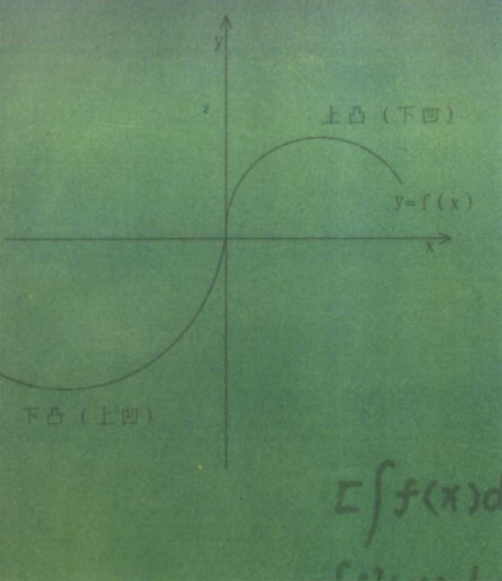


青海民族学院学术系列丛书之二十二

高等数学

GAODENG SHUXUE



主 编 赵德让
副主编 孙千高 郭子胥

$$\begin{aligned} [\int f(x) dx]' &= f(x), \quad d[\int f(x) dx] = f(x) dx \\ \int f'(x) dx &= f(x) + C, \quad \int f(x)' = f(x) + C \end{aligned}$$

青海人民出版社

青海民族学院院长基金资助项目

高等数学

GAODENG SHUXUE

主 编
副主编
编 委

赵德让
孙千高 郭子胥
(以姓氏笔画为序)
马登明 孙千高
吕盛梅 陈 忠
汪小玲 赵德让
郭子胥

青海人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/赵德让主编. —西宁: 青海人民出版社,
2005. 9

ISBN 7-225-02690-9

I. 高… II. 赵 III. 高等数学—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 106714 号

高等数学

赵德让 主编

出版 青海人民出版社 (西宁市同仁路 10 号)

发行 邮政编码 810001 总编室 (0971) 6143426

发行部 (0971) 6143516 6123221

印刷: 青海中山印刷厂

经销: 新华书店

开本: 787mm×1092mm 1/16

印张: 24.75

字数: 400 千

版次: 2005 年 9 月第 1 版

印次: 2005 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1—1 200 册

书号: ISBN 7-225-02690-9/G·1100

定价: 32.00 元

版权所有 翻印必究

(书中如有缺页、错页及倒装请与工厂联系)

前 言

高等数学课程是理工类、经济管理类以及文科类专业的一门基础课，它在各学科中有着广泛的应用。

我们组织多年从事高等数学教学工作，并具有丰富教学经验的教师编写了这部符合西部地区培养规格、规律和教学实际要求的教材，它以理工科高等数学教学大纲为依据，兼顾经济管理类和文科类学科的专业要求。从学生的实际出发，力求起点适中，内容简明，条理清楚，逻辑性强。

本教材在保证全书的系统性、完整性和科学性的基础上，尽量做到深入浅出，突出了基本理论体系，加强了基本内容的训练，并且注意到理论与实践相结合，当前与未来相结合。

本教材可作为理工科、经济管理类、高职和专科类专业的教材，加星号“*”内容专用于理工科进一步学习高等数学的有关基础知识。本书同样也适用于文科类专业、电大、夜大、函授等方面的读者。

在本教材的编写工作中，第二章、第五章由孙千高执笔；第三章、第四章由马登明执笔；第六章、第十二章由赵德让执笔；第七章、第八章由郭子胥执笔；第九章由吕盛梅执笔；第十章由汪小玲执笔；第一章、第十一章由陈忠执笔。

本书的完成和高等数学教研室的全体教师的努力工作是分不开的，编写中得到了学院主要领导、数学系领导和学院教务处的大力支持，在此表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳切希望广大读者随时提出宝贵意见，以便再版修订时采用。

编 者

2005 年 4 月

序

近几年来，随着青海民族学院招生范围和规模的扩大和专业门类的增多，高等数学已成为许多专业的基础课。为了建设精品课程，学院意欲统一教材、统一试题，以便考核学生的学习成绩和教师的教学质量。于是，编写一部适用于西部少数民族地区的教材《高等数学》便迫在眉睫。

本书编者在青海民族学院（包括前青海师专）讲授高等数学课程已有多年的经历；根据非数学系的各类专业的基本要求，在全国范围内选用过不少流行教材；针对本校学生的实际情况，还写了一些补充讲义和习题解答示范。这些积累为该书的编写提供了丰富的素材。纵观全书，本教材有如下特色：

