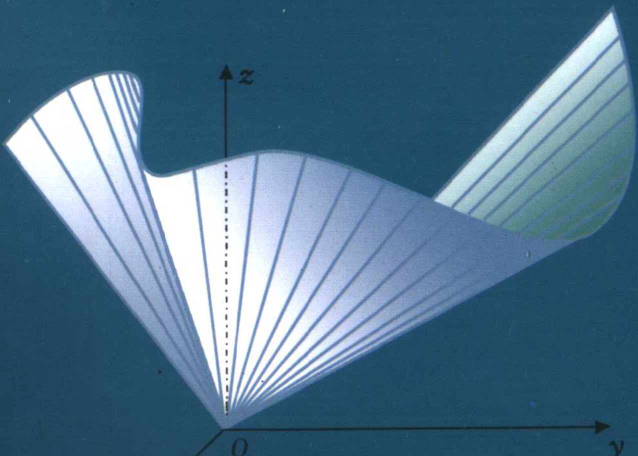
空间解析几何

精讲与精析

主编 杨桂芳 关 琪 付佑慧



哈尔滨地图出版社

空间解析几何精讲与精析

KONGJIAN JIEXI JIHE JINGJIANG YU JINGXI

主　编　杨桂芳　关　琪　付佑慧

副主编　宋颖伟　张　爽　陈静仁

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何精讲与精析/杨桂芳,关琪,付佑慧主编.—哈尔滨:哈尔滨地图出版社,2006.3
ISBN 7-80717-284-3

Ⅰ.空…　Ⅱ.①杨…②关…③付…　Ⅲ.空间几何:解析几何-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 024102 号

哈尔滨地图出版社出版、发行
(地址:哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮编:150086)
哈尔滨庆大印刷厂印刷
开本:850 mm×1 168 mm　1/32　印张:7.875　字数:200 千字
2006 年 3 月第 1 版　2006 年 3 月第 1 次印刷
印数:1～1 000　定价:24.00 元

前 言

空间解析几何是高等院校数学专业的一门基础课，它是几何学的一个分科，是用代数方法来研究几何图形性质的一门几何学。学好这门课对于修读后续课程都有很大的帮助，并且它本身的内容对于解决一些实际问题也是很有用处的。为了更好地指导学生学好这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力，我们编写了这本《空间解析几何精讲与精析》，其目的是为广大教师提供一本好的参考书，为广大学生提供一位好的“辅导老师”。

本书内容包括：矢量与坐标，轨迹与方程，平面与空间直线，柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面，二次曲线的一般理论共5章，每章均包括教学目的，教学要求，重点难点；每节包括内容精讲与习题精析。本书可作为大学本科、专科的辅导材料，也可供自学人员学习空间解析几何时参考使用。

本书通过教学目的，教学要求，重点难点，内容精讲与习题精析几方面的讲解，不仅使学生对基本概念、基本理论、基本方法有一个系统总结，而且对理解各概念之间的关系，提高学生的分析问题、解决问题的能力，深入理解和巩固知识是极其有益的。另外，书中有些习题做到一题多解，这有助于培养学生的发散思维能力。

由于编者水平有限，在编写过程中难免存在不妥或谬误之处，恳请读者批评指教并提出宝贵意见。

编　者

2006年1月

目　录

第一章　矢量与坐标

一、教学目的

通过引进矢量概念及其运算来建立坐标系，从而为进一步学习打下基础。

二、教学要求

1. 掌握矢量的概念；
2. 熟练掌握矢量的线性运算；
3. 熟练掌握矢量共线与共面的代数条件；
4. 熟练掌握两矢量的数性积、矢性积及三矢量的混合积；
5. 了解三矢量的双重矢性积。

三、重点难点

1. 矢量共线与共面的代数条件；
2. 两矢量的数性积、矢性积及三矢量的混合积，以及它们在直角坐标系下的分量表示。

第一节　矢量的概念

一、内容精讲

1. 矢量

我们称既有大小又有方向的量叫**矢量**,记作 $\vec{a}$。以 A 为始点、B 为终点的矢量记作$\overrightarrow{AB}$。**矢量的长度**(或模)是指矢量的大小,记作 $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$。模等于零的矢量叫做**零矢量**,用$\vec{0}$表示(其方向为任意方向)。模等于 1 的矢量叫**单位矢量**,与矢量 $\vec{a}$ 具有同一方向的单位矢量叫做**矢量 $\vec{a}$ 的单位矢量**,记作$\overrightarrow{a^0}$。

