教材精讲
与中考
试题研究

大象专题

北京名师新奉献

圆

初中数学

丛书主编　希　扬

大象出版社

目录

●专题概述

●第一章　圆的有关性质

●第二章　直线和圆的位置关系

目 录

目录

●专题知识综合应用

专题概述

圆的知识是初中几何的重点，在中考中所占的比重较大，约占总题量的15% ~20%，约占总分的20% ~25%. 题型主要有填空题、选择题、计算题、证明题、作图题等. 近年来还出现了阅读理解题、开放探索题、应用设计题等. 此类试题强调基础，突出能力，设计思路开阔，新颖脱俗. 圆的综合题、圆和代数及三角函数结合的综合题通常是中考的压轴题. 因此，同学们一定要学好本专题知识，并要融会贯通.

专题知识网络

- 圆
  - 圆的概念及性质
    - 概念——圆的定义，点和圆的位置关系，圆的确定
    - 圆的性质
      - 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系定理
      - 垂径定理、圆周角定理及其推论
      - 圆内接四边形的性质
  - 直线和圆的位置关系
    - 相离
    - 相切——切线的性质和判定，弦切角定理，切线长定理
    - 相交
      - 相交弦定理及其推论
      - 切割线定理及其推论
      - （以上两项）——与圆有关的比例线段
  - 圆和圆的位置关系——外离、外切、相交、内切、内含
  - 正多边形和圆
    - 正多边形
      - 正多边形的概念和性质
      - 正多边形的有关计算
    - 圆的有关计算
      - 圆的周长、弧长
      - 圆、扇形、弓形面积
      - 圆柱、圆锥侧面展开图

第一章 圆的有关性质

本章知识网络

- 圆的有关性质
  - 圆的定义
    - 点和圆的位置关系（性质和判定）
      - 点在圆内
      - 点在圆上
      - 点在圆外
    - 不在同一直线上的三个点确定一个圆
  - 圆的有关性质
    - 轴对称性——垂径定理及其推论
    - 旋转不变性
      - 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系
      - 圆心角定理
      - 圆周角定理及其推论
      - 圆内接四边形的性质

从结构图中可以看到，圆的定义和基本性质是研究圆和其他性质的基础. 垂径定理及其推论反映了圆的重要性质，是今后证明线段相等、角相等、线段垂直的重要依据. 这个定理可以看做是圆的轴对称性的具体体现；而圆心角、弦、弧、弦心距之间的关系是有关圆的计算、证明和作图的依据，它又建立在圆的中心对称性上.

1.1 圆

精讲·精析·精练

重点难点连接点

重点 1. 理解圆的定义，掌握点和圆的位置关系. 2. 理解弦、弧、半圆、优弧、劣弧、同心圆、等圆、等弧、弓形等与圆有关的概念.

难点 1. 理解点和圆的位置关系. 2. 在图形中能准确识别与圆有关的一些概念.

知识网络连接点 1. 几何计算题求解时需使用勾股定理. 2. 特殊四边形的性质.

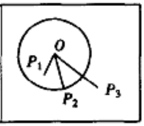
知识点精析

1. 圆的定义（两种定义形式）

（1）在同一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一端点 A 随之旋转所形成的图形叫做圆.

（2）圆是到定点的距离等于定长的点的集合.

2. 点和圆的位置关系

点和圆的位置关系	点在圆内	点在圆上	点在圆外	
点到圆心的距离 d 与半径 R 的大小关系	$d<R$	$d=R$	$d>R$	

3. 与圆有关的概念

（1）弦；（2）直径；（3）弧；（4）半圆；（5）优弧；（6）劣弧；（7）弓形；（8）同心圆；（9）等圆；（10）等弧.

注意：①直径是弦，但弦不一定是直径. ②同圆是指同一个圆；等圆、同心圆是指两个圆的关系，等圆是指半径相等，同心圆是指圆心相同. ③等弧必须是同圆或等圆中的弧，长度相等的弧，不一定是等弧.

