逐一分组平差法

陸学智 毛惠庆 著

測繪出版社

逐一分组平差法

逐一分组平差法

陸学智　毛惠庆 著

测绘出版社

1959·北京

內容提要

逐一分組平差法，具有初学人員易于掌握，便于平差区域发展时的改化計算，以及便于預行計算典型图形的固定部分等优点。本書即在系統地介紹逐一分組平差法的原理和实际运用。

全書共分四章。首先介紹了逐一分組平差法的基本原理，进而着重介紹了理論和实际結合的示例，分别对基綫网平差，分区分組平差以及典型图形平差作了示范演算。因此，計算人員祗要按照适当实例，即可依示例方法进行簡单而有規律的演算。

本書可供測繪工程技术人員在平差計算中参考应用，并可供測繪院校师生学习和参考。

逐一分組平差法

著者　陸学智　毛惠庆
出版者　測繪出版社
北京西四羊市大街地質部內
北京市書刊出版業營業許可証出字第081号
发行者　新华書店科技发行所
經售者　各地新华書店
印刷者　地質出版社印刷厂
北京安定門外六鋪炕40号

印数(京)1—2,800册　1959年11月北京第1版
开本31″×43″1/16　1959年11月第1次印刷
字数120,000　印张3 3/8 插頁4
定价(10)0.58元

序　　言

本書主要宗旨，是普及与提高广大測繪工作者的平差計算技术水平。

示例中运用的平差計算之規則及方法較为新穎，可供工程师、技术員与有关院校学生进行平差作业之參考。

本平差方法簡单而有規律，因此一般技术員。只要在本書中找到适当的例子，并彻底地去理解它，就可以独立地进行类似性質的工作。

最后，我們衷心希望讀者批評和指正。

作　者　1959年4月

目 录

序 言 …… 3
第一章 逐一分組平差法的基本原理 …… 5
§1. 緒言 …… 5
§2. 等精度观測两組平差法的基本知識 …… 5
§3. 問題的簡化，逐次改化条件方程式求解的理論 …… 9
§4. 不等精度观測的逐一分組平差法 …… 11
§5. 平差値函数权的确定 …… 12
§6. 改化計算中之各項驗算 …… 15
第二章 基綫网平差 …… 17
§7. 单菱形基綫网观測最适当权分配与总測回数之計算 …… 17
§8. 单菱形基綫网平差（按方向） …… 21
§9. 双菱形基綫网观測最适当权分配与总測回数之計算 …… 24
第三章 分区分組平差 …… 27
§10. 三角网分区分組平差（按角度） …… 27
§11. 水准网分区分組平差 …… 34
第四章 典型图形平差 …… 38
§12. 三角形中插入一点（按方向） …… 40
§13. 三角形中插入一点（按角度） …… 42
§14. 三角形外交一点（按方向） …… 44
§15. 三角形外交一点（按角度） …… 46
§16. 四边形中插入一点（按方向） …… 48
§17. 四边形中插入二点（按方向）（插表）
§18. 两相邻三角形中插入一点（按方向）（插表）
§19. 两相邻角中插入一点（按方向） …… 49
§20. 前后方交会单插点（按方向） …… 51
附例：前后方交会插点按間接观測平差算例 …… 53

第一章　逐一分組平差法的基本原理

§1. 緒　　言

逐一分組平差法是利用逐次改化条件方程式的方法，使最后列出的法方程式，除主对角綫之系数外，其他系数皆变为零。

从表面上看，所提出的方法較为复杂，但实际运用起来，却有很大的灵活性。經过实践証明，可以肯定它具有以下的特点：

1. 有規律，有固定的計算格式，初学者易于掌握；

2. 在計算过程中，可以逐次驗算，防止錯誤；

3. 当三角网某一部分的不符值受到变动，可以較快的将修正后的系数求出；

4. 可以扩展，随时可将后加入之条件与已平差之条件合併，而得到有象整体平差同样的結果。并且可以陆續加入。不受限制。再者任何有关函数之权，也可以根据需要加入推求，頗为方便；

5. 对于典型图形的平差，应用本法时，可預先将各条件方程式中，屬于固定的部分，作成标准格式，使实际計算工作仅限于非固定的部分。本法亦适合大規模三角网（或鎖）的平差，以加快解算的速度；

6. 对按方向或按角度平差及等精度的或不等精度观測都能适合；

7. 能将基綫网扩大边权倒数与基綫网观測的最适当权分配，作簡捷的合併解算。

本法根据两組平差原理导出，主要的区别仅在于第一組的条件方程式，其所屬法方程式的非自乘系数已均为零。然后采用逐一分組的方法。逐次改 改化 其他 的各个 条件方程式。故命名为“逐一分組平差法”。

玆将計算原理等分述于后。

§2. 等精度观測两組平差法的基本知識

逐一分組平差法是根据两組平差原理导出，而两組平差法是把需要解算的条件方程式系，分为两組，并分别解算。同时保持了分組解算結果和用最小二乘法一併解算所有方程式的結果一致。它是通过改化第二組方程式，使改化后的第二組方程式与原来第一組方程式的解算結果，和一併解算所有方程式的結果一样。

