\xi_y(x,y)$、$\zeta_x(x,y)$ 和 $\zeta_y(x,y)$。

对于正交各向异性板或者由正交各向异性面层所层合的板，条件(2.2a,b) 等效于相应的应变 $\varepsilon_{zx}(x,y,z)$ 和 $\varepsilon_{zy}(x,y,z)$ 在这些曲面上为零的条件

$$\varepsilon_{zx}(x,y,\pm h/2) = 0,\quad \varepsilon_{zy}(x,y,\pm h/2) = 0 \qquad (2.3\text{a,b})$$

由于

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zx} &= w^s_{,x} + 2z\xi_x + 3z^2\zeta_x,\\ \varepsilon_{zy} &= w^s_{,y} + 2z\xi_y + 3z^2\zeta_y,\end{aligned} \qquad (2.4\text{a,b})$$

于是便可由条件(2.3a,b)得到

$$\xi_x = \xi_y = 0, \quad \zeta_x = -\frac{4}{3h^2}w^s_{,x}, \quad \zeta_y = -\frac{4}{3h^2}w^s_{,y} \tag{2.5a-d}$$

这样一来，相应于式(2.1a-c)的冯·卡门意义上的应变分量可写为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 - zw^b_{,xx} - \frac{4z^3}{3h^2}w^s_{,xx}, \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 - zw^b_{,yy} - \frac{4z^3}{3h^2}w^s_{,yy}, \\
\varepsilon_z &= 0, \\
\varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 - 2zw^b_{,xy} - \frac{8z^3}{3h^2}w^s_{,xy}, \\
\varepsilon_{zx} &= \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)w^s_{,x}, \\
\varepsilon_{zy} &= \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)w^s_{,y}
\end{aligned} \tag{2.6a-f}$$

其中 $\varepsilon_x^0$、$\varepsilon_y^0$ 和 $\varepsilon_{xy}^0$ 是中面上的应变

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= u^0_{,x} + \frac{1}{2}w^2_{,x}, \\
\varepsilon_y^0 &= v^0_{,y} + \frac{1}{2}w^2_{,y}, \\
\varepsilon_{xy}^0 &= u^0_{,y} + v^0_{,x} + w_{,x}w_{,y}
\end{aligned} \tag{2.7a-c}$$

并且满足以下关系

$$\varepsilon^0_{x,yy} + \varepsilon^0_{y,xx} - \varepsilon^0_{xy,xy} = w^2_{,xy} - w_{,xx}w_{,yy} \tag{2.8}$$

现在，假定 $k$ 层的本构方程可表示为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \sigma_{zy}^{(k)} \\ \sigma_{zx}^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & 0 & 0 & C_{16}^{(k)} \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & 0 & 0 & C_{26}^{(k)} \\ 0 & 0 & C_{44}^{(k)} & C_{45}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{45}^{(k)} & C_{55}^{(k)} & 0 \\ C_{16}^{(k)} & C_{26}^{(k)} & 0 & 0 & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

其中 $C_{ij}^{(k)}$ 是该层的矩阵刚度系数，可由该层的工程常数转化而来(参见文献[23])。

定义内力和弯矩为

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)})\, dz, \\
(M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)})\, z\, dz, \\
(P_x, P_y, P_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)})\, z^3\, dz,
\end{aligned}$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{zx}^{(k)}, \sigma_{zy}^{(k)})\, dz,$$

$$(R_x, R_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{zx}^{(k)}, \sigma_{zy}^{(k)}) z^2 dz \tag{2.10a-e}$$

将式(2.9)代入式(2.10a-e)，可得如下公式

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^*] & [B^*] & [E^*] \\ [B^*]^T & [D^*] & [F^*] \\ [E^*]^T & [F^*]^T & [H^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{K^b\} \\ \{K^s\} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} - \dfrac{4}{h^2}D_{44} & A_{45} - \dfrac{4}{h^2}D_{45} \\ A_{45} - \dfrac{4}{h^2}D_{45} & A_{55} - \dfrac{4}{h^2}D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^s_{,y} \\ w^s_{,x} \end{Bmatrix}, \tag{2.11a-c}$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} - \dfrac{4}{h^2}F_{44} & D_{45} - \dfrac{4}{h^2}F_{45} \\ D_{45} - \dfrac{4}{h^2}F_{45} & D_{55} - \dfrac{4}{h^2}F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^s_{,y} \\ w^s_{,x} \end{Bmatrix}$$

