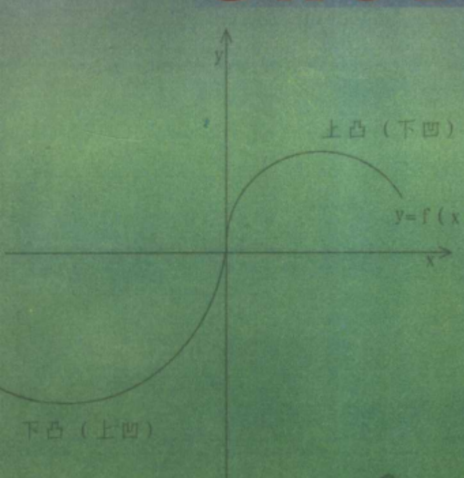
青海民族学院学术系列丛书之二十二

高等数学

GAODENG SHUXUE



主　编　　赵德让

副主编　　孙千高　郭子胥

$[\int f(x)dx]' = f(x)$, $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$

$\int F'(x)dx = F(x) + C$, $\int dF(x) = F(x) + C$

青海人民出版社

青海民族学院院长基金资助项目

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编　　赵德让
副主编　　孙千高　郭子胥
编　委　　（以姓氏笔画为序）
马登明　孙千高
吕盛梅　陈　忠
汪小玲　赵德让
郭子胥

青海人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/赵德让主编．—西宁：青海人民出版社，2005.9

ISBN 7－225－02690－9

Ⅰ．高…　Ⅱ．赵　Ⅲ．高等数学—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 106714 号

高 等 数 学

赵德让　主编

出　版
发　行：青海人民出版社（西宁市同仁路 10 号）
邮政编码 810001　总编室（0971）6143426
发行部（0971）6143516　6123221

印　刷：青海中山印刷厂

经　销：新华书店

开　本：787mm×1092mm　1/16

印　张：24.75

字　数：400 千

版　次：2005 年 9 月第 1 版

印　次：2005 年 9 月第 1 次印刷

印　数：1—1 200 册

书　号：ISBN 7－225－02690－9/G·1100

定　价：32.00 元

前　言

高等数学课程是理工类、经济管理类以及文科类专业的一门基础课，它在各学科中有着广泛的应用。

我们组织多年从事高等数学教学工作，并具有丰富教学经验的教师编写了这部符合西部地区培养规格、规律和教学实际要求的教材，它以理工科高等数学教学大纲为依据，兼顾经济管理类和文科类学科的专业要求。从学生的实际出发，力求起点适中，内容简明，条理清楚，逻辑性强。

本教材在保证全书的系统性、完整性和科学性的基础上，尽量做到深入浅出，突出了基本理论体系，加强了基本内容的训练，并且注意到理论与实践相结合，当前与未来相结合。

本教材可作为理工科、经济管理类、高职和专科类专业的教材，加星号“*”内容专用于理工科进一步学习高等数学的有关基础知识。本书同样也适用于文科类专业、电大、夜大、函授等方面的读者。

在本教材的编写工作中，第二章、第五章由孙千高执笔；第三章、第四章由马登明执笔；第六章、第十二章由赵德让执笔；第七章、第八章由郭子胥执笔；第九章由吕盛梅执笔；第十章由汪小玲执笔；第一章、第十一章由陈忠执笔。

本书的完成和高等数学教研室的全体教师的努力工作是分不开的，编写中得到了学院主要领导、数学系领导和学院教务处的大力支持，在此表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳切希望广大读者随时提出宝贵意见，以便再版修订时采用。

编　者

2005 年 4 月

序

近几年来，随着青海民族学院招生范围和规模的扩大和专业门类的增多，高等数学已成为许多专业的基础课。为了建设精品课程，学院意欲统一教材、统一试题，以便考核学生的学习成绩和教师的教学质量。于是，编写一部适用于西部少数民族地区的教材《高等数学》便迫在眉睫。

本书编者在青海民族学院（包括前青海师专）讲授高等数学课程已有多年的经历；根据非数学系的各类专业的基本要求，在全国范围内选用过不少流行教材；针对本校学生的实际情况，还写了一些补充讲义和习题解答示范。这些积累为该书的编写提供了丰富的素材。纵观全书，本教材有如下特色：