設有下列各条件方程式系，并把它任意的分成两組。

第　一　組

$$\left.\begin{aligned} a_1V_1+a_2V_2+\cdots\cdots+a_nV_n+w_a=0\\ b_1V_1+b_2V_2+\cdots\cdots+b_nV_n+w_b=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ t_1V_1+t_2V_2+\cdots\cdots+t_nV_n+w_t=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

第 二 組

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\cdots\cdots+\alpha_n V_n+w_\alpha=0\\
&\beta_1 V_1+\beta_2 V_2+\cdots\cdots+\beta_n V_n+w_\beta=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\eta_1 V_1+\eta_2 V_2+\cdots\cdots+\eta_n V_n+w_\eta=0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

第二組誤差方程式按下列方法改化：

首先将（1）式各方程式分別乘以不定乘数 $\rho_{a\alpha}$、$\rho_{b\alpha}$、……$\rho_{t\alpha}$，再加到第二組的第一个方程式中，結果得：

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1+a_1\rho_{a\alpha}+b_1\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_1\rho_{t\alpha})V_1+\\
&(\alpha_2+a_2\rho_{a\alpha}+b_2\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_2\rho_{t\alpha})V_2+\\
&(\alpha_3+a_3\rho_{a\alpha}+b_3\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_3\rho_{t\alpha})V_3+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\
&(\alpha_n+a_n\rho_{a\alpha}+b_n\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_n\rho_{t\alpha})V_n+\\
&w_\alpha+w_a\rho_{a\alpha}+w_b\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+w_t\rho_{t\alpha}=0
\end{aligned}
$$

或

$$
A_1V_1+A_2V_2+\cdots\cdots+A_nV_n+W_A=0 \qquad (3)
$$

此处：

$$
\left.\begin{aligned}
&A_1=\alpha_1+a_1\rho_{a\alpha}+b_1\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_1\rho_{t\alpha}\\
&A_2=\alpha_2+a_2\rho_{a\alpha}+b_2\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_2\rho_{t\alpha}\\
&A_3=\alpha_3+a_3\rho_{a\alpha}+b_3\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_3\rho_{t\alpha}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_n=\alpha_n+a_n\rho_{a\alpha}+b_n\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_n\rho_{t\alpha}\\
&W_A=w_\alpha+w_a\rho_{a\alpha}+w_b\rho_{b\alpha}+\cdots+w_t\rho_{t\alpha}
\end{aligned}\right\} \qquad (4)
$$

其次将（1）式各方程式分別乘以不定乘数 $\rho_{a\beta}$、$\rho_{b\beta}$、……$\rho_{t\beta}$，再加到第二組的第二个方程中，結果得：

$$
\begin{aligned}
&(\beta_1+a_1\rho_{a\beta}+b_1\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_1\rho_{t\beta})V_1+\\
&(\beta_2+a_2\rho_{a\beta}+b_2\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_2\rho_{t\beta})V_2+\\
&(\beta_3+a_3\rho_{a\beta}+b_3\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_3\rho_{t\beta})V_3+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(\beta_n+a_n\rho_{a\beta}+b_n\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_n\rho_{t\beta})V_n+\\
&w_\beta+w_a\rho_{a\beta}+w_b\rho_{b\beta}+\cdots+w_t\rho_{t\beta}=0
\end{aligned}
$$

或

$$
B_1V_1+B_2V_2+\cdots\cdots+B_nV_n+W_B=0 \qquad (5)
$$

此处：

$$
\left.\begin{aligned}
&B_1=\beta_1+a_1\rho_{a\beta}+b_1\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_1\rho_{t\beta}\\
&B_2=\beta_2+a_2\rho_{a\beta}+b_2\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_2\rho_{t\beta}\\
&B_3=\beta_3+a_3\rho_{a\beta}+b_3\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_3\rho_{t\beta}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&B_n=\beta_n+a_n\rho_{a\beta}+b_n\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_n\rho_{t\beta}\\
&W_B=w_\beta+w_a\rho_{a\beta}+w_b\rho_{b\beta}+\cdots w_t\rho_{t\beta}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)
$$

然后按同样方法，依次改化第二組的第三，四及以后各个方程式，并以C、D……表示其系数。則改化后的条件方程式应为：

$$\left.\begin{aligned}
&A_1V_1+A_2V_2+\cdots\cdots+A_nV_n+W_A=0\\
&B_1V_1+B_2V_2+\cdots\cdots+B_nV_n+W_B=0\\
&C_1V_1+C_2V_2+\cdots\cdots+C_nV_n+W_C=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&N_1V_1+N_2V_2+\cdots\cdots+N_nV_n+W_n=0
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