4. 点的轨迹

（1）定义：符合某一条件的所有的点所组成的图形叫做符合这个条件的点的轨迹. 这里含有两层意思：

①图形上的任一点都符合条件；

②符合条件的任何一点都在图形上.

两层含义缺一不可.

(2)五种常见的点的轨迹

①到定点的距离等于定长的点的轨迹.

②和已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹.

③到已知角的两边距离相等的点的轨迹.

④到直线 l 的距离等于定长 d 的点的轨迹.

⑤到两条平行线距离相等的点的轨迹.

5. 重要定理

同圆或等圆的半径相等.

典型例题分析

例1 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=3$cm，$AC=4$cm，以 B 为圆心，以 BC 为半径作⊙B，点 A、C 及 AB、AC 的中点 D、E 与⊙B 有怎样的位置关系？

分析 先求出点 A、C、D、E 与圆心 B 的距离，再与半径 3cm 比较.

解 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=3$cm，$AC=4$cm.

$\therefore$ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$cm.

$\because$ ⊙B 的半径为 3cm，$AB=5\text{cm}>3\text{cm}$，$\therefore$ 点 A 在⊙B 外.

$\because$ $BC=3$cm，$\therefore$ 点 C 在⊙B 上.

$\because$ $DB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times5\text{cm}=2.5\text{cm}<3\text{cm}$，$\therefore$ 点 D 在⊙B 内.

$\because$ $EB>BC=3$cm，$\therefore$ 点 E 在⊙B 外.

点拨 要判定平面上一点与圆的位置关系，只须比较该点到圆心的距离与半径的长短.

例2 求证：矩形的四个顶点在以对角线的交点为圆心的同一个圆上.

已知 如图 1－1，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O.

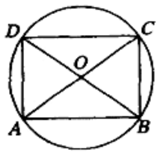


图 1－1

求证 A、B、C、D 四点同在以点 O 为圆心的圆上.

分析 欲证 A、B、C、D 四点在⊙O 上，可证点 A、B、C、D 到 O 点的距离相等，即 $OA=OB=OC=OD$.

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore\quad OA=OC=\frac{1}{2}AC, OB=OD=\frac{1}{2}BD, AC=BD$,

$\therefore\quad OA=OB=OC=OD$,

$\therefore$ A、B、C、D 四个点在以点 O 为圆心、OA 长为半径的圆上.

夯实基础训练

一、选择题

1. 下列说法正确的是　（　　）

A. 弦是直径　　B. 过圆心的线段是直径

C. 半圆是弧　　D. 长度相等的两条弧是等弧

2. 两个圆的圆心都是 O，半径分别为 r_1（称为$\odot r_1$）和 r_2（称为$\odot r_2$），且 $r_1<OA<r_2$，那么点 A 在　（　　）

A. $\odot r_1$ 内　B. $\odot r_2$ 外　C. $\odot r_1$ 外，$\odot r_2$ 内　D. $\odot r_1$ 内，$\odot r_2$ 外

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AB=5$cm，$BC=4$cm，以 A 为圆心，以 3cm 为半径画圆，则点 C 与$\odot A$的位置关系是　（　　）

A. C 在$\odot A$上　B. C 在$\odot A$外　C. C 在$\odot A$内　D. 无法确定

二、填空题

4. 确定一个圆的要素是________和________.

5. 已知$\odot O$的半径是 5cm，点 P 到圆心 O 的距离是 d. 若 $d=4.8$cm，则点 P 在$\odot O$的______；若 $d=2\sqrt{3}$cm，则点 P 在$\odot O$的______；若 $d=3\sqrt{3}$cm，则点 P 在$\odot O$的______；若 $d=5$cm，则点 P 在$\odot O$的____.

6. 一个圆的最大弦长是 10cm，则此圆半径为____.

7. 在图 1－2 中，有____条直径，____条非直径的弦，圆中以 A 为一个端点的优弧有____条，劣弧有____条.

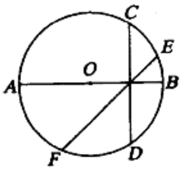


图 1－2

图 1－3

8. 过点 A 半径为 R 的圆的圆心的轨迹为______.