1. 本书为理工科、经济管理、高职高专的各类专业所通用，也可用于文科类选修数学课。加星号“*”内容为理工科类专业进一步学习所专用。这为统一教材和建设统一试题库提供了方便。

2. 重视基础知识和运算训练，减少纯理论推导，侧重数学工具和数学文化的基础功能。

3. 编写时坚持通俗易懂、深入浅出的原则，为数学基础较差的民族学生提供便捷之路，力图克服“数学难学”之心理障碍。

4. 选用的习题是编者多年教学经验的积累，同时还编写了配套的习题解答。为克服来自偏远民族地区的部分学生在语言文字表达上欠佳的弱点，示范一些解题程序和书写格式也是需要的。

尽管高等数学的教材很多，但只有深入民族院校教学前沿的数学教师才会对该书有独到的体会。作为编者的同行和同事，本人乐意为该书的出版作序，但愿青海的民族教育事业有长足的进步。

左光纪

2005年5月

目 录

第一章 函数	1
第一节 函数概念	1
一、常量与变量	1
二、函数的概念	1
三、函数的表示法	3
四、建立函数关系举例	5
习题 1-1	5
第二节 复合函数与反函数	6
一、复合函数	6
二、反函数	7
习题 1-2	8
第三节 具有某些特性的函数	8
一、有界函数	8
二、单调函数	9
三、奇函数与偶函数	9
四、周期函数	10
习题 1-3	10
第四节 初等函数	12
一、基本初等函数	12
二、初等函数	15
习题 1-4	15
第二章 极限与连续	17
第一节 数列极限	17
一、数列	17
二、数列极限	18
三、收敛数列的性质	20
习题 2-1	20
第二节 函数极限	21
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	21
二、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	22
三、函数的单侧极限	25
四、函数极限的性质	25

习题 2-2.....	26
第三节 无穷大量与无穷小量	27
一、无穷大量	27
二、无穷小量	28
三、极限, 无穷大量, 无穷小量之间的关系	28
四、无穷小量的比较	29
习题 2-3.....	30
第四节 极限的运算法则	30
习题 2-4.....	33
第五节 极限存在的两个准则与两个重要极限	34
一、准则 I 与重要极限.....	34
二、准则 II 与重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	36
习题 2-5.....	38
第六节 函数的连续性	39
一、函数的增量	39
二、连续函数的概念	39
三、函数的间断点	41
四、连续函数的运算法则 初等函数的连续性	42
五、在闭区间上连续函数的性质	42
习题 2-6.....	44
第三章 一元函数的微分学	45
第一节 导数概念	45
一、导数概念的实例	45
二、导数的定义	47
三、导数的几何意义	48
四、几个基本初等函数的导数	50
习题 3-1.....	51
第二节 导数的运算法则与公式	52
一、导数的四则运算	52
二、复合函数的求导法则	55
三、指数函数与幂函数求导法则	57
四、隐函数与反三角函数的求导法则	60
五、参数方程和极坐标方程所确定的函数的导数	63
习题 3-2.....	66
第三节 微分	68
一、微分概念	68
二、微分的几何意义	71
三、微分的运算法则和公式	72

四、微分在近似计算中的应用	74
习题 3-3	75
第四节 高阶导数与高阶微分	75
一、高阶导数	75
二、高阶微分	78
习题 3-4	79
第四章 中值定理与导数的应用	80
第一节 中值定理	80
一、罗尔定理	80
二、拉格朗日中值定理	82
三、柯西中值定理	84
习题 4-1	85
第二节 洛必达法则	85
一、待定型极限 $\frac{0}{0}$ 型	85
二、待定型极限 $\frac{\infty}{\infty}$ 型	88
三、其他类型的待定型	89
习题 4-2	91
第三节 函数单调性的判断	91
习题 4-3	93
第四节 函数的极值和最值	94
一、极值	94
二、最大值、最小值	98
习题 4-4	99
第五节 凸性、拐点和渐近线	100
一、凸性	100
二、曲线的渐近线	103
习题 4-5	105
第五章 不定积分	106
第一节 原函数和不定积分的概念	106
一、不定积分的概念	106
二、不定积分的几何意义	107
习题 5-1	108
第二节 基本积分公式与不定积分的性质	109
一、基本积分公式	109
二、不定积分的性质	110
习题 5-2	112
第三节 换元积分法	112
一、第一换元积分法 (凑微分法)	112