其中

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix}, \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{K^b\} = \begin{Bmatrix} w^b_{,xx} \\ w^b_{,yy} \\ 2w^b_{,xy} \end{Bmatrix}, \quad \{K^s\} = \frac{4}{3h^2}\begin{Bmatrix} w^s_{,xx} \\ w^s_{,yy} \\ 2w^s_{,xy} \end{Bmatrix},$$

$$[A^*] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{61}^* & A_{62}^* & A_{66}^* \end{bmatrix}, \qquad [B^*] = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ B_{61}^* & B_{62}^* & B_{66}^* \end{bmatrix},$$

$$[D^*] = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{21}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{61}^* & D_{62}^* & D_{66}^* \end{bmatrix}, \qquad [E^*] = \begin{bmatrix} E_{11}^* & E_{12}^* & E_{16}^* \\ E_{21}^* & E_{22}^* & E_{26}^* \\ E_{61}^* & E_{62}^* & E_{66}^* \end{bmatrix},$$

$$[F^*] = \begin{bmatrix} F_{11}^* & F_{12}^* & F_{16}^* \\ F_{21}^* & F_{22}^* & F_{26}^* \\ F_{61}^* & F_{62}^* & F_{66}^* \end{bmatrix}, \qquad [H^*] = \begin{bmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* & H_{16}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* & H_{26}^* \\ H_{61}^* & H_{62}^* & H_{66}^* \end{bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \qquad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix},$$

$$[D]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix},\qquad [E]=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix},$$

$$[F]=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix},\qquad [H]=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix},$$

$$[A^*]=[A]^{-1},\qquad [B^*]=[A]^{-1}[B],$$

$$[D^*]=[B][A]^{-1}[B]-[D],\qquad [E^*]=[A]^{-1}[E],$$

$$[F^*]=[B][A]^{-1}[E]-[F],\qquad [H^*]=[E][A]^{-1}[E]-[H],$$

$$(A_{ij},B_{ij},D_{ij},E_{ij},F_{ij},H_{ij})=\int_{-h/2}^{h/2}C_{ij}^{(k)}(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6)\,dz \tag{2.12}$$

将方程(2.1a-c)、(2.6a-f)和(2.10a-e)应用到虚位移原理中，并且对$u_0$、$v_0$和$w$变分，便得层合矩形板的平衡方程

$$N_{x,x}+N_{xy,y}=0,$$

$$N_{xy,x}+N_{y,y}=0,$$

$$M_{x,xx}+2M_{xy,xy}+M_{y,yy}+N_x w_{,xx}+2N_{xy}w_{,xy}+N_y w_{,yy}+q=0,$$

$$\frac{4}{3h}(P_{x,xx}+2P_{xy,xy}+P_{y,yy})+(N_x w_{,xx}+2N_{xy}w_{,xy}+N_y w_{,yy})$$

$$+(Q_{x,x}+Q_{y,y})-\frac{4}{h^2}(R_{x,x}+R_{y,y})+q=0 \tag{2.13a-d}$$

和形如下式的边界条件

在$x=0$或$a$时，

$$\begin{array}{ccc} N_x & 或 & u_0 \\ N_{xy} & 或 & v_0 \\ Q_{1x} & 或 & w^b \\ Q_{2x} & 或 & w^s \\ M_x & 或 & w^b_{,x} \\ P_x & 或 & w^s_{,x} \\ M_{xy} & 或 & w^b_{,y} \\ P_{xy} & 或 & w^s_{,y} \end{array} \tag{2.14a}$$

在$y=0$或$b$时，

$$\begin{array}{ccc} N_y & 或 & v_0 \\ N_{xy} & 或 & u_0 \\ Q_{1y} & 或 & w^b \\ Q_{2y} & 或 & w^s \end{array} \tag{2.14b}$$

$$M_y \quad 或 \quad w^b_{,y}$$
$$P_y \quad 或 \quad w^s_{,y}$$
$$M_{xy} \quad 或 \quad w^b_{,x}$$
$$P_{xy} \quad 或 \quad w^s_{,x}$$

其中

$$\begin{aligned}
Q_{1x} &= N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y},\\
Q_{1y} &= N_y \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x},\\
Q_{2x} &= N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{4}{3h^2}\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{4}{3h^2}\frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + Q_x - \frac{4}{h^2}R_x,\\
Q_{2y} &= N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{4}{3h^2}\frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{4}{3h^2}\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + Q_y - \frac{4}{h^2}R_y
\end{aligned} \tag{2.15a-d}$$

