

全国中小学教师继续教育

教材

中学数学现代基础

唐复苏 鲍建生 著

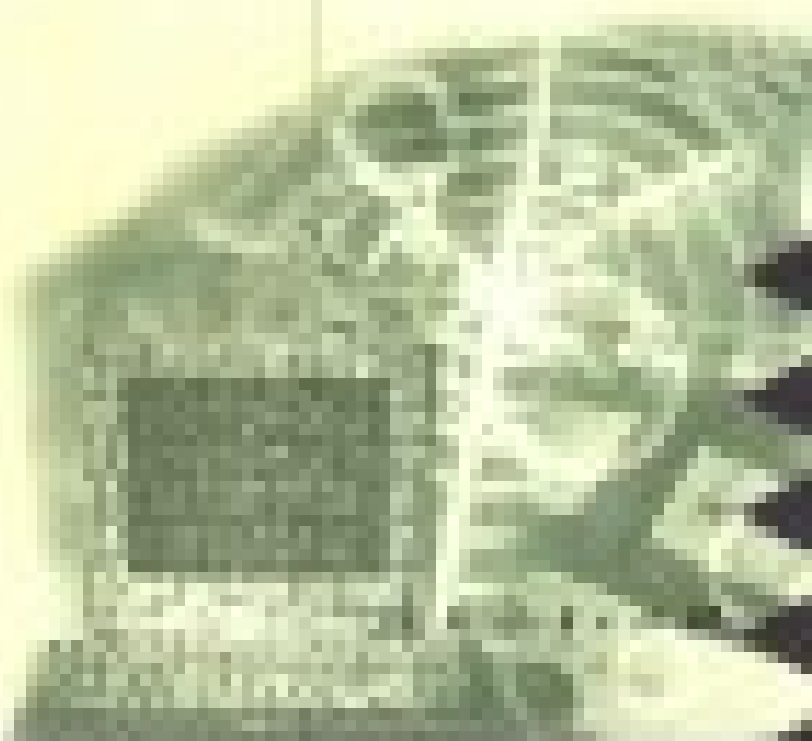
教育部师范教育司 组织评审

人民教育出版社

中学数学现代基础

李士海 编著

人民教育出版社



全国中小学教师继续教育教材

中学数学现代基础

唐复苏 鲍建生 著

教育部师范教育司 组织评审

人民教育出版社

全国中小学教师继续教育教材

中学数学现代基础

唐复苏 鲍建生 著

人民教育出版社 出版发行

(北京沙滩后街 55 号 邮编: 100009)

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销

开本: 890 毫米×1 240 毫米 1/32 印张: 7.25 字数: 180 000

2001 年 6 月第 1 版 2001 年 11 月第 1 次印刷

印数: 0 001—3 000

ISBN 7-107-14110-4 定价: 10.80 元
G·7202 (课)

如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与出版社联系调换。

(联系地址: 北京市方庄小区芳城园三区 13 号楼 邮编: 100078)

前 言

全面推进素质教育,是当前我国现代化建设的一项紧迫任务,是我国教育事业的一场深刻变革,是教育思想和人才培养模式的重大进步.实施“中小学教师继续教育工程”,提高教师素质,是全面推进素质教育的根本保证.

开展中小学教师继续教育,课程教材建设是关键.当务之急是设计一系列适合中小学各学科教师继续教育急需的示范性课程,编写一批继续教育教材.在教材编写方面,我司采取了以下几种做法:

1. 组织专家对全国各省(自治区、直辖市)推荐的中小学教师继续教育教材进行评审,筛选出了200余种可供教师学习使用的优秀教材和学习参考书.

2. 组织专门的编写队伍,编写了61种教材,包括中小学思想政治、教育法规、教育理论、教育技术等公共必修课教材;中小学语文、数学,中学英语、物理、化学、生物,小学社会、自然等学科专业教材.上述教材,已经在1999年底以《全国中小学教师继续教育1999年推荐用书目录》(教师司[1999]60号)的形式向全国推荐.

3. 向全国40余家出版社进行招标,组织有关专家对出版社投标的教材编写大纲进行认真的评审和筛选,初步确定了200余种中小学教师继续教育教材,这批教材,目前正在编写过程中,将于2001年上半年陆续出版.我们将陆续向全国教师进修院校、教师培训基地和中小学教师推荐,供开设中小学教师继续教育相关课程时选用.