三、解答题

9. 如图 1－3，在以 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 交小圆于 C、D 两

点. 求证:$AC = BD$.

10. 求证:正方形 $ABCD$ 的四个顶点在同一个圆上.

11. 如图 1-4,AB 是⊙O 的任一直径,CD 是⊙O 中不过圆心的任一条弦,求证:$AB > CD$.

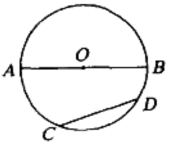


图 1-4

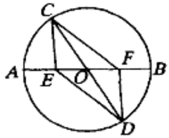


图 1-5

12. 如图 1-5,AB、CD 为⊙O 的两条直径,E、F 分别为 OA、OB 的中点,求证:四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

答案与解析

1. 答案:C. 点拨:直径是弦,但弦不一定是直径. 等弧必须是在同圆或等圆中的弧.

2. 答案:C.

3. 答案:A.

4. 答案:圆心 半径

5. 答案:内部 内部 外部 上

6. 答案:5cm

7. 答案:1 2 4 4

8. 答案:以 A 为圆心,以 R 为半径的圆

9. 解:在△OAB 中,∵ $OA = OB$,∴ $\angle OAB = \angle OBA$,在△OCD 中,∵ $OC = OD$,∴ $\angle OCD = \angle ODC$,∴ $\angle OCA = \angle ODB$(等角的补角相等),∴ 可证△AOC≌△BOD,可得 $AC = BD$.

10. 解:设正方形 $ABCD$ 的对角线交点为 O,A、B、C、D 四点在以 O 为圆心、OA 为半径的圆上.

11. 证明:连结 OC,OD. 在△OCD 中,$OC + OD > CD$. 而 $OA = OB = OC = OD$,又 $AO + OB = AB$,∴ $OC + OD = AB$,∴ $AB > CD$. 点拨:利用同圆半径相等及三角形中两边之和大于第三边是解题关键.

12. 证明:∵ AB 是⊙O 的直径,∴ $OA = OB$,又∵ E、F 分别是 OA、OB 的中点,∴ $OE = \frac{1}{2}OA$,$OF = \frac{1}{2}OB$,∴ $OE = OF$. 又∵ CD 是⊙O 的直径,∴ OC

$=OD$，∴ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

巩固·拓展·提高

疑难互动问答

为什么说直径是弦，而弦不是直径呢？

因为直径是经过圆心的特殊弦，也是圆中最长的弦，而弦是连结圆上任意两点的线段，它不一定过圆心，故弦不一定是直径.

长度相等的弧是等弧这个命题为什么不正确？

等弧必须是同圆或等圆中的弧，因为只有在同圆或等圆中，两条弧才可能互相重合，在大小不等的两个圆中，不存在等弧，因此长度相等的弧，不一定是等弧.

进阶例题研究

例1 已知：如图 1－6，矩形 $ABCD$ 的边 $AB=3\text{cm}$，$AD=4\text{cm}$，若以点 A 为圆心作⊙A，使 B、C、D 三点中至少有一点在圆内，且至少有一点在圆外，试确定⊙A 的半径 r 的取值范围.

解 连结 AC.

∵ $AB=3\text{cm}$，$AD=4\text{cm}$，且四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴ $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm})$.

∴ 点 B 到圆心 A 的距离 3cm 是最短距离，C 点到圆心 A 的距离 5cm 是最长距离.

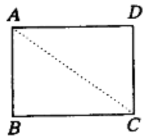


图 1－6

∴ 使 B、C、D 三点中至少有一点在圆内，且至少有一点在圆外，⊙A 的半径 r 的取值范围是 $3\text{cm}<r<5\text{cm}$.

例2 B 镇位于 A 市的正南方向 30km 处，C 镇和 D 镇在 B 镇的正东方向上，分别距 B 镇 40km 和 50km，A 市有一座寻呼台发射塔，覆盖半径为 50km. 在 B、C、D 各镇能否收到该寻呼台发出的信息？为什么？

分析 求出 B、C、D 各镇到 A 市的距离，如果小于等于 50km，即可收到寻呼信息，否则收不到信息.