引入力函数 $\varphi(x,y)$ 如下

$$N_x = \varphi_{,yy} \quad N_y = \varphi_{,xx} \quad N_{xy} = -\varphi_{,xy} \tag{2.16a-c}$$

显然，在这种情况下，方程(2.13a,b)便自动满足。将式(2.11a-c)和(2.16a-c)代入式(2.8)和(2.13c,d)，则得本文所研究问题的关于 $w^b$、$w^s$ 和 $\varphi$ 的控制方程如下

$$\begin{aligned}
L_{11}(w^b) + L_{12}(w^s) + L_{13}(\varphi) &= \frac{1}{2}L(w,w),\\
L_{21}(w^b) + L_{22}(w^s) + L_{23}(\varphi) &= L(\varphi,w) - q,\\
L_{31}(w^b) + L_{32}(w^s) + L_{33}(\varphi) &= L(\varphi,w) - q
\end{aligned} \tag{2.17a-c}$$

其中

$$\begin{aligned}
L_{11}() = {} & B^*_{21}()_{,xxxx} + (2B^*_{26} - B^*_{61})()_{,xxxy}\\
& + (B^*_{11} + B^*_{22} - 2B^*_{66})()_{,xxyy}\\
& + (2B^*_{16} - B^*_{62})()_{,xyyy} + B^*_{12}()_{,yyyy},\\
L_{12}() = {} & \frac{4}{3h^2}[E^*_{21}()_{,xxxx} + (2E^*_{26} - E^*_{61})()_{,xxxy}\\
& + (E^*_{11} + E^*_{22} - 2E^*_{66})()_{,xxyy}\\
& + (2E^*_{16} - E^*_{62})()_{,xyyy} + E^*_{12}()_{,yyyy}],\\
L_{13}() = {} & A^*_{22}()_{,xxxx} - (A^*_{26} + A^*_{62})()_{,xxxy}\\
& + (A^*_{12} + A^*_{21} + A^*_{66})()_{,xxyy}\\
& - (A^*_{16} + A^*_{61})()_{,xyyy} + A^*_{11}()_{,yyyy},\\
L_{21}() = {} & D^*_{11}()_{,xxxx} + 2(D^*_{16} + D^*_{61})()_{,xxxy}\\
& + (D^*_{12} + D^*_{21} + 4D^*_{66})()_{,xxyy}
\end{aligned}$$

$$+2(D_{26}^{*}+D_{62}^{*})(\ )_{,xyyy}+D_{22}^{*}(\ )_{,yyyy},$$

$$L_{22}(\ )=\frac{4}{3h^{2}}[F_{11}^{*}(\ )_{,xxxx}+(2F_{16}^{*}+F_{61}^{*})(\ )_{,xxxy}$$
$$+(F_{12}^{*}+F_{21}^{*}+4F_{66}^{*})(\ )_{,xxyy}$$
$$+2(F_{26}^{*}+F_{62}^{*})(\ )_{,xyyy}+F_{22}^{*}(\ )_{,yyyy}],$$

$$L_{23}(\ )=L_{11}(\ ),$$

$$L_{31}(\ )=L_{22}(\ ),$$

$$L_{32}(\ )=\frac{16}{9h^{4}}[H_{11}^{*}(\ )_{,xxxx}+2(H_{16}^{*}+H_{61}^{*})(\ )_{,xxxy}$$
$$+(H_{12}^{*}+H_{21}^{*}+4H_{66}^{*})(\ )_{,xxyy}$$
$$+2(H_{26}^{*}+H_{62}^{*}(\ )_{,xyyy}+H_{22}^{*}(\ )_{,yyyy}]$$
$$+\left(A_{55}-\frac{8}{h^{2}}D_{55}+\frac{16}{h^{4}}+\frac{16}{h^{4}}F_{55}\right)(\ )_{,xx}$$
$$+\left(2A_{45}-\frac{16}{h^{2}}D_{45}+\frac{32}{h^{4}}F_{45}\right)(\ )_{,xy}$$
$$+\left(A_{44}-\frac{8}{h^{2}}D_{44}+\frac{16}{h^{4}}F_{44}\right)(\ )_{,yy},$$

$$L_{33}(\ )=L_{12}(\ ),$$

$$L(\varphi,w)=2\varphi_{,xy}w_{,xy}-\varphi_{,xx}w_{,yy}-\varphi_{,yy}w_{,xx} \tag{2.18}$$