在选择、设计和编写中小学教师继续教育教材过程中,我们遵循了以下原则:

1. 从教师可持续发展和终身学习的战略高度,在课程体系中,

加强了反映现代教育思想、现代科学技术发展和应用的课程。

2. 将教育理论和教师教育实践经验密切结合,用现代教育理论和方法、优秀课堂教学范例,从理论和实践两个方面,总结教学经验,帮助教师提高实施素质教育的能力和水平。

3. 强调教材内容的科学性、先进性、针对性和实效性,并兼顾几方面的高度统一。从教师的实际需要出发,提高培训质量。

4. 注意反映基础教育课程改革的新思想和新要求,以使教师尽快适应改革的需要。

中小学教师继续教育教材建设是一项系统工程,尚处在起步阶段,缺乏足够的经验,肯定存在许多问题。各地在使用教材的过程中,有什么问题和建议,请及时告诉我们,以便改进工作,不断加强和完善中小学教师继续教育教材体系建设。

教育部师范教育司

二〇〇〇年十一月一日

编 者 的 话

为了配合国家教育部师范教育司组织实施的《中小学教师继续教育工程》，提高中学数学教师的思想业务素质和教学能力，我会受人民教育出版社的委托，组织编写了供中学数学教师继续教育使用的教材，并成立了中学数学教师继续教育教材编委会，由方明一、孙瑞清、关成志、陈宏伯、肖柏荣、唐复苏、章建跃、曹福海等8人（按姓氏笔划为序）组成，陈宏伯主持编委会工作。

我们在组织编写供中学数学教师继续教育使用的教材时，根据师范教育司提出的编写原则和教育部新修订的数学教学大纲，努力体现国家的教育方针，从教师可持续发展和终身学习的高度出发，力求反映现代教育思想和现代数学的发展，突出时代性、科学性；注意将教育理论和教师教学实践结合起来，努力反映新的数学研究成果，帮助教师从理论和实践两方面，提高思想业务素质和教学能力，突出先进性、实践性；注意从中级、初级数学教师的实际出发，帮助教师用先进教学理论和优秀课堂实例，总结教学实践经验，突出针对性、可操作性。

本书为《中学数学现代基础》，主编为唐复苏，由唐复苏、鲍建生著，本书通过简要介绍并适当补充与中学数学有密切联系的现代数学内容，用较高的观点研究中学数学，分析研究中学数学的重要概念、思想和方法，研究现代数学与中学数学的联系，从而使读者能居高临下、深入浅出地理解和处理中学数学教材和教法。本书根据继续教育的特点，力求从特殊到一般，从具体到抽象，密切联系中学数学实际，对有关内容尽可能将现代数学的处理方法与传统中学数学的处理方法进行对照和评析，使读者能用扎实的数学知识和正确的数

学观念投入到数学改革和教学中.全书包括9章:数学概观、集合、对应与关系、结构、数系与代数、映射与结构.向量、几何变换、拓扑.第一章到第六章由唐复苏编写,第七章到第九章由鲍建生编写.

我们在编写这本继续教育教材时,师范教育司邀请一些专家对编写大纲和书稿提了很多宝贵意见,在此向他们表示谢意!人民教育出版社的同志更为这些书的编辑、出版做了大量工作,在此一并表示谢意.

鉴于我们编写这类继续教育教材缺乏经验,且水平有限,敬请广大读者多提宝贵意见.

中国教育学会中学数学教学专业委员会

2001年5月25日

目 录

第一章 数学概观	1
§ 1.1 数学的历史发展	2
§ 1.2 现代数学	4
§ 1.3 现代数学对中学数学教育的影响	12
第二章 集合	15
§ 2.1 集合及其有关概念	15
§ 2.2 集合的运算——交、并、补	17
§ 2.3 有限集的计数和包含容斥原理	19
§ 2.4 幂集和笛卡儿积	22
§ 2.5 集合论在中学数学中的作用	29
§ 2.6 从朴素集合论到公理集合论	35
第三章 对应与关系	42
§ 3.1 对应	42
§ 3.2 映射的概念	48
§ 3.3 关系	54
§ 3.4 等价关系	58
§ 3.5 等同抽象及一些新概念的建立	64
§ 3.6 序关系	68
第四章 结构	75
§ 4.1 集合的等级表	75
§ 4.2 数学对象的集合论构造	76
§ 4.3 结构和结构种类	80
第五章 数系与代数	86