用最小二乘法一併解方程式組（1）及（7）。就得出下列的联系数法方程式系：

$$\left.\begin{array}{l|l}
[aa]K_a+[ab]K_b+\cdots\cdots+[at]K_t & +[aA]K_A+[aB]K_B+\cdots\cdots+[aN]K_N+w_a=0\\
[ab]K_a+[bb]K_b+\cdots\cdots+[bt]K_t & +[bA]K_A+[bB]K_B+\cdots\cdots+[bN]K_N+w_b=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[at]K_a+[bt]K_b+\cdots\cdots+[tt]K_t & +[tA]K_A+[tB]K_B+\cdots\cdots+[tN]K_N+w_t=0\\
\hline
[aA]K_a+[bA]K_b+\cdots\cdots+[tA]K_t & +[AA]K_A+[AB]K_B+\cdots\cdots+[AN]K_N+W_A=0\\
[aB]K_a+[bB]K_b+\cdots\cdots+[tB]K_t & +[AB]K_A+[BB]K_B+\cdots\cdots+[BN]K_N+W_B=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[aN]K_a+[bN]K_b+\cdots\cdots+[tN]K_t & +[AN]K_A+[BN]K_B+\cdots\cdots+[NN]K_N+W_N=0
\end{array}\right\}\qquad(8)$$

这时改正数、

$$V_i=a_iK_a+b_iK_b+\cdots\cdots+t_iK_t+A_iK_A+B_iK_B+\cdots\cdots+N_iK_N。$$

为了把（8）式分为两个独立的方程式組，以便独立地解出每一組方程式起見，必須提出下列要求，即須：

$$\left.\begin{aligned}
&[aA]=[bA]=\cdots\cdots=[tA]=0\\
&[aB]=[bB]=\cdots\cdots=[tB]=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[aN]=[bN]=\cdots\cdots=[tN]=0
\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

这样，方程式系（8）即将变成为互相独立的两組方程式（即（8）式方框內的部分）。

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]K_a+[ab]K_b+\cdots\cdots+[at]K_t+w_a=0\\
&[ab]K_a+[bb]K_b+\cdots\cdots+[bt]K_t+w_b=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[at]K_a+[bt]K_b+\cdots\cdots+[tt]K_t+w_t=0
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[AA]K_A+[AB]K_B+\cdots\cdots+[AN]K_N+W_A=0\\
&[AB]K_A+[BB]K_B+\cdots\cdots+[BN]K_N+W_B=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[AN]K_A+[BN]K_B+\cdots\cdots+[NN]K_N+W_N=0
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

方程式（10）与（11）分别为（1）及（7）式的联系数法方程式系。解方程式(10)后，即可按下列公式得出第一次改正数 V'_i

$$V'_i=a_iK_a+b_iK_b+\cdots\cdots+t_iK_t\qquad(12)$$

又解算方程式（11），则可按下列公式得出第二次改正数 V_i''

$$V_i''=A_iK_A+B_iK_B+\cdots\cdots+N_iK_N\qquad(13)$$

而

$$V_i=V_i'+V_i''\qquad(14)$$

也就是分开解算（1）和（7）两組方程式所得的改正数之和等于一併解这些方程式所得

的总改正数。再者（8）式分为两组独立的方程式，以成立（9）式为其必要条件，这是利用 ρ 值的不定性而求得的。

根据

$$
\begin{aligned}
A_i&=\alpha_i+a_i\rho_{a\alpha}+b_i\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_i\rho_{t\alpha}\\
B_i&=\beta_i+a_i\rho_{a\beta}+b_i\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+t_i\rho_{t\beta}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Ni&=\eta_i+a_i\rho_{a\eta}+b_i\rho_{b\eta}+\cdots\cdots+t_i\rho_{t\eta}
\end{aligned}
$$

則

$$
\left.\begin{aligned}
a_iA_i&=a_i(\alpha_i+a_i\rho_{a\alpha}+b_i\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_i\rho_{t\alpha})\\
&=a_i\alpha_i+a_ia_i\rho_{a\alpha}+a_ib_i\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+a_it_i\rho_{t\alpha}\\
b_iA_i&=b_i(\alpha_i+a_i\rho_{a\alpha}+b_i\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_i\rho_{t\alpha})\\
&=b_i\alpha_i+a_ib_i\rho_{a\alpha}+b_ib_i\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+b_it_i\rho_{t\alpha}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
t_iA_i&=t_i(\alpha_i+a_i\rho_{a\alpha}+b_i\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_i\rho_{t\alpha})\\
&=t_i\alpha_i+a_it_i\rho_{a\alpha}+b_it_i\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+t_it_i\rho_{t\alpha}
\end{aligned}\right\}\quad(15)
$$

故

$$
\left.\begin{aligned}
[aA]&=[a\alpha]+[aa]\rho_{a\alpha}+[ab]\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+[at]\rho_{t\alpha}\\
[bA]&=[b\alpha]+[ab]\rho_{a\alpha}+[bb]\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+[bt]\rho_{t\alpha}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[tA]&=[t\alpha]+[at]\rho_{a\alpha}+[bt]\rho_{b\alpha}+\cdots\cdots+[tt]\rho_{t\alpha}
\end{aligned}\right\}\quad(16)
$$

由（16）式，$[aA]=[bA]=\cdots\cdots=[tA]=0$ 即可以求出 $\rho_{a\alpha}$、$\rho_{b\alpha}\cdots\cdots\rho_{t\alpha}$。