二、第二换元积分法·····	116
习题 5-3 ·····	120
第四节 分部积分法·····	121
习题 5-4·····	124
第五节 一些简单有理函数的积分·····	124
习题 5-5 ·····	127
* 第六节 积分表的使用法·····	127
习题 5-6 ·····	129
附录 简明积分表·····	129
第六章 定积分 ·····	138
第一节 定积分概念 ·····	138
一、问题的提出 ·····	138
二、定积分的定义·····	139
三、存在定理·····	140
四、定积分的几何意义·····	140
习题 6-1 ·····	142
第二节 定积分的性质 中值定理·····	142
习题 6-2 ·····	146
第三节 微积分基本公式·····	146
一、问题的提出 ·····	146
二、积分上限函数及其导数 ·····	147
三、牛顿—莱布尼茨公式 ·····	148
习题 6-3·····	150
第四节 定积分的换元法·····	151
习题 6-4 ·····	155
第五节 定积分的分部积分法·····	156
习题 6-5 ·····	158
* 第六节 定积分的近似计算 ·····	159
一、问题的提出 ·····	159
二、矩形法 ·····	159
三、梯形法 ·····	159
四、抛物线法·····	161
习题 6-6 ·····	163
第七节 广义积分·····	163
一、无穷区间上的广义积分 ·····	163
二、无界函数的广义积分 ·····	165
习题 6-7 ·····	166
第七章 定积分的应用·····	168
第一节 定积分的元素法·····	168

第二节 平面图形的面积.....	170
一、直角坐标系情形.....	170
二、极坐标系情形.....	172
习题 7-2	173
第三节 体积.....	174
一、旋转体的体积.....	174
二、平行截面面积为已知的立体的体积.....	176
习题 7-3.....	177
第四节 平面曲线的弧长.....	178
一、平面曲线弧长的概念	178
二、直角坐标情形	179
三、参数方程情形.....	179
四、极坐标情形	180
习题 7-4	181
* 第五节 平均值.....	182
一、函数的平均值实例	182
二、均方根	183
习题 7-5	184
第八章 向量代数与空间解析几何.....	186
第一节 空间直角坐标系.....	186
习题 8-1.....	189
第二节 向量的线性运算及坐标.....	189
一、向量的概念.....	189
二、向量的加减法.....	190
三、向量的数乘运算	191
四、向量的坐标表示	193
习题 8-2	196
第三节 两向量的数量积与向量积.....	197
一、两向量的数量积	197
二、两向量的向量积	199
习题 8-3	202
第四节 平面与空间直线.....	202
一、平面及其方程.....	202
二、空间直线.....	206
习题 8-4.....	210
第五节 二次曲面与空间直线	211
一、曲面与方程	211
二、二次曲面.....	211
三、空间曲线.....	216

习题 8-5	218
第九章 多元函数微分法	219
第一节 多元函数的基本概念	219
一、平面点集和区域	219
二、二元函数	220
三、多元函数的极限	222
四、多元函数的连续性	223
习题 9-1	223
第二节 偏导数	224
一、偏导数的概念	224
二、求导法则	225
三、二元函数偏导数的几何意义	227
四、高阶偏导数	228
习题 9-2	230
第三节 全微分	231
一、全微分与偏微分的定义	231
二、全微分在近似计算和误差估计中的应用	235
习题 9-3	237
第四节 复合函数微分法	238
一、复合函数的中间变量均为一元函数的情形	238
二、复合函数的中间变量均为多元函数的情形	238
三、复合函数的中间变量既有一元函数,又有多元函数的情形	239
四、隐函数的导数或偏导数	240
习题 9-4	242
第五节 多元函数微分学的应用	243
一、空间曲线的切线与法平面	243
二、曲面的切平面与法线	245
习题 9-5	247
* 第六节 方向导数与梯度	247
一、方向导数	247
二、梯度	250
习题 9-6	251
* 第七节 多元函数的极值	252
习题 9-7	255
第十章 重积分	256
第一节 二重积分的概念与性质	256
一、二重积分的概念	256
二、二重积分的性质	259
习题 10-1	260