§ 5.1 有关代数的几个概念	86
§ 5.2 自然数	90
§ 5.3 整数环和有理数域	98
§ 5.4 布尔代数	105
第六章 映射与结构	113
§ 6.1 映射的集合	113
§ 6.2 映射与结构	117
§ 6.3 初等函数	126
§ 6.4 排列组合与有限集的映射	137
第七章 向量	143
§ 7.1 向量空间	144
§ 7.2 韦尔的公理体系	148
§ 7.3 在韦尔公理体系下重建欧氏几何	150
§ 7.4 向量在中学几何中的应用	158
第八章 几何变换	173
§ 8.1 变换的体系	173
§ 8.2 仿射变换	174
§ 8.3 初等几何变换	188
§ 8.4 变换群与几何学的统一	202
第九章 拓扑	205
§ 9.1 拓扑空间	205
§ 9.2 连续映射和同胚映射	208
§ 9.3 拓扑思想的简单应用	212
§ 9.4 介值定理和区间法解不等式	217
参考文献	222

第一章 数学概观

树立正确的数学观,是数学教育的一项重要任务.作为一名数学教师,一个数学工作者,更应该树立正确的数学观.数学的研究对象是什么?数学的特征有哪些?数学的思想和方法的精髓是什么?等等问题摆在我们面前.

100年前,恩格斯在其著名的《反杜林论》^①中提出了一个著名的论断:“纯数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系,所以是非常现实的材料.”这个提法客观地反映了19世纪之前两千多年中数学的产生和发展的历史.从19世纪20年代开始,数学发生了划时代的变化.由于现代数学的产生和发展,人们对数学的认识发生了深刻的变化.为此,我们拟通过数学的历史发展来认识数学的研究对象和特征,特别是认识现代数学的产生和发展带来了哪些深刻的变化,从而更好地理解现代数学的特征,树立正确的数学观念.

同时,中学数学的内容,大多取自数学的各个分支,它们是在几千年的历史期间产生和发展起来的.数学的发展,必然对数学教学及其改革产生深刻的影响,这也需要我们正确认识当代数学的特点和发展趋向,从而把握数学教育改革的方向.

^① 恩格斯.《反杜林论》(中译本)第35页.北京:人民出版社,1970年第1版.

§ 1.1 数学的历史发展

数学的历史发展,大致可分为四个基本时期:(1) 数学的萌芽;(2) 常量数学;(3) 变量数学;(4) 现代数学. 每一时期的开始,都有着杰出的成果,标志着数学向新的状态质变.

为了认清数学特别是现代数学的由来和发展,更好地理解数学的对象和特征,这一节我们先对数学发展的前三个基本时期的特征和主要成果作简要的介绍,在下一节重点介绍现代数学的特征和主要成果.

1.1.1 数学的萌芽

数学的萌芽时期大致从远古时代开始到公元前 6 世纪前. 这是实际材料的积累时期. 在生活和生产实践中,例如丈量地段的面积,度量器皿的容积等,积累了较为丰富的经验材料,开始形成了诸如数、量、图形等简单的概念,得到了有关长度、面积和体积的一些计算公式. 但是,这时数学还没有形成演绎科学,主要的不是逻辑推理,大多来自经验,甚至有一些结果是不正确的.

1.1.2 常量数学

常量数学时期大致从公元前 6 世纪到公元 16 世纪,持续了二千多年,传统的初等数学(算术、初等代数、初等几何、三角)的绝大部分内容是这个时期的成果. 通常把常量数学又称为初等数学.

这一时期数学的主要特征是:产生和发展了关于“证明”的概念,使数学成为演绎科学.

常量数学的主要成果,它的产生和发展,按历史条件的不同,大致可分为三个阶段.

最早是在古希腊. 泰勒斯(Thales, 约公元前 625—前 546) 第一个在数学上应用证明方法, 他证明了一些简单的几何命题, 如等腰三角形的两底角相等, 对顶角相等, 全等三角形的一个判定定理等等.

毕达哥拉斯(Pythagoras, 约公元前 580—前 500) 发展并完善了证明的逻辑方法, 特别是他证明了勾股定理. 在勾股定理基础上发现了一个惊人的结果: 正方形的一边与它的对角线不可公度, 或者说单位正方形的对角线不能表示为两个整数之比(即不是有理数), 引起了第一次数学危机, 推动了以后数学的进一步发展.

特别值得一提的是欧几里得(Euclid, 约活动于公元前 300 年左右) 和他的《原本》. 欧几里得的《原本》是用公理化叙述数学科目的第一次尝试, 整部书一开始就明确提几个原始概念和公理, 有条不紊地用演绎方法推出一系列定理, 它在将数学形成一门理论科学中起着杰出的作用. 这部书是古希腊数学思维主要结果的综合和系统化, 在很长时间内成为知识的源泉和严格数学叙述的范例. 二千多年来, 全世界许多著名的几何教科书, 不过是欧几里得著作的通俗改写本而已.