我們可以得到象(16)式这样的方程式組，和第二組方程式数目一样多，而各組中未知数 ρ 值的个数，則等于第一組方程式的个数。

如

$$
\left.\begin{aligned}
[aB]&=[a\beta]+[aa]\rho_{a\beta}+[ab]\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+[at]\rho_{t\beta}\\
[bB]&=[b\beta]+[ab]\rho_{a\beta}+[bb]\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+[bt]\rho_{t\beta}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[tB]&=[t\beta]+[at]\rho_{a\beta}+[bt]\rho_{b\beta}+\cdots\cdots+[tt]\rho_{t\beta}
\end{aligned}\right\}\quad(17)
$$

令 $[aB]=[bB]=[cB]=\cdots\cdots=[tB]=0$，則由（17）式即可求出 $\rho_{a\beta}$、$\rho_{b\beta}\cdots\cdots\rho_{t\beta}$。（17）式和（16）式比較，祇是自由項不同。其余类推，即可求出依次各組的各个 ρ 值。

求出各个 ρ 值之后便計算第二組改化方程式的系数 A、B、……N，以及自由項 W_A、W_B、……W_N，然后解算第二組改化方程式的法方程式，再按公式（12）、（13）、（14）計算改正数 V_i。

由上所述两組平差方法的計算程序如下：

1. 立出全部条件方程式，加以分組。并計算各个不符值 w。
2. 解第一組条件方程式，求出第一次改正值 V_i'。
3. 用公式（16）、（17）确定 ρ 值，此时第二組包括有多少个方程式，就要解算多少个，而各类似的方程式系，祇是自由項不同而已。
4. 用公式（4）、（6）求出改化后的第二組方程式的各个系数值，并解其法方程式，求第二次改正数 V_i''。

5. 計算整个改正数：$V_i = V_i' + V_i''$。

6. 算出平差值。

7. 最后的检驗。

§3. 問題的簡化，逐次改化条件方程式求解的理論

我們知道两組平差法的演算过程，甚至比一併平差还更繁重和費力。它衹是在按一定的規則将条件方程式分組时，才能收到簡化計算工作的实效。逐一分組平差法，首先就是利用逐次改化条件方程式系数的方法，使第一組的条件，所屬法方程式的非自乘系数，始終为零，来簡化分組解算过程。計算原理如下：

設有个条件方程式：

$$\left.\begin{aligned}
&a_1V_1+a_2V_2+\cdots\cdots+a_nV_n+w_a=0 \quad (a)\\
&b_1V_1+b_2V_2+\cdots\cdots+b_nV_n+w_b=0 \quad (b)\\
&c_1V_1+c_2V_2+\cdots\cdots+c_nV_n+w_c=0 \quad (c)\\
&d_1V_1+d_2V_2+\cdots\cdots+d_nV_n+w_d=0 \quad (d)\\
&e_1V_1+e_2V_2+\cdots\cdots+e_nV_n+w_e=0 \quad (e)\\
&f_1V_1+f_2V_2+\cdots\cdots+f_nV_n+w_f=0 \quad (f)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&i_1V_1+i_2V_2+\cdots\cdots+i_nV_n+W_i=0 \quad (i)
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

并設 $[ab]=[ac]=[ad]=[bc]=[bd]=[cd]=0$，故将前四个方程式列为第一組，并分別乘以不定乘数 ρ_{ae}、ρ_{be}、ρ_{ce} 及 ρ_{de}，加到第五个方程式中，結果得到（E）式，

$$E_1V_1+E_2V_2+\cdots\cdots+E_nV_n+W_E=0 \tag{E}$$

此处

$$\left.\begin{aligned}
E_i&=a_i\rho_{ae}+b_i\rho_{be}+c_i\rho_{ce}+d_i\rho_{de}+e_i\\
W_E&=w_a\rho_{ae}+w_b\rho_{be}+w_c\rho_{ce}+w_d\rho_{de}+w_e
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

使 $$[aE]=[bE]=[cE]=[dE]=0$$

則

$$\begin{aligned}
[aE]&=[aa]\rho_{ae}+[ab]\rho_{be}+[ac]\rho_{ce}+[ad]\rho_{de}+[ae]=0\\
[bE]&=[ab]\rho_{ae}+[bb]\rho_{be}+[bc]\rho_{ce}+[bd]\rho_{de}+[be]=0\\
[cE]&=[ac]\rho_{ae}+[bc]\rho_{be}+[cc]\rho_{ce}+[cd]\rho_{de}+[ce]=0\\
[dE]&=[ad]\rho_{ae}+[bd]\rho_{be}+[cd]\rho_{ce}+[dd]\rho_{de}+[de]=0
\end{aligned}$$

又因第一組各方程式內

$$[ab]=[ac]=[ad]=[bc]=[bd]=[cd]=0$$

所以

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_{ae}=-[ae]/[aa],\quad \rho_{be}=-[be]/[bb]\\
&\rho_{ce}=-[ae]/[cc],\quad \rho_{de}=-[de]/[dd]
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

由（20）式可求出不定乘数 ρ_{ae}、ρ_{be}、ρ_{ce}、ρ_{de} 之值将其代入（19）式即可得出（E）式。根据前四个条件方程式及改化后的（E）式，得到下式：

$$\begin{aligned}
&a_1V_1+a_2V_2+\cdots\cdots+a_nV_n+w_a=0\\
&b_1V_1+b_2V_2+\cdots\cdots+b_nV_n+w_b=0
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}c_1V_1+c_2V_2+\cdots\cdots+c_nV_n+w_c\\ d_1V_1+d_2V_2+\cdots\cdots+d_nV_n+w_d\\ E_1V_1+E_2V_2+\cdots\cdots+E_nV_n+W_E\end{array}\right\}\tag{21}$$