第二节 二重积分的计算	261
一、化二重积分为二次积分	261
二、利用极坐标计算二重积分	267
习题 10-2	272
第三节 三重积分及其计算	273
一、三重积分的概念	273
二、三重积分的计算	274
习题 10-3	279
* 第四节 重积分的应用	281
一、曲面面积	281
二、重心	283
三、转动惯量	285
习题 10-4	286
* 第五节 对坐标的曲线积分	287
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	287
二、对坐标的曲线积分的计算法	289
三、格林公式	292
四、平面上曲线积分与路径无关的条件	295
习题 10-5	298
* 第十一章 无穷级数	300
第一节 常数项级数的概念和性质	300
一、常数项级数的基本概念	300
二、级数的基本性质	303
习题 11-1	306
第二节 正项级数	306
习题 11-2	311
第三节 任意项级数	311
一、交错级数敛散性的判别	312
二、绝对收敛与条件收敛	313
习题 11-3	315
第四节 函数项级数的概念及幂级数	315
一、函数项级数的概念	315
二、幂级数及其性质	316
三、幂级数的运算法则	318
习题 11-4	321
第五节 把函数展开成幂级数	321
习题 11-5	326
第六节 傅立叶级数	326
一、三角级数	326

二、傅立叶级数	327
三、正弦级数和余弦级数	330
习题 11-6	332
第十二章 常微分方程简介	333
第一节 微分方程的一般概念	333
习题 12-1	335
第二节 一阶微分方程	336
一、可分离变量的一阶微分方程	336
二、一阶线性微分方程与常数变易法	338
习题 12-2	342
第三节 可降阶的高阶微分方程	342
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	342
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	343
三、 $y'' = f(y, y')$	344
习题 12-3	345
* 第四节 二阶常系数线性微分方程	346
一、二阶常系数线性齐次方程	346
二、线性非齐次方程	349
习题 12-4	352
习题答案	353
参考文献	378

第一章 函 数

第一节 函数概念

函数是高等数学的主要研究对象, 它的实质就是变量之间的关系. 为了了解这一点, 先给出几个有关的概念.

一、常量与变量

在日常生活和工作中, 我们常遇到这样或那样的量, 如时间、温度、长度、重量、面积、体积等. 出现在某一运动过程中的许多量, 总是有区别的. 例如, 长途客运汽车在两站之间的运行过程中, 汽车上的人数, 乘客所携带的行李重量都是不变的量, 但是, 汽车的速度及汽车燃油的储存量却在不断的变化着. 又如, 圆的面积公式 $S = \pi R^2$, 当半径 R 变化时, 圆的面积 S 也是变化的, 但是圆周率 π 却总是不变的.

• 我们把在某个运动过程中, 始终保持不变化的量叫常量; 而把变化的量叫变量.

应该注意, 变量和常量的概念是相对的, 某些变量在相应的限制条件下可以看成常量. 例如, 2004 年第一季度人民币存款利率可以看作一个常量, 而要考虑 1994 年到 2004 年之间的人民币存款利率, 它就是一个变量.

二、函数的概念

例 1 真空中自由落体, 物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系, 如果物体距地面的高度为 h , $\forall t \in [0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]$ 都对应一个距离 s . 已知 t 与 s 的对应关系是 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 其中 g 是重力加速度, 是常数.

例 2 某种商品的市场需求量 q 与该商品的价格 p 满足关系式 $q = 50 - 2p$, 此式确定

了 p 、 q 两个变量之间的对应关系.

例 3 一个人读 300 页的书, 他在 x 天读到了书的第 y 页, x 与 y 的关系如下表:

x (天)	0	1	2	3	4	5	6
y (页)	0	7	27	35	90	100	120

x (天)	7	8	9	10	11	12
y (页)	138	154	200	215	265	300

这张表告诉我们, 每个天数 x , 都有唯一的页数 y 与其相对应.

例 4 某气象站用自动温度记录仪在坐标纸上画出某一昼夜的温度变化曲线 (图 1-1), 它形象地表示出温度 T 随时间 t 变化的规律, 即 $\forall t \in [0, 24]$, 就有唯一确定的温度 $T \in R$ 与之相对应.

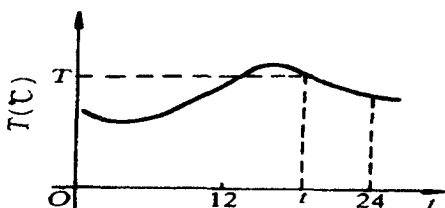


图 1-1

以上四例, 虽然它们的实际意义不同, 而且涉及到的两个变量相互依从关系的表达方式也不一样. 但是, 从数学的角度看, 它们却都有相同的本质属性, 它们都有两个数集和一个对应关系: 对一个数集中的任意一个数, 按照对应关系对应着实数集 R 的唯一一个数. 于是, 就可抽象出如下的函数定义.