后来, 数学研究的中心转移到了东方——印度、中国和阿拉伯. 创建了作为字母计算和解方程科学的代数学, 创建了解三角学. 中国在这段时间也作出了许多杰出的成果, 例如秦九韶的《数书九章》, 中国剩余定理, 祖冲之圆周率的计算, 沈括的隙垛术(高阶等差数列) 等.

到了 13 世纪, 数学研究在欧洲复兴. 在 16 世纪, 意大利数学家费罗(Ferro, 1465—1526)、塔塔利亚(Tartaglia, 1499—1557)、卡当(Cardano, 1501—1576)、费拉里(Ferrari, 1522—1565) 等导出了三次方程和四次方程的解的公式, 同时形成了代数表示的体系. 17 世纪, 在法国数学家韦达(Vieta, 1540—1603)、笛卡儿(Descartes, 1596—1650) 和英国数学家哈里奥特(Harriot, 1560—1621) 的著作中进一步发展了代数符号, 建立了字母计算的规则. 同时, 随着符号的发展出现了数的概念的推广: 在 16 世纪中期最终确立了负数, 接

着又出现了复数.

1.1.3 变量数学

变量数学时期大致从 17 世纪中叶到 19 世纪 20 年代. 这一时期数学的特征在于研究变数以及变数之间的关系, 对此, 恩格斯曾作出如下清楚的刻画:

“数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数, 运动进入了数学, 有了变数, 辩证法进入了数学, 有了变数, 微分和积分也就立刻成为必要的了, 而它们也就立刻产生, 并且是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的, 但不是由他们发明的.”^①

这一时期的主要成果, 一是笛卡儿引进了变数, 并开始用代数方法解决几何问题, 建立了解析几何; 二是莱布尼兹 (Leibniz, 1646—1716) 给出了一般的函数概念; 三是牛顿 (Newton, 1643—1727) 和莱布尼兹创立了微积分学的原理. 他们和他们的学生发展了数学分析的工具, 成为解决力学与流体动力学、天文学与光学问题的主要武器, 哈雷彗星在 1759 年回归的预言是数学分析方法的胜利. 此外, 从 18 到 19 世纪这一百年间, 还研究了偏微分方程, 创立了变分学, 并且产生和发展了概率论.

§ 1.2 现代数学

从 19 世纪 20 年代开始, 数学的发展进入了一个新的时期——现代数学时期. 从上面的介绍我们可以看到, 数学发展的前三个时期有一个共同特征, 它们都是直接反映现实世界的. 现代数学时期的数

^① 恩格斯.《自然辩证法》(中译本)第 236 页. 北京:人民出版社, 1971 年第 1 版.

学发展,则出现了新的飞跃.

一方面,纯粹数学的研究发生了深刻的变化;另一方面是由于电子计算机的产生和发展,使数学的应用领域大大扩充.

这一时期的数学,取得了极其丰富的划时代的成果.我们不妨从这两个方面,通过一些有代表性的成果,来具体地体验和领会现代数学的特征,看一看数学的观念发生了哪些变化.

1.2.1 纯粹数学的深刻变化

现代数学的产生,使数学的研究对象大大扩充,抽象程度大大提高.要研究任意对象之间的抽象关系,研究集合、结构.研究方法发生了根本的变革,公理化方法走上了数学的舞台.同时,数学的各个分支(如代数、几何、分析等)之间相互交融,数学逐步走向统一化.

下面我们几个有代表性的成果为例,说明这些特征.

1.2.1.1 非欧几何的产生

对欧几里得第五公设的研究,经历了将近二千年.欧几里得第五公设(即平行公理) V 是:“过直线外一点有且仅有一条直线与已知直线平行”,由于它在陈述上的复杂和累赘,古代学者们怀疑它是否是多余的,它是否可以从其他的公理、公设中逻辑地给予证明(用现代的话来说,即这条公理是否与其他公理独立)?许许多多学者纷纷致力于证明这个第五公设,为之花费了大量的心血,经历了无数的曲折艰辛,结果都没有成功.基于两千多年来在证明第五公设的征途上屡遭惨败的教训,19世纪20年代,俄国数学家罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский, 1792—1856)产生了与前人不同的信念:他认为欧几里得第五公设是不能用其余公理证明出来的,并用独特的方法给予解决.他引进了一个否定欧几里得第五公设的公理 V' :“过直线外一点至少有两条直线与已知直线平行”,并找出了这样的模型,在这个模型上,这个公理 V' 以及欧几里得的其他公理可以同时成立.这个事实表明,欧几里得的第五公设确实是不能用它的其他公理证