其法方程式列成如下形式

$$\begin{array}{l}[aa]K_a+w_a=0\\ [bb]K_b+w_b=0\\ [cc]K_c+w_c=0\\ [dd]K_d+w_d=0\\ [EE]K_E+W_E=0\end{array}$$

所以

$$\left.\begin{array}{l}Ka=-w_a/[aa],\quad K_b=-w_b/[bb]\\ K_c=-w_c/[cc],\quad K_d=-w_d/[dd]\\ K_E=-W_E/[EE]\end{array}\right\}\tag{22}$$

而

$$\left.\begin{array}{l}V_1=a_1K_a+b_1K_b+c_1K_c+d_1K_d+E_1K_E\\ V_2=a_2K_a+b_2K_b+c_2K_c+d_2K_d+E_2K_E\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ V_n=a_nK_a+b_nK_b+c_nK_c+d_nK_d+E_nK_E\end{array}\right\}\tag{23}$$

再以 (21) 式为第一組（此时 $[ab]=[ac]=[ad]=[bc]=[bd]=[cd]=[aE]=[bE]=[cE]=[dE]=0$），分別乘以不定乘数 ρ_{af}、ρ_{bf}、ρ_{cf}、ρ_{df}、ρ_{Ef}，将其加到 (f) 式后可得：

$$F_1V_1+F_2V_2+\cdots\cdots+F_nV_n+W_F=0\tag{F}$$

此处

$$\left.\begin{array}{l}F_i=a_i\rho_{af}+b_i\rho_{bf}+c_i\rho_{cf}+d_i\rho_{df}+E_i\rho_Ef+f_i\\ W_F=w_a\rho_{af}+w_b\rho_{bf}+w_c\rho_{cf}+w_d\rho_{df}+W_E\rho_{Ef}+w_f\end{array}\right\}\tag{24}$$

令 $[aF]=[bF]=[cF]=[dF]=[EF]=0$

则

$$\begin{array}{l}\rho_{af}=-[af]/[aa],\quad \rho_{bf}=-[bf]/[bb],\\ \rho_{cf}=-[cf]/[cc],\quad \rho_{df}=-[df]/[dd],\\ \rho_{Ef}=-[Ef]/[EE]\end{array}$$

求出各不定乘数，代入 (24) 式，便可得出 (F) 式，而 $K_F=-W_F/[FF]$，且

$$V_i=a_iK_a+b_iK_b+c_iK_c+d_iK_d+E_iK_E+F_iK_F$$

再将 (F) 式併入 (21) 式，繼續去改化 (9) 式，依此类推，逐一进行，至最后一条件方程式改化完毕为止，这就是逐一分組平差法。

以逐一分組平差法解各組方程式的結果，是和用最小二乘法一併解算所有方程式的結果完全一致的。这个方法使得分組改化过程变得单純和簡捷，又使得改化后的方程式系，其法方程式的形式也很簡单。但是如果需要逐一改化的次数太多时，就需直接改化法方程式，因为逐一分組改化誤差方程式的規則，同样适用于改化法方程式[⑬]，但这就不便于初学者掌握，可是，实际上，适当的分区分組后再逐一分組平差，計算工作量就不会太多，因

[⑬] §5. 改化計算中的第 4 項驗算規則

$[EE]=[ee]+[ae]\rho_{ae}+[be]\rho_{be}+[ce]\rho_{ce}+[de]\rho_{de}$

此本書仍以改化誤差方程式为主要方法。

§4. 不等精度观测的逐一分組平差法

前面所講的是等精度观测的情况，但如为不等精度观测时，則前面供等精度观测所列的逐一分組平差公式，就要作相应的改变，茲将不等精度观测的逐一分組平差計算原理叙述于后。設(18)式各条件方程为：

$$\left.\begin{array}{r} a_1V_1+a_2V_2+\cdots\cdots+a_nV_n+w_a=0\\ b_1V_1+b_2V_2+\cdots\cdots+b_nV_n+w_b=0\\ c_1V_1+c_2V_2+\cdots\cdots+c_nV_n+w_c=0\\ d_1V_1+d_2V_2+\cdots\cdots+d_nV_n+w_d=0\\ e_1V_1+e_2V_2+\cdots\cdots+e_nV_n+w_e=0\\ f_1V_1+f_2V_2+\cdots\cdots+f_nV_n+w_f=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ i_1V_1+i_2V_2+\cdots\cdots+i_nV_n+w_i=0 \end{array}\right\} \quad (18)$$

各个观测值的权倒数以 $q_i(=\frac{1}{P_i})$ 表示。此时选择作第一組的条件方程式，同样要使其所屬法方程式的系数，除主对角綫的系数外，其余均等于零，茲設其中前面四个条件方程式合于这个条件时，