定义 1.1 设 D 为非空数集. 若存在对应关系 f , 对 D 中任意数 x , 按照对应关系 f , 对应唯一一个 $y \in R$, 则称 f 是定义在 D 上的函数, 表示为

$$f: D \rightarrow R$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值, 表示为 $y = f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量. 数集 D 称为函数 f 的定义域, 函数值的集合 $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$ 称为函数 f 的值域.

根据函数的定义, 不难验证, 上述四例都是函数的实例.

关于函数概念的几点说明:

1. 函数由三部分内容组成, 即定义域, 对应关系及值域. 用符号 “ $f: D \rightarrow R$ ” 表

示 f 是定义在 D 上的函数，十分清楚、明确。但是，在高等数学中，一方面要讨论抽象的函数 f ；另一方面又要讨论大量具体的函数。在具体函数中需要将对应关系 f 具体化，使用这个函数符号就有些不方便。为此在本书中约定将“ f 是定义在 D 上的函数”用符号“ $y=f(x), x \in D$ ”表示。当不需要指明函数的定义域时，又可简写为“ $y=f(x)$ ”，有时甚至笼统地说“ $f(x)$ 是 x 的函数”。

2. 通常，若给出一个函数 $y=f(x)$ ，而没有指出它的定义域，就应理解为函数 $y=f(x)$ 的定义域是使 $f(x)$ 有意义的所有 x 的集合。

例 5 求函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的定义域。

解 要使公式有意义，必须 $x+1 \neq 0$ 。因此，函数的定义域为 $x \neq -1$ ，用区间表示即为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 。

例 6 求函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \lg(1-x^2)$ 的定义域。

解 要使函数表达式有意义，必须

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$$

即函数的定义域为 $0 < x < 1$ ，用区间表示为 $(0, 1)$ 。

三、函数的表示法

1. 公式法（解析法）

用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法叫公式法或解析法，如例 1、例 2、例 5、例 6。应当注意的是：用公式法表示函数可以用一个统一的表达式，也可以用两个或两个以上的式子表示。用两个或两个以上的式子表示的函数，称为分段函数。

例 7 符号函数（图 1-2）

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

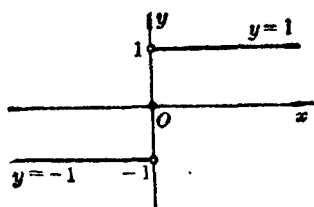


图 1-2

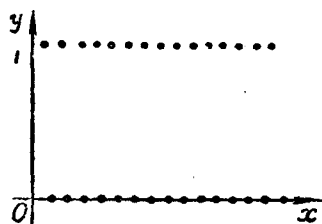


图 1-3

例 8 狄利克雷函数 (图 1-3)

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是有理数} \\ 0 & x \text{ 是无理数} \end{cases} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

例 9 “最大整数部分”函数 (图 1-4)

$$f(x) = [x], \quad x \in R$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 即 $[x]$ 为整数, 且 $[x] \leq x < [x] + 1$.

2. 图示法

对于函数 $y = f(x)$, 在其定义域内取一个 x 值时, 对应的就有一个 y 值. 在平面直角坐标系中以这一对 x 、 y 值为坐标定出一个点 $M(x, y)$. 一般当 x 变化时, 点 M 就在平面上运动并描成一条曲线, 如图 1-5, 这条曲线叫做函数的图像 (形).

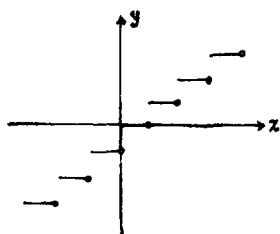


图 1-4

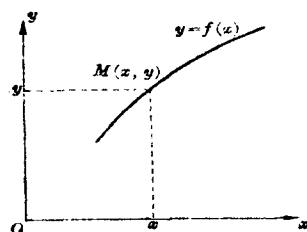


图 1-5

反过来说, 如果坐标平面上的曲线与任何一条平行于 y 轴的直线至多只有一个交点, 那么这条曲线表示一个单值函数, 当自变量的值等于曲线上点的横坐标时, 对应的函数值即等于该点的纵坐标. 因此, 函数也可用坐标平面上的曲线来表示. 这样表示函数的方法叫做函数的图示法, 如例 4.

3. 表格法

在实际应用中, 常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表, 这种表示函数的方