解 如图 1－7，$AB=30\text{km}$，$BC=40\text{km}$，$BD=50\text{km}$，$\angle B=90°$，由勾股定理得

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{30^2+40^2}=50(\text{km})$.

$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{30^2+50^2}=\sqrt{3400}>50\text{km}$.

答：B、C 两镇均可以收到寻呼台发出的信息，D 镇收不到信息.

点拨 这是一道实际应用问题，关键是画出图形，建立数学模型，把它转化为数学问题.

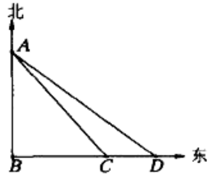


图 1－7

拓展提高训练

一、选择题

1. ⊙O 的半径为 5，圆心 O 的坐标为 $(0,0)$，点 P 的坐标为 $(4,2)$，则点 P 与⊙O 的位置关系是 （　　）

A. 点 P 在⊙O 内　　B. 点 P 在⊙O 上

C. 点 P 在⊙O 外　　D. 点 P 在⊙O 上或在⊙O 外

二、填空题

2. 已知一点到圆周上的点的最大距离为 5cm，最小距离为 1cm，则此圆的半径为______ cm.

3. 已知⊙O 的半径为 1，点 P 与圆心 O 的距离为 d，且方程 $x^2-2x+d=0$ 有实数根，则点 P 与⊙O 的位置关系是________.

4. 有一矩形 $ABCD$ 的长为 5，宽为 3，以点 D 为圆心作圆，A、B、C 三点中有两点在圆内，且有一点在圆外，则⊙D 的半径 R 的取值范围是________.

5. 已知：在直角坐标系中，在第一象限内作射线 OP 与 x 轴的正方向的夹角为 α，点 $A(4,0)$，$AB\perp OP$ 于 B，以 A 为圆心的⊙A 半径为 2. 若点 B 在⊙A 内，则 α 的取值范围是______；若点 B 在⊙A 上，则 $\alpha=$____；若点 B 在⊙A 的外部，则 α 的取值范围是______.

三、解答题

6. 如图 1－8，已知 AB、CD 是⊙O 的直径，求证：$AC=BD$.

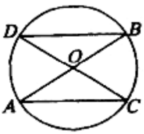


图 1－8

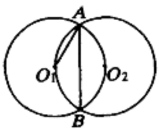


图 1－9

7. 如图 1－9，两等圆⊙O_1 和⊙O_2 相交于 A、B 两点，且⊙O_1 经过圆心 O_2，求 $\angle O_1AB$ 的度数.

8. 如图 1－10，AB 为 $\odot O$ 的直径，CD 是 $\odot O$ 的弦，AB、CD 的延长线交于 E 点，已知 $AB=2DE$，$\angle E=18°$，求 $\angle AOC$ 的度数.

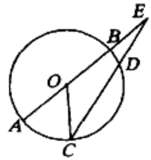


图 1－10

答案与解析

1. 答案：A.

2. 解：当点在圆外时，圆的半径为 2cm；当点在圆内时，圆的半径为 3cm.

3. 解：$\because$ 方程 $x^2-2x+d=0$ 有实数根，$\therefore$ $\Delta=(-2)^2-4d\geqslant 0$，解之，得 $d\leqslant 1$，$\therefore$ 点 P 在 $\odot O$ 的内部或在 $\odot O$ 上.

4. 答案：$5<R<\sqrt{34}$

5. 解：由题意得 $OA=4$，$AB=2$，且 $\triangle OBA$ 为直角三角形，$\angle B=90°$，$\therefore$ $\angle\alpha=30°$. 答案：$0°<\alpha<30°$ $30°$ $30°<\alpha<90°$

6. 证明：$\because$ AB、CD 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore$ $OA=OB$，$OC=OD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形. $\therefore$ $AC=BD$. 另外，证 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$ 也可得. 点拨：抓住直径的特征则本题易证.