則

$$\left.\begin{array}{r} a_1V_1+a_2V_2+\cdots\cdots+a_nV_n+w_a=0\\ b_1V_1+b_2V_2+\cdots\cdots+b_nV_n+w_b=0\\ c_1V_1+c_2V_2+\cdots\cdots+c_nV_n+w_c=0\\ d_1V_1+d_2V_2+\cdots\cdots+d_nV_n+w_d=0 \end{array}\right\} \quad (25)$$

即得：
$$[qab]=[qac]=[qad]=[qbc]=[qbd]=[qcd]=0$$

用 (25) 式分别乘以不定乘数 ρ_{ae}、ρ_{be}、ρ_{ce}、ρ_{de} 以改化第五个条件方程式，使 e_i 为 E_i。

此时：
$$E_i=a_i\rho_{ae}+b_i\rho_{be}+c_i\rho_{ce}+d_i\rho_{de}+e_i \quad (E)$$

并利用 ρ 的不定性使

$$[qaE]=[qbE]=[qcE]=[qdE]=0$$

而
$$\begin{array}{l} [qaE]=[qaa]\rho_{ae}+[qab]\rho_{be}+[qac]\rho_{ce}+[qad]\rho_{de}+[qae]=0\\ [qbE]=[qab]\rho_{ae}+[qbb]\rho_{be}+[qbc]\rho_{ce}+[qbd]\rho_{de}+[qbe]=0\\ [qcE]=[qac]\rho_{ae}+[qbc]\rho_{be}+[qcc]\rho_{ce}+[qcd]\rho_{de}+[qce]=0\\ [qdE]=[qad]\rho_{ae}+[qbd]\rho_{be}+[qcd]\rho_{ce}+[qdd]\rho_{de}+[qde]=0 \end{array}$$

故得：
$$\left.\begin{array}{l} [qaa]\rho_{ae}+[qae]=0,\ \ \rho_{ae}=-[qae]/[qaa]\\ [qbb]\rho_{be}+[qbe]=0,\ \ \rho_{be}=-[qbe]/[qbb]\\ [qcc]\rho_{ce}+[qce]=0,\ \ \rho_{ce}=-[qce]/[qcc]\\ [qdd]\rho_{de}+[qde]=0,\ \ \rho_{de}=-[qde]/[qdd] \end{array}\right\} \quad (26)$$

則改化后的（E）式，連同前面四个方程式可成：

$$\begin{array}{r} a_1V_1+a_2V_2+\cdots\cdots+a_nV_n+w_a=0\\ b_1V_1+b_2V_2+\cdots\cdots+b_nV_n+w_b=0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1V_1+c_2V_2+\cdots\cdots+c_nV_n+w_c=0 \\ d_1V_1+d_2V_2+\cdots\cdots+d_nV_n+w_d=0 \\ E_1V_1+E_2V_2+\cdots\cdots+E_nV_n+w_E=0 \end{array}\right\} \tag{27}$$

（其中 $W_E=w_a\rho_{ae}+w_b\rho_{be}+w_c\rho_{ce}+w_d\rho_{de}+w_e$）其相应的法方程式，由于 $[qab]=[qac]=\cdots\cdots=[qdE]=0$ 因此变得很簡单，即：

$$[qaa]K_a+w_a=0,\quad [qbb]K_b+w_b=0$$
$$[qcc]K_c+w_c=0,\quad [qdd]K_d+w_d=0$$
$$[qEE]K_E+W_E=0$$

故

$$\left.\begin{array}{ll} K_a=-w_a/[qaa] & K_b=-w_b/[qbb] \\ K_c=-w_c/[qcc] & K_d=-w_d[qdd] \\ K_E=-W_E/[qEE] & \end{array}\right\} \tag{28}$$

改正数

$$V_i=V_{a_i}+V_{b_i}+V_{c_i}+V_{d_i}+V_{E_i}+\cdots\cdots+V_{I_i} \tag{29}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} V_{a_i}=q_ia_iK_a \\ V_{b_i}=q_ib_iK_b \\ V_{c_i}=q_ic_iK_c \\ V_{d_i}=q_id_iK_d \\ V_{E_i}=q_iE_iK_E \end{array}\right\} \tag{30}$$

再以（27）式为第一組，分别乘以不定乘数 ρ_{af}、ρ_{bf}、ρ_{cf}、ρ_{df}、ρ_{Ef}，再加到（f）式中，則得：

$$F_1V_1+F_2V_2+\cdots\cdots+F_nV_n+W_F=0 \tag{F}$$

此处

$$\left.\begin{array}{l} F_i=a_i\rho_{af}+b_i\rho_{bf}+c_i\rho_{cf}+d_i\rho_{df}+E_i\rho_{Ef}+f_i \\ W_F=w_a\rho_{af}+w_b\rho_{bf}+w_c\rho_{cf}+w_d\rho_{df}+W_E\rho_{Ef}+w_f \end{array}\right\} \tag{31}$$

同理使 $[qaF]=[qbF]=[qcF]=[qdF]=[qEF]=0$

則

$$\rho_{af}=-[qaf]/[qaa] \qquad \rho_{bf}=-[qbf]/[qbb]$$
$$\rho_{cf}=-[qcf]/[qcc] \qquad \rho_{df}=-[qdf]/[qdd]$$
$$\rho_{Ef}=-[qEf]/[qEE]$$