2. 相等矢量和反矢量

模和方向都相同的矢量叫**相等矢量**。在这个意义下,矢量的始点可以放在空间的任意一点,因此,又称它为**自由矢量**。而确定了始点的矢量叫**定矢量**。

两个模相等、方向相反的矢量叫互为**反矢量**。

3. 共线矢量和共面矢量

平行于同一直线的一组矢量叫**共线矢量**。平行于同一平面的一组矢量叫**共面矢量**。

显然,零矢量与任何共线的矢量组共线,也与任何共面的矢量组共面。而且,一组共线矢量一定是共面矢量;三矢量中如果有两矢量是共线的,这三矢量一定是共面的。

二、习题精析

1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形?

(1)把空间中一切单位矢量归结到共同的始点；

(2)把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点；

(3)把平行于某一直线的一切矢量归结到共同的始点；

(4)把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点。

解　(1)构成空间中以共同始点为球心，以1为半径的球面。

(2)构成平行于已知平面的平面上的以共同始点为圆心的单位圆周。

(3)构成的图形为与已知直线平行的直线。

(4)构成直线上到共同的始点的距离为1的两个点。

2. 设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，(见图1－1)，在矢量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{FA}$ 中，哪些矢量是相等的？

解　$\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{DE}$ 和 $\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{FA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 分别为相等的矢量。

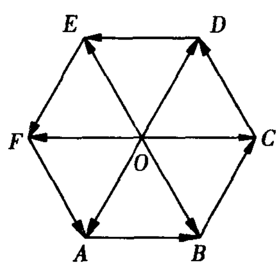


图1－1

3. 设在平面上给定一个四边形 $ABCD$，点 K，L，M，N 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$。当 $ABCD$ 是空间四边形时，此等式是否也成立？见图1－2、图1－3。

证　$\because \overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore\ \overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$

当 $ABCD$ 为空间四边形时,上述证明及结论仍然成立。

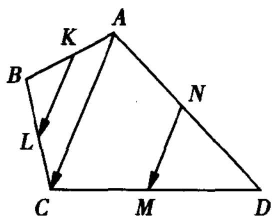


图 1-2

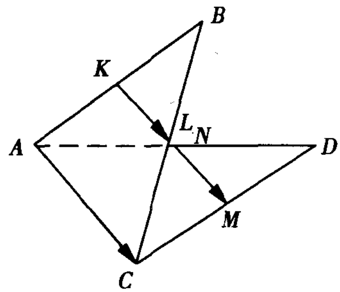


图 1-3

4. 设 $ABCD-EFGH$ 是一个平行六面体,见图 1-4,在下列各对矢量中,找出相等的矢量和互为反矢量的矢量:

(1)$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$;(2)$\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{CG}$;(3)$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{EG}$;(4)$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{GF}$;(5)$\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{CH}$。

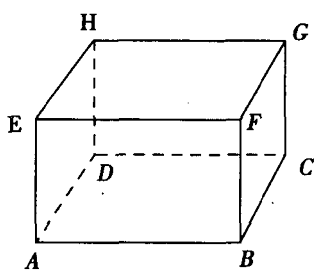


图 1-4

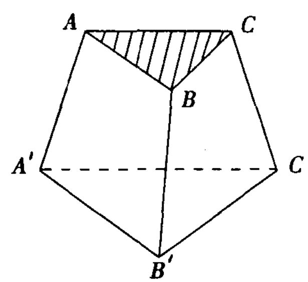


图 1-5

解 相等的有(2),(3),(5);互为反矢量的有(1),(4)。

5. 设 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 分别是三棱台 $ABC-A'B'C'$ 的上、下底面,见图 1-5,试在矢量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{A'B'}$,$\overrightarrow{B'C'}$,$\overrightarrow{C'A'}$,$\overrightarrow{AA'}$,$\overrightarrow{BB'}$,$\overrightarrow{CC'}$ 中找出共线矢量和共面矢量。

解　三组共线矢量分别是：

$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$；$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{B'C'}$；$\overrightarrow{CA}$和$\overrightarrow{C'A'}$。