明出来的,用现代的话来说也就是:欧几里得的平行公理是与欧几里得的其他公理独立的.同时,将这条新的公理 V' 与欧几里得的其余公理合在一起,又得到了一种不同于欧几里得的新的几何体系——非欧几何.通常把上述新的几何称为罗巴切夫斯基几何.应当指出,匈牙利青年学者鲍耶(John Bolyai, 1802—1860)也独立地发现了这个新几何.

在罗巴切夫斯基建立了以他的名字命名的非欧几何之后,德国数学家黎曼(Riemann, 1826—1866)建立了另一种非欧几何.黎曼把欧几里得平行公理换成了这样的假设:过直线外一点没有与它平行的直线,即平面上任意两条直线必定相交.

非欧几何的产生,是对经典数学观念的第一次冲击,最重要的影响是迫使数学家从根本上改变了对数学性质的理解以及对数学与物质世界关系的认识,并引起了对于数学基础的研究.

非欧几何的建立也导致了公理化方法的产生.公理化方法成为一种重要的认识方法,并开始认识到,公理是一种假设,作为真理,并不需要由它的直观明显性来证明.问题在于借助于公理建立起来的模型在什么程度上与物质世界相符合.“数学家们不再主张公理是不证自明的,事实上一个公理系统的本质在逻辑上是十分独立于物理意义的,因而不会有不证自明的问题.”当然,这并不是说数学已经失去了它在研究物理世界的有用性.事实上,正是由于非欧几何在相对论和量子力学上的重要应用,才使这个理论得到发展和人们的承认.正如 H. 外尔(Weyl, 1885—1955)所说:“20 世纪数学的一个十分突出的方面是公理化方法所起的作用极度增长,公理化方法仅仅用来阐明我们所建立的理论的基础,而现在它却成为具体数学研究的工具.”

现代公理化方法的奠基人是德国数学家希尔伯特(David Hilbert, 1862—1943),他于 1899 年发表了《几何基础》,提出了第一个完备的公理系统.与以往相比,希尔伯特公理化方法具有两个本质

的飞跃.一方面,希尔伯特几何公理体系中的“点、线、面”这些术语,都是纯粹抽象的对象,而没有特定的具体内容.正如希尔伯特本人曾形象地解释的那样:不论是管这些对象叫点、线、面,还是叫桌子、椅子、啤酒杯,它们都可以成为这样的几何对象,对于它们而言,公理所表述的关系都成立.这就赋予了公理系统最大的一般性.当赋予这些抽象对象以具体内容时,就形成各种特殊的理论.另一方面,希尔伯特考察了各个公理之间的相互关系,明确提出了对公理系统的基本逻辑要求,即:相容性、独立性和完备性.因此,希尔伯特的公理化方法,不仅使几何学具备了严密的逻辑基础,而且逐步渗透到数学的其他领域,成为组织、综合数学知识并推动具体数学研究的强有力的工具.

1.2.1.2 抽象代数学的创立

代数学在最初的意义下是关于字母的计算、由字母构成的公式的变换以及解方程的科学,归根到底是研究数的运算的.到了19世纪,运算的概念有了推广,它不仅用于数,而且用于向量、四元数、矩阵、命题等等,即发展到要考察任意对象的运算;同时,运算也不再局限于通常的加、减、乘、除等,运算性质也不再限于原先所遵循的那些运算律(交换律、结合律、分配律等),即要研究任意对象的集合上的任意运算,所感兴趣的已不再是具体的运算,而是要研究各种类型的代数结构,例如群、环、域、格等.

在谈到抽象代数的时候,不能不提到哈密尔顿(William Rowan Hamilton, 1805—1865).哈密尔顿建立的四元数,被誉为是“代数的独立宣言”,人们常把哈密尔顿看作是近代“抽象代数”的创始人.哈密尔顿为复数提出了一种美妙的抽象结构,他把复数 $a+bi$ 看作一对有序实数 (a, b) ,并对这种复数定义了加法和乘法,并证明了这两种运算具有封闭性、交换律、结合律以及乘法关于加法的分配律.顺着用有序实数对定义复数的思想,他推广到有序的复数对 $(a+bi, c+di)$,并代之以由实数构成的四元数组 (a, b, c, d) ,发明了一种超