在本文中，我们考虑如下的简支边界条件

$$在\ x=0,a\ 时,w^{b}=w^{s}=w_{,xx}^{b}=w_{,xx}^{s}=w_{,y}^{b}=w_{,y}^{s}=v_{0}=\varphi_{,yy}=0 \tag{2.19a}$$

$$在\ y=0,b\ 时,w^{b}=w^{s}=w_{,yy}^{b}=w_{,yy}^{s}=w_{,x}^{b}=w_{,x}^{s}=u_{0}=\varphi_{,xx}=0 \tag{2.19b}$$

## 三、对称层合矩形板的解

作为本文所提出理论的应用，我们考虑在简支边界条件(2.19a)和(2.19b)下的对称正交层合矩形板。在这种情况下，这板的几个材料刚度系数为零：

$$C_{16}^{(k)}=C_{26}^{(k)}=C_{45}^{(k)}=0 \tag{3.1}$$

而且，由式(2.12)还有

$$[B]=[E]=0,\qquad [D^{*}]=-[D],$$
$$[F^{*}]=-[F],\qquad [H^{*}]=-[H] \tag{3.2}$$

为了简化起见，引入以下无量纲量

$$\xi=\frac{x}{\alpha},\qquad \eta=\frac{y}{b},$$

$$
\begin{aligned}
&W^b = \frac{w^b}{h}, && W^s = \frac{w^s}{h},\\
&\Phi = \frac{\varphi}{A_{22}h^2}, && Q = \frac{qa^4}{A_{22}h^3},\\
&\lambda = \frac{a}{b}, && a_1 = \frac{2A_{12}^* + A_{66}^*}{A_{22}^*},\\
&a_2 = \frac{A_{11}^*}{A_{22}^*}, && a_3 = \frac{1}{2A_{22}^*A_{22}},\\
&b_1 = \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{11}}, && b_2 = \frac{D_{22}}{D_{11}},\\
&b_3 = \frac{4F_{11}}{3D_{11}h^2}, && b_4 = \frac{8(F_{12} + 2F_{66})}{3D_{11}h^2},\\
&b_5 = \frac{4F_{22}}{3D_{11}h^2}, && b_6 = \frac{A_{22}h^2}{D_{11}},\\
&c_1 = \frac{2(F_{12} + 2F_{66})}{F_{11}}, && c_2 = \frac{F_{22}}{F_{11}},\\
&c_3 = \frac{4H_{11}}{3F_{11}h^2} && c_4 = \frac{8(H_{12} + 2H_{66})}{3F_{11}h^2},\\
&c_5 = \frac{4H_{22}}{3F_{11}h^2}, && c_6 = \frac{3a^2}{4F_{11}}\left(A_{55}h^2 - 8D_{55} + \frac{16}{h^2}F_{55}\right),\\
&c_7 = \frac{3a^2}{4F_{11}}\left(A_{44}h^2 - 8D_{44} + \frac{16}{h^2}F_{44}\right), && c_8 = \frac{3A_{22}h^4}{4F_{11}},\\
&d_1 = A_{11}^*A_{22}, && d_2 = A_{22}^*A_{22},\\
&d_3 = A_{12}^*A_{22}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