7. 解：连结 O_1B、O_1O_2、O_2A、O_2B. $\because$ $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 为等圆且 $\odot O_1$ 经过圆心 O_2，$\therefore$ $O_1A=O_1B=O_1O_2=O_2A=O_2B$. $\therefore$ 四边形 O_1BO_2A 为菱形，$\triangle O_1O_2A$ 为等边三角形，$\therefore$ $\angle O_1AB=\frac{1}{2}\angle O_1AO_2$，$\angle O_1AO_2=60°$，$\therefore$ $\angle O_1AB=30°$.

8. 解：连结 OD. $\because$ AB 为 $\odot O$ 直径，OC、OD 为半径，$AB=2DE$，$\therefore$ $OC=OD=DE$. $\therefore$ $\angle DOE=\angle E=18°$，$\angle ODC=\angle C=2\angle E=36°$，$\therefore$ $\angle AOC=\angle C+\angle E=18°+36°=54°$.

1.2 过三点的圆

精讲·精析·精练

重点难点连接点

重点 1. 理解定理“不在同一直线上的三点确定一个圆”. 2. 掌握过不在同一直线上的三个点作圆的方法. 3. 三角形的外接圆、三角形的外心、圆的内接三角形的概念.

难点 反证法.
知识网络连接点 作已知线段的垂直平分线.

知识点精析

1. 过已知点作圆

由圆的定义可知,圆有两个元素:圆心和半径.圆心确定圆的位置,半径确定圆的大小.作圆的关键是确定圆心的位置和半径的大小.由于作圆要经过已知点,如果圆心的位置确定了,圆的半径也就随之确定.所以过已知点作圆的问题就是找圆心的问题.

(1)经过一点的圆:有无数个.

(2)经过两点的圆:有无数个.

(3)经过三点的圆:①经过同一直线上的三点不能作圆;②过不在同一直线上的三点可以作且只可以作一个圆.其作法是:连结其中任意两点并作其垂直平分线,再连结两点并作其垂直平分线,两条直线的交点就是我们要找的圆心.

2. 三角形的外心

(1)三角形外心到三个顶点的距离相等.

(2)锐角三角形外心在形内;直角三角形外心是斜边中点;钝角三角形外心在形外.

3. 反证法

(1)定义:从命题结论的反面出发,引出矛盾,从而证明命题成立,这样的证明方法叫做反证法.

(2)用反证法证明命题的一般步骤:

①假设命题的结论不成立;

②从这个假设出发,经过推理论证,得出与已知、定理、公理或明显事实相矛盾的结论;

③由矛盾判定假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

典型例题分析

例1 用反证法证明:同一个三角形中不可能有两个直角.

证明 (1)假设$\triangle ABC$中有两个直角,不妨设$\angle A=90°$,$\angle B=90°$.

(2)$\because$ $\angle A=90°$,$\angle B=90°$,

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle C=90°+90°+\angle C=180°+\angle C>180°$.

这与三角形内角和定理矛盾. ∴ 假设不成立.

(3)∴ 同一个三角形中不可能有两个直角.

例2 作一个圆,使它经过点 A 和点 B,并且圆心在已知直线 l 上.

作法 (1)当直线 l 和 AB 斜交或重合时,只要作线段 AB 的垂直平分线与 l 交于 O,以 O 为圆心,OA 为半径作圆,此即为所求作的圆. 这样的圆只有一个(图 1 - 11).

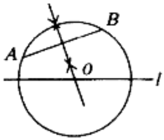


图 1 - 11

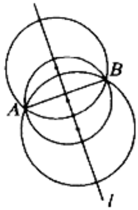


图 1 - 12

(2)当直线 l 和 AB 垂直但不经过线段 AB 的中点时,这样的圆不能作出.

(3)当 l 是线段 AB 的垂直平分线时,这样的圆可作无数多个(图 1 - 12).

点拨 确定圆心的位置和半径的长是解题的关键. 应增强思维的严密性,不能忽视过 A、B 的直线与直线 l 垂直的情况.

夯实基础训练

一、填空题

1. 在 Rt△ABC 中,已知两直角边的长分别为 6cm 和 8cm,那么 Rt△ABC 的外接圆的面积为________.