四组共面矢量分别是：

(1)$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{C'A'}$；

(2)$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$；

(3)$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$；

(4)$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{C'A'}$，$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{CC'}$。

第二节　矢量的加法

内容精讲

1．矢量的加法

设已知矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，以空间中任意一点 O 为始点接连作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，得一折线 OAB，从折线的端点 O 到另一端点 B 的矢量$\overrightarrow{OB}=\vec{c}$ 叫做两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。由两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 求它们的和 $\vec{a}+\vec{b}$ 的运算叫**矢量加法**。这个法则可以推广到求有限个矢量的和。

矢量的加法的运算法则是：

(1) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；

(2) 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

(3) 结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$。

2．矢量的减法

当矢量 $\vec{b}$ 与矢量 $\vec{c}$ 的和等于矢量 $\vec{a}$，即 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ 时，矢量 $\vec{c}$ 叫矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，记作 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$。由两矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 求它们的差 $\vec{a}-\vec{b}$

的运算叫**矢量减法**。

与数的加减法类似，矢量的加法和减法满足等式：

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-(-\vec{b});\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})\ 。$$

第三节　数量乘矢量

一、内容精讲

数量乘矢量：

实数 λ 与矢量 $\vec{a}$ 的乘积是一个矢量，记作 $\lambda\vec{a}$。$\lambda\vec{a}$ 的长度 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$，其方向规定为 $\lambda>0$ 时与 $\vec{a}$ 方向相同，$\lambda<0$ 时与 $\vec{a}$ 方向相反，此运算叫做**数量与矢量的乘法**。

显然，当 $\lambda=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$。同时，矢量 $\vec{a}$ 与非零矢量 $\vec{b}$ 共线的充分必要条件是存在惟一的实数 λ，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$。

数乘矢量的运算法则是：

(1) $1\vec{a}=\vec{a}$，　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$；

(2) 结合律　$\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$；

(3) 第一分配律　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

(4) 第二分配律　$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$。

这里 $\vec{a},\vec{b}$ 是矢量；λ,μ 是任意实数。

二、习题精析

1. 要使下列各式成立，矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 应满足什么条件？

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

(4) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

(5) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

(6) $|\vec{a}+\vec{b}|\geqslant|\vec{a}-\vec{b}|$;

(7) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}-\vec{b}|$。

解　(1)矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角应为 $\frac{\pi}{2}$;

(2)矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$(共线且)方向一致;

(3)矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$(共线且)方向相反,同时 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$;

(4)矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$(共线且)方向相反;

(5)矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$(共线且)方向相同,同时 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$;

(6) $0\leqslant\angle(\vec{a},\vec{b})\leqslant\frac{\pi}{2}$;

(7) $\frac{\pi}{2}\leqslant\angle(\vec{a},\vec{b})\leqslant\pi$。

2. 试解下列各题:

(1) 化简 $(x-y)(\vec{a}+\vec{b})-(x+y)(\vec{a}-\vec{b})$;

(2) 已知 $\vec{a}=\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}$, $\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$;求 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ 和 $3\vec{a}-2\vec{b}$;

(3) 从矢量方程组
$$\begin{cases}3\vec{x}+4\vec{y}=\vec{a} & (1-1)\\ 2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b} & (1-2)\end{cases}$$
中解出矢量 $\vec{x}$, $\vec{y}$。

解　(1)
$$\begin{aligned}&(x-y)(\vec{a}+\vec{b})-(x+y)(\vec{a}-\vec{b})\\&=x\vec{a}+x\vec{b}-y\vec{a}-y\vec{b}-x\vec{a}+x\vec{b}-y\vec{a}+y\vec{b}\\&=2(x\vec{b}-y\vec{a});\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=4\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_3},\\ \vec{a}-\vec{b}&=-2\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}-3\overrightarrow{e_3},\\ 3\vec{a}-2\vec{b}&=-3\overrightarrow{e_1}+10\overrightarrow{e_2}-7\overrightarrow{e_3};\end{aligned}$$

(3)(1－1)×3＋(1－2)×4 得：　$17\vec{x}=3\vec{a}+4\vec{b}$，

(1－1)×2－(1－2)×3 得：　$17\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}$，

$\therefore\ \vec{x}=\dfrac{3}{17}\vec{a}+\dfrac{4}{17}\vec{b}$；$\vec{y}=\dfrac{2}{17}\vec{a}-\dfrac{3}{17}\vec{b}$。