求出各不定乘数后代入（31）式，即可得到（F）式，而

$$K_F=-W_F/[qFF]$$
$$V_{F_i}=q_iF_iK_F$$

余类推，即可繼續改化。以上（26）（28）（29）（30）（31）等公式适用于不等精度观測逐一分組平差。

§5. 平差値函数权的确定

設已知平差値的函数

$$\phi_f=\phi(l_1+V_1,\ l_2+V_2\cdots\cdots l_n+V_n)$$

此处 l_1，$l_2\cdots\cdots$，l_n 为观測值，其中誤差分别等于 m_1，$m_2\cdots\cdots$，m_n，其权为 P_1，P_2，$\cdots\cdots P_n$。

现求平差值函数的权 P_f。

上式依泰勒定理展开为級数，并且祇取一次导数和改正值 V 的一次項，則得：

$$\Phi_f = \Phi(l_1, l_2\cdots\cdots, l_n) + f_1V_1 + f_2V_2 + \cdots\cdots + f_nV_n$$

此处
$$f_i = \frac{\partial\Phi(l_1, l_2\cdots\cdots, l_n)}{\partial l_i}$$

如果观測值所組成的条件方程式系，經改化后即可成为下式

$$\left.\begin{aligned} a_1V_1 + a_2V_2 + \cdots\cdots + a_nV_n + w_a = 0 \\ b_1V_1 + b_2V_2 + \cdots\cdots + b_nV_n + w_b = 0 \\ c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots\cdots + c_nV_n + w_c = 0 \\ d_1V_1 + d_2V_2 + \cdots\cdots + d_nV_n + w_d = 0 \\ E_1V_1 + E_2V_2 + \cdots\cdots + E_nV_n + W_E = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_1V_1 + I_2V_2 + \cdots\cdots + I_nV_n + W_I = 0 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

其中 ⋯⋯（I）为按逐一分組平差方法改化后的条件方程式。

則
$$V_i = V_{a_i} + V_{b_i} + \cdots\cdots + V_{I_i}$$

又因：
$$V_{a_i} = a_iK_a = -a_i\frac{w_a}{[aa]}$$

$$V_{b_i} = b_iK_b = -b_i\frac{w_b}{[bb]}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_{I_i} = I_iK_I = -I_i\frac{W_I}{[II]}$$

所以

$$\begin{aligned}\Phi_f = \Phi(l_1, l_2, \cdots\cdots l_n) & - f_1\left(a_1\frac{w_a}{[aa]} + b_1\frac{w_b}{[bb]} + \cdots + I_1\frac{W_I}{[II]}\right) \\ & - f_2\left(a_2\frac{w_a}{[aa]} + b_2\frac{w_b}{[bb]} + \cdots + I_2\frac{W_I}{[II]}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - f_n\left(a_n\frac{w_a}{[aa]} + b_n\frac{w_b}{[bb]} + \cdots + I_n\frac{W_I}{[II]}\right)\end{aligned}$$

依 a_i，b_i，⋯⋯I_i 之同类項归併，則：

$$\Phi_f = \Phi(l_1, l_2, \cdots l_n) - \left\{[af]\frac{w_a}{[aa]} + [bf]\frac{w_b}{[bb]} + \cdots\cdots + [If]\frac{W_I}{[II]}\right\}$$

我們知道，如果将（f）式

$$f_1V_1 + f_2V_2 + \cdots\cdots + f_nV_n + w_f = 0 \tag{f}$$

放在（35）式后面，按逐一分組改化系数的規則改化时，則因

$$\rho_{af} = -[af]/[aa]$$
$$\rho_{bf} = -[bf]/[bb]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_{If}=-[If]/[II]$$

所以

$$\phi_f=\phi(l_1,\ l_2,\ \cdots\cdots,\ l_n)+w_a\rho_{af}+w_b\rho_{bf}+\cdots\cdots+W_I\rho_{If}$$

现在求 ϕ_f 对于 l_i 的偏导数

$$\frac{\partial\phi_f}{\partial l_i}=\frac{\partial\phi(l_1,\ l_2,\ \cdots l_n)}{\partial l_i}+\frac{\partial w_a}{\partial l_i}\rho_{af}+\frac{\partial w_b}{\partial l_i}\rho_{bf}+\cdots+\frac{\partial W_I}{\partial l_i}\rho_{If} \tag{36}$$

因为 $F_a(l_1+V_1,\ l_2+V_2,\ \cdots\cdots,\ l_n+V_n)=0$

$F_a(l_1,\ l_2\cdots\cdots,\ l_n)=w_a$

所以

$$\frac{\partial w_a}{\partial l_i}=\frac{\partial F_a}{\partial l_i}=a_i$$

同理

$$\frac{\partial w_b}{\partial l_i}=b_i\quad \frac{\partial w_c}{\partial l_i}=c_i\quad \frac{\partial w_d}{\partial l_i}=d_i$$