2. 用反证法证明"等腰三角形的底角必是锐角"的第一步是________.

二、选择题

3. 下列命题中正确的是 (　　)

A. 经过三点一定可以作圆.

B. 任意一个三角形有且仅有一个外接圆.

C. 任意一个圆有且仅有一个内接三角形.

D. 三角形的外心到三角形各边的距离都相等.

4. 下面四个命题中,真命题的个数是 (　　)

①三点确定一个圆.

②三角形的外心一定在三角形内.

③等腰三角形的外心必在底边的中线上.

④矩形一定有外接圆,圆心是对角线的交点.

A. 1 个　　　　B. 2 个　　　　C. 3 个　　　　D. 4 个

三、解答题

5. 如图 1－13,已知$\overset{\frown}{AB}$,求作$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心.

6. 在$\triangle ABC$中,已知 BC 的长为 24,外心到 BC 的距离为 5,求$\triangle ABC$外接圆的半径.

7. 用反证法证明:三角形的三个内角中,总有一个角不大于 60°.

图 1－13

答案与解析

1. 解:斜边 $=\sqrt{6^2+8^2}=10$,其外心是斜边中点,所以半径为 5,外接圆面积为 $25\pi cm^2$.

2. 答案:假设等腰三角形的底角是直角或钝角.

3. 答案:B.

4. 答案:A.　点拨:注意三角形的中线是线段.

5. 作法:在$\overset{\frown}{AB}$上任取一点 C,连结 AC、BC,分别作 AC、BC 的垂直平分线 EF、MN,它们交于 O,点 O 即为所求(如图 1－14).

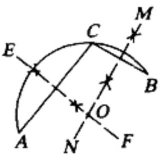


图 1－14

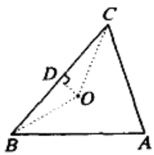


图 1－15

6. 解:如图 1－15. ∵　点 O 为$\triangle ABC$的外心,连结 OB、OC,则 $OB=OC$,过 O 作 $OD\perp BC$ 于 D. ∴　$CD=BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 24=12$. 在 $Rt\triangle COD$ 中,$OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.　答案:$\triangle ABC$外接圆的半径是 13.

7. 证明:假设三角形中三个角都大于 60°,那么这三个角的和大于 180°,与三角形内角和定理矛盾. ∴　三角形中至少有一个锐角不大于 60°.

巩固·拓展·提高

疑难互动问答

“三点确定一个圆”这个命题对吗？为什么？

不对. 因为定理“不在同一直线上的三点确定一个圆”中的“不在同一直线上”这个条件不能忽略，否则，若三点在同一直线上就不能作圆了.

“三角形的外心在三角形内部”这个命题对吗？为什么？

不对. 因为三角形的外心指三角形外接圆的圆心，是三角形三边的垂直平分线的交点. 当三角形是锐角三角形时，其外心在三角形内部；当三角形是直角三角形时，其外心在斜边的中点上；当三角形是钝角三角形时，其外心在三角形外部.

进阶例题研究

例 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$，$BC=12$，求其外接圆的半径.

解 如图 1－16，作 $AD\perp BC$ 于 D，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，又∵ $AB=AC$，∴ AD 是 BC 的垂直平分线. 故外心 O 在 AD 上，且 $BD=\frac{1}{2}BC=6$. 连结 OC，设 $OA=OC=r$，则 $OD=8-r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODC$ 中，∵ $OD^2+DC^2=OC^2$，∴ $(8-r)^2+6^2=r^2$，∴ $r=\frac{25}{4}$.

即三角形外接圆半径是$\frac{25}{4}$.

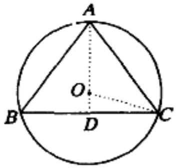


图 1－16

点拨 运用勾股定理构造含有 r 的方程求 r，是解此题的关键.

拓展提高训练

一、填空题

1. 已知等边三角形的边长为 18，则其外接圆半径是______.

2. 若$\triangle ABC$ 的三边为 3，2，$\sqrt{13}$，设其三条高的交点为 H，外心为 O，则 $OH=$