1．本书为理工科、经济管理、高职高专的各类专业所通用，也可用于文科类选修数学课。加星号“*”内容为理工科类专业进一步学习所专用。这为统一教材和建设统一试题库提供了方便。

2．重视基础知识和运算训练，减少纯理论推导，侧重数学工具和数学文化的基础功能。

3．编写时坚持通俗易懂、深入浅出的原则，为数学基础较差的民族学生提供便捷之路，力图克服“数学难学”之心理障碍。

4．选用的习题是编者多年教学经验的积累，同时还编写了配套的习题解答。为克服来自偏远民族地区的部分学生在语言文字表达上欠佳的弱点，示范一些解题程序和书写格式也是需要的。

尽管高等数学的教材很多，但只有深入民族院校教学前沿的数学教师才会对该书有独到的体会。作为编者的同行和同事，本人乐意为该书的出版作序，但愿青海的民族教育事业有长足的进步。

左光纪

2005 年 5 月

目　　录

第一章　函　数

第一节　函数概念

函数是高等数学的主要研究对象，它的实质就是变量之间的关系. 为了了解这一点，先给出几个有关的概念.

一、常量与变量

在日常生活和工作中，我们常遇到这样或那样的量，如时间、温度、长度、重量、面积、体积等. 出现在某一运动过程中的许多量，总是有区别的. 例如，长途客运汽车在两站之间的运行过程中，汽车上的人数，乘客所携带的行李重量都是不变的量，但是，汽车的速度及汽车燃油的储存量却在不断的变化着. 又如，圆的面积公式 $S=\pi R^2$，当半径 R 变化时，圆的面积 S 也是变化的，但是圆周率 π 却总是不变的.

我们把在某个运动过程中，始终保持不变化的量叫常量；而把变化的量叫变量.

应该注意，变量和常量的概念是相对的，某些变量在相应的限制条件下可以看成常量. 例如，2004 年第一季度人民币存款利率可以看作一个常量，而要考虑 1994 年到 2004 年之间的人民币存款利率，它就是一个变量.

二、函数的概念

例 1　真空中自由落体，物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系，如果物体距地面的高度为 h，$\forall t\in[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}]$ 都对应一个距离 s. 已知 t 与 s 的对应关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，其中 g 是重力加速度，是常数.

例 2　某种商品的市场需求量 q 与该商品的价格 p 满足关系式 $q=50-2p$，此式确定

了 p、q 两个变量之间的对应关系.

例 3 一个人读 300 页的书，他在 x 天读到了书的第 y 页，x 与 y 的关系如下表：

x（天）	0	1	2	3	4	5	6
y（页）	0	7	27	35	90	100	120

x（天）	7	8	9	10	11	12
y（页）	138	154	200	215	265	300

这张表告诉我们，每个天数 x，都有唯一的页数 y 与其相对应.

例 4 某气象站用自动温度记录仪在坐标纸上画出某一昼夜的温度变化曲线（图 1-1），它形象地表示出温度 T 随时间 t 变化的规律，即 $\forall t\in[0,24]$，就有唯一确定的温度 $T\in R$ 与之相对应.

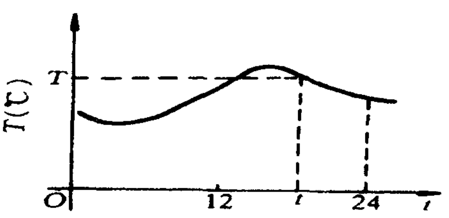


图 1-1

以上四例，虽然它们的实际意义不同，而且涉及到的两个变量相互依从关系的表达方式也不一样. 但是，从数学的角度看，它们却都有相同的本质属性，它们都有两个数集和一个对应关系：对一个数集中的任意一个数，按照对应关系对应着实数集 R 的唯一一个数. 于是，就可抽象出如下的函数定义.

定义 1.1 设 D 为非空数集. 若存在对应关系 f，对 D 中任意数 x，按照对应关系 f，对应唯一一个 $y\in R$，则称 f 是定义在 D 上的函数，表示为

$$f:\ D\to R$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，表示为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量. 数集 D 称为函数 f 的定义域，函数值的集合 $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

根据函数的定义，不难验证，上述四例都是函数的实例.