于是，控制方程(2.17a-c)简化为

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{11}(\Phi) = a_3\lambda^2\mathscr{L}(W,W),\\
&\mathscr{L}_{21}(W^b) + \mathscr{L}_{22}(W^s) = -b_6\lambda^2\mathscr{L}(\Phi,W) + b_6Q,\\
&\mathscr{L}_{31}(W^b) + \mathscr{L}_{32}(W^s) = -c_8\lambda^2\mathscr{L}(\Phi,W) + c_8Q
\end{aligned}
\tag{3.4a-c}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{11}(\,) = (\,)_{,\xi\xi\xi\xi} + a_1\lambda^2(\,)_{,\xi\xi\eta\eta} + a_2\lambda^4(\,)_{,\eta\eta\eta\eta},\\
&\mathscr{L}_{21}(\,) = (\,)_{,\xi\xi\xi\xi} + b_1\lambda^2(\,)_{,\xi\xi\eta\eta} + b_2\lambda^4(\,)_{,\eta\eta\eta\eta},\\
&\mathscr{L}_{22}(\,) = b_3(\,)_{,\xi\xi\xi\xi} + b_4\lambda^2(\,)_{,\xi\xi\eta\eta} + b_5\lambda^4(\,)_{,\eta\eta\eta\eta},\\
&\mathscr{L}_{31}(\,) = (\,)_{,\xi\xi\xi\xi} + c_1\lambda^2(\,)_{,\xi\xi\eta\eta} + c_2\lambda^4(\,)_{,\eta\eta\eta\eta},\\
&\mathscr{L}_{32}(\,) = c_3(\,)_{,\xi\xi\xi\xi} + c_4\lambda^2(\,)_{,\xi\xi\eta\eta} + c_5\lambda^4(\,)_{,\eta\eta\eta\eta}, - c_6(\,)_{,\xi\xi} - c_7\lambda^2(\,)_{,\eta\eta},\\
&\mathscr{L}(\Phi,W) = 2\Phi_{,\xi\eta}W_{,\xi\eta} - \Phi_{,\xi\xi}W_{,\eta\eta} - \Phi_{,\eta\eta}W_{,\xi\xi}
\end{aligned}
\tag{3.5a-f}
$$

而且边界条件(2.17)和(2.21)成为

在 $\xi=0,1$ 时，

$$W^b=W^s=W^b_{,\xi\xi}=W^s_{,\xi\xi}=W^b_{,\eta}=W^s_{,\eta}=\Phi_{,\eta\eta}$$
$$=\int_0^1\left(d_3\lambda^2\Phi_{,\eta\eta}+d_2\Phi_{,\eta\eta}-\frac{1}{2}\lambda^2W^2_{,\eta}\right)d\eta=0 \tag{3.6a-f}$$

在 $\eta=0,1$ 时，

$$W^b=W^s=W^b_{,\eta\eta}=W^b_{,\eta\eta}=W^b_{,\xi}=W^s_{,\xi}=\Phi_{,\xi\xi}$$
$$=\int_0^1\left(d_1\lambda^2\Phi_{,\eta\eta}+d_3\Phi_{,\xi\xi}-\frac{1}{2}W^2_{,\xi}\right)d\xi=0 \tag{3.7a-f}$$

为了求解上述边值问题(3.4)～(3.7)，我们将 $W^b$、$W^s$ 和 $\Phi$ 表示成如下双重福里哀级数形式

$$W^b=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W^b_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta,$$
$$W^s=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W^s_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta,$$
$$\Phi=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta, \tag{3.8a-d}$$
$$Q=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Q_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta$$

其中

$$Q_{mn}=4\int_0^1\int_0^1 Q\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta d\xi d\eta \tag{3.9}$$

显然，式(3.8a-d)满足式(3.6)～(3.7)所给出的全部条件。将式(3.8)代入方程(3.4)，用 $\sin p(\pi\xi)$，$\sin q(\pi\eta)$ 乘这三个方程的两端，并在它们各自的区间内用逐项积分法进行积分，便得以下非线性代数方程

$$\Phi_{pq}=\frac{2a_3\lambda^2}{p^4+a_1\lambda^2p^2q^2+a_2\lambda^4q^4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}e^{pq}_{klrs}W_{kl}W_{rs},$$
$$(p^4+b_1\lambda^2p^2q^2+b_2\lambda^4q^4)W^b_{pq}+(b_3p^4+b_4\lambda^2p^2q^2+b_5\lambda^4q^4)W^s_{pq}$$
$$=-2b_6\lambda^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}e^{pq}_{klrs}\Phi_{kl}W_{rs}+\frac{b_6}{\pi^4}Q_{pq}, \tag{3.10a-c}$$
$$(p^4+c_1\lambda^2p^2q^2+c_2\lambda^4q^4)W^b_{pq}$$
$$+\left(c_3p^4+c_4\lambda^2p^2q^2+c_5\lambda^4q^4+\frac{c_6p^2}{\pi^2}+\frac{\lambda^2c_7q^2}{\pi^2}\right)W^s_{pq}$$
$$=-2c_8\lambda^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}e^{pq}_{klrs}\Phi_{kl}W_{rs}+\frac{c_8}{\pi^4}Q_{pq}$$

其中

$$e^{pq}_{klrs}=klrs\int_0^1[\cos(k+r)\pi\xi+\cos(k-r)\pi\xi]\sin p\pi\xi d\xi\cdot\int_0^1[\cos(1+s)\pi\eta$$