3. 已知四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{c}$，$\overrightarrow{CD}=5\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c}$，对角线 AC，BD 的中点分别为 E，F，见图 1－6，求 $\overrightarrow{EF}$。

解　取 AD 的中点 H，连 HE，HF，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HF}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})\\&=3\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}。\end{aligned}$$

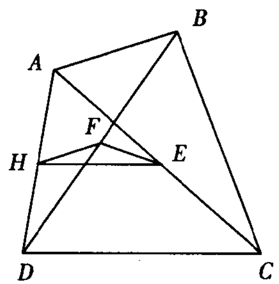


图 1－6

4. 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，证明 A，B，D 三点共线。

证　$\because\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$$\begin{aligned}&=\vec{a}+5\vec{b}\\&=\overrightarrow{AB}\ ,\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线，从而 A，B，D 三点共线。

5. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$，证明 $ABCD$ 为梯形。

证　$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$$=-8\vec{a}-2\vec{b}$$

$$=2\overrightarrow{BC},$$

故$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$共线,从而 $AD /\!/ BC$,

$\therefore$ $ABCD$ 是梯形。

6. 设 L,M,N 分别是$\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 的中点(见图 1－7),证明:三中线矢量$\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$可以构成一个三角形。

证　$\because \overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}$

$$=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$$

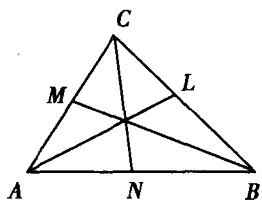


图 1－7

$\therefore$ 由第二节例 1 知:$\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$可以构成一个三角形。

7. 设 L,M,N 分别是$\triangle ABC$ 三边 AB,BC,CA 的中点,O 是任意一点,见图 1－8,证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\ 。$$

证　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$$=(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LA})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC})$$

$$=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\vec{0}$$

$$=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\ 。$$

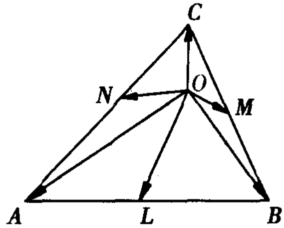


图 1－8

8. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心，O 是任意一点，见图 1－9，证明：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}$。

证 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$$
\begin{aligned}
&=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})\\
&\quad+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD})\\
&=4\overrightarrow{OM}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})\\
&=4\overrightarrow{OM}+\vec{0}+\vec{0}\\
&=4\overrightarrow{OM}\ 。
\end{aligned}
$$

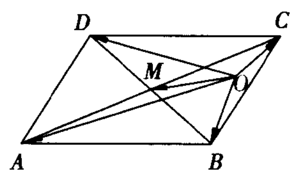


图 1－9

9. 在平行六面体 $ABCD-EFGH$（参看第一节第 4 题图，即图 1－4）中，证明：

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AG}\ 。$$

证 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}$

$$
\begin{aligned}
&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\\
&=2[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AE}]\\
&=2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE})\\
&=2\overrightarrow{AG}\ 。
\end{aligned}
$$

10. 用矢量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下两底且等于它们长度和的一半。

证 如图 1－10：$\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{FC}$，$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$且同向，同

时，

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$$

故可设　$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DC}(\lambda>0)$

且有：

$$2\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$
$$=\lambda\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}$$
$$=(1+\lambda)\overrightarrow{DC}\text{ 。}$$

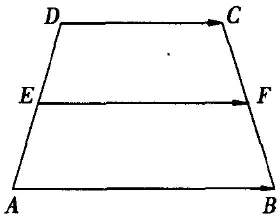


图 1－10

从而，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{DC}$与$\overrightarrow{AB}$三矢量共线，同时

$$|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}|(1+\lambda)\overrightarrow{DC}|$$
$$=\frac{1}{2}[(1+\lambda)|\overrightarrow{DC}|]$$
$$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{DC}|+\lambda|\overrightarrow{DC}|)$$
$$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)\text{ 。}$$

$$\therefore\ EF \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}(AB+CD)\text{ 。}$$

11．用矢量法证明平行四边形对角线互相平分。

证法一　在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，连接 BD，设其中点为 O，见图 1－11，则

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$
$$=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\text{ 。}$$