关于函数概念的几点说明：

1. 函数由三部分内容组成，即定义域，对应关系及值域. 用符号“f：$D\to R$”表

示 f 是定义在 D 上的函数，十分清楚、明确．但是，在高等数学中，一方面要讨论抽象的函数 f；另一方面又要讨论大量具体的函数．在具体函数中需要将对应关系 f 具体化，使用这个函数符号就有些不方便．为此在本书中约定将“f 是定义在 D 上的函数”用符号“$y=f(x)$，$x\in D$”表示．当不需要指明函数的定义域时，又可简写为“$y=f(x)$”，有时甚至笼统地说“$f(x)$ 是 x 的函数”．

2．通常，若给出一个函数 $y=f(x)$，而没有指出它的定义域，就应理解为函数 $y=f(x)$ 的定义域是使 $f(x)$ 有意义的所有 x 的集合．

例 5 求函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的定义域.

解 要使公式有意义，必须 $x+1\neq 0$. 因此，函数的定义域为 $x\neq -1$，用区间表示即为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

例 6 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\lg(1-x^2)$ 的定义域.

解 要使函数表达式有意义，必须

$$\begin{cases} x>0 \\ 1-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ -1<x<1 \end{cases} \Rightarrow 0<x<1$$

即函数的定义域为 $0<x<1$，用区间表示为（0，1）.

三、函数的表示法

1．公式法（解析法）

用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法叫公式法或解析法，如例 1、例 2、例 5、例 6. 应当注意的是：用公式法表示函数可以用一个统一的表达式，也可以用两个或两个以上的式子表示. 用两个或两个以上的式子表示的函数，称为**分段函数**.

例 7 符号函数（图 1-2）

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & \text{当}x>0\text{时} \\ 0 & \text{当}x=0\text{时} \\ -1 & \text{当}x<0\text{时} \end{cases}$$

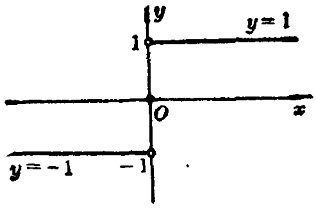


图 1-2

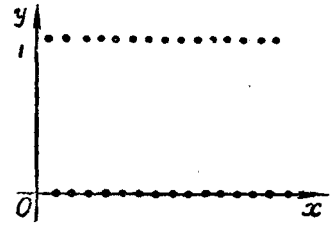


图 1-3

例 8 狄利克雷函数（图 1-3）

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{是有理数}\\0 & x\text{是无理数}\end{cases}\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例 9 “最大整数部分”函数（图 1-4）

$$f(x)=[x]\text{ , }x\in R$$

$[x]$表示不超过x的最大整数，即$[x]$为整数，且 $[x]\le x\le[x]+1$.

2．图示法

对于函数$y=f(x)$，在其定义域内取一个x值时，对应的就有一个y值．在平面直角坐标系中以这一对x、y值为坐标定出一个点$M(x,y)$．一般当x变化时，点M就在平面上运动并描成一条曲线，如图 1-5，这条曲线叫做函数的图像（形）.

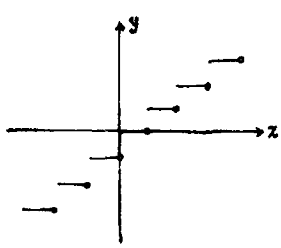


图 1-4

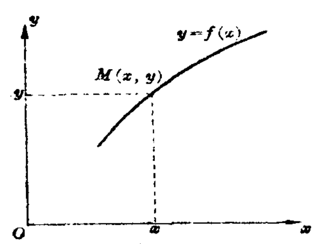


图 1-5

反过来说，如果坐标平面上的曲线与任何一条平行于y轴的直线至多只有一个交点，那么这条曲线表示一个单值函数，当自变量的值等于曲线上点的横坐标时，对应的函数值即等于该点的纵坐标．因此，函数也可用坐标平面上的曲线来表示．这样表示函数的方法叫做函数的图示法，如例 4．

3．表格法

在实际应用中，常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，这种表示函数的方