而

$$W_E=w_e+w_a\rho_{ae}+w_b\rho_{be}+w_c\rho_{ce}+w_d\rho_{de} \tag{19}$$

$$\frac{\partial W_E}{\partial l_i}=\frac{\partial w_e}{\partial l_i}+\frac{\partial w_a}{\partial l_i}\rho_{ae}+\frac{\partial w_b}{\partial l_i}\rho_{be}+\frac{\partial w_c}{\partial l_i}\rho_{ce}+\frac{\partial w_d}{\partial l_i}\rho_{de}$$

$$=e_i+a_i\rho_{ae}+b_i\rho_{be}+c_i\rho_{ce}+d_i\rho_{de}$$

$$=E_i \tag{19}$$

同理

$$\frac{\partial W_I}{\partial l_i}=I_i\quad 又\ \frac{\partial\phi(l_1,\ l_2,\ \cdots l_n)}{\partial l_i}=f_i$$

所以（36）式为

$$\frac{\partial\phi_f}{\partial l_i}=f_i+a_i\rho_{af}+b_i\rho_{bf}+\cdots\cdots+I_i\rho_{If}$$

$$=F_i$$

此处 F_i 为（f）式改化后的系数。而平差值函数的权为 P_f 时，

$$\left[\left(\frac{\partial\phi_f}{\partial l_i}\right)^2\right]=\frac{1}{P_f}$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{P_f}=[FF] \tag{37}$$

因此在逐一分組平差时，将函数式（f）最后改化。其改化系数之平方和 $[FF]$ 即为平差值函数的权倒数。

而平差值函数的中誤差为

$$m_F=\mu\sqrt{[FF]}。 \tag{38}$$

其中 μ—单位权的中誤差，可由下式确定

$$\mu=\sqrt{\frac{[VV]}{r}} \tag{39}$$

式中 r—条件方程式的个数。

在不等精度观测时

$$\frac{1}{P_f}=[qFF] \tag{40}$$

$$m_F=\mu\sqrt{[qFF]} \tag{41}$$

$$\mu=\sqrt{\frac{[PVV]}{r}} \tag{42}$$

其中 q 为观测值的权倒数，P 为权观测值的权。

§6. 改化計算中之各項驗算

各項驗算，茲以（E）式之改化为例，說明如下：

1. 不定乘数 ρ_{ae}，ρ_{be}，ρ_{ce}，ρ_{de} 等。

应該采取对算，或者重复計算一次，防止錯誤。

2. E_i 值

(1) 由于 $[aE]=[bE]=[cE]=[dE]=0$

所以在角度平差时，按每个三角形 $[E]=0$

(2) 由于对于組成角度的左右方向，其改正数应該是大小相等，符号相反的。所以在方向平差时，按每站 $[E]=0$

(3) 根据改化后系数算得的改正值，对于以前之各个条件方程式仍能符合。

所以在按方向平差时，对应前面图形条件系数 $+1$ 的，与对应 -1 的各个 E_i 值，其代数和的大小、和符号都应相等。例如：

图形条件：(a) 的各个系数 $a_1=-1$，$a_2=+1$，$a_4=+1$，$a_5=-1$时，则 $E_1+E_5=E_2+E_4$。(b) 的各个系数 $b_2=+1$，$b_3=-1$，$b_5=-1$，$b_6=+1$ 时，则E_2+E_6 又应等于 E_3+E_5，余类推。在角度平差时則对应条件系数之 E_i 之和$=0$。

因为 E_i 必須滿足以上所述各种关系，所以如果 ρ 値錯誤或則 E_i 値計算錯誤，都容易分析追寻加以更正，并且我們亦可以利用多余的驗算关系（3）直接求出部分 E_i 値，如算出 E_1，E_2，E_4，再根据 $E_1+E_5=E_2+E_4$，代入各値，求出 E_5。

3. $[eE]=[EE]$

由于 $E_i=e_i+a_i\rho_{ae}+b_i\rho_{be}+c_i\rho_{ce}+d_i\rho_{de}$

上式各乘以 E_i，

$$E_iE_i=e_iE_i+a_iE_i\rho_{ae}+b_iE_i\rho_{be}+c_iE_i\rho_{ce}+d_iE_i\rho_{de}$$

求其总和，

$$[EE]=[eE]+[aE]\rho_{ae}+[bE]\rho_{be}+[cE]\rho_{ce}+[dE]\rho_{de}$$

因 $$[aE]=[bE]=[cE]=[dE]=0$$

所以 $$[EE]=[eE]$$

4. $[EE]=[ee]+[ae]\rho_{ae}+[be]\rho_{be}+[ce]\rho_{ce}+[de]\rho_{de}$[1]

由于 $E_i=e_i+a_i\rho_{ae}+b_i\rho_{be}+c_i\rho_{ce}+d_i\rho_{de}$

上式分別乘以 e_i，則得

$$e_iE_i=e_ie_i+a_ie_i\rho_{ae}+b_ie_i\rho_{be}+c_ie_i\rho_{ce}+d_ie_i\rho_{de}$$

求其总和；

$$[eE]=[ee]+[ae]\rho_{ae}+[be]\rho_{be}+[ce]\rho_{ce}+[de]\rho_{de}$$

---

[1] 此驗算方法适用于計算函数权 $\frac{1}{P}=[FF]$