中小学课外小博士

世界数学通（四）

海南国际新闻出版中心

世界数学通(四)

刘以林
冯晓林 主编

俞渭贤 撰文

海南国际新闻出版中心图书出版社

目　　录

一、概率论起步笛卡尔坐标落地

帕斯卡大家非常熟悉，中学物理的第一册就有帕斯卡定律，那是他 23 岁时的发现。不过他最大的贡献是在数学领域。

他被公认为数学史上的神童，1623 年出生在法国克勒芒。上帝给了他一个早熟的脑袋，不过身体一直不好，1662 年就去世了。短暂一生放出的光芒却照射了人类几百年。

他的父亲也是一位数学家，觉得孩子太小不能知道得太多，甚至把数学修书全都藏了起来。不料越不让他学，那小帕斯卡就越觉得神秘好奇，小小年纪，就发现了平面几何的许多定理，比如三角形的内角和定理。

帕斯卡的老爸大为感动，14 岁时，就带他参加每周一次的法国数学家聚会，科学沙龙。后来这科学沙龙就成了法国科学院的胚胎了。那参加沙龙的人物也都大名鼎鼎，笛卡尔，费尔马，德沙格，还有后来的科学院院长梅森。

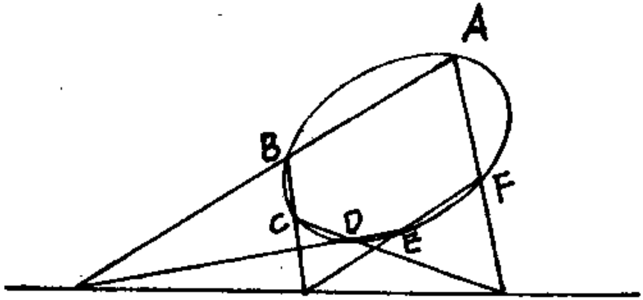
16 岁，1636 年，这位神童发现了一条名垂青史定理：

若一个六边形内接于一条圆锥曲线，那么每两条对边相交而得的三点在同一直线上。咱们从下面的图可以看得很清楚。

16 岁的帕斯卡是这么想问题的：

首先，这条定理对圆是成立的，完全可以证出来。那么，如果把圆变换成其他圆锥曲线，比如，像抛物线、椭圆、双曲线，问题不就解决了吗？

帕斯卡正是这么做的，变换的方法就是“射影”。说句通俗点的，就是打幻灯片。要是诸位有兴趣，不妨试一试，在一块玻璃板上一画上圆和内接六边形，然后用点光源（就是发光的光源最好



像个点，不能是电棒），往玻璃后面一照，那么墙上就有图形的射影。

下面就看你的屏幕（墙）与玻璃块是个什么关系了。如果两者平行，那么投影还是圆；如果不平行，就是椭圆，或者是其他圆锥曲线。

当然，那直线不管你怎么照射，得出来的永远是直线，直线上的点自然也不会被射到线外去。这样，六边形还是六边形，只不过形状有些变化，而那个结论当然也是成立的。

这可是一种很先进的思想，就是让图形从一个形状连续地变到另一个形状。而在这种连续变换中，哪些东西会变，哪些又不会变，是个十分重要的问题。

比如咱们刚刚做的投影变换，不变的是直线；变的是圆。而圆在这种变换中，又只能变成其他一些圆锥曲线。

一门新的学科就这么产生了，它叫射影几何。它着重于图形的位置和相交方面的性质，而不是像欧氏几何那样，着重考虑图形量的方面的性质。

不过，帕斯卡的这一辉煌成果，竟引起了许多人的怀疑，不相信这是一个16岁孩子的思维，而认为是帕斯卡父亲捉笔代刀。但是帕斯卡三年后，又发明了第一架机械计算机，能自动从个位进到十位，从低位进到高位，有点像现在电表里的那个计数盘。

接踵而来的一系列成就，更使人惊叹不已。31岁那年，他又对赌博时两个赌徒如何分赌金的问题有了浓厚兴趣。这个分赌金的问题，卡当和塔尔塔里亚也都考虑过，没有进展。那位卡当还为此写一本书。帕斯卡在朋友的鼓励下决定一试身手，他把自己的解法告诉费尔马，两人不谋而合，想的都对。又一门新的学科，概率论就这样起步了。

帕斯卡在考虑概率时，要讨论从几件东西中，取r件，一共有多少可能的情况。这样，他就又得出了举世闻名的帕斯卡三角形。这种由数字一层一层叠起来的三角形咱们前面就说过，叫贾宪——杨辉三角形，咱们中国要比他早500年了，“五百年前是一家”。

不过，帕斯卡那条著名的内接六边形定理倒确实受过高人启发。那就是他的同僚德沙格(1591—1661)，射影几何的另一位奠基者。

画家们画画要讲透视，实际上也就是图形的投影；此外，如何把地球睥图投射成一个平面的地图，这里而也很有学问。射影几何就这么提上了日程。当然那时没有这四个字的名称。

德沙格先是位陆军军官，后来又成了一名工程师，建筑师。他通晓阿波罗尼斯圆锥曲线的著作，总想来一个新招，不是一个一个的证明圆锥曲线的定理，而是归归类，证它一批。新招终于被他发现了！这就是前面所说的投影的方法，看看图形在这样的连续变换下，什么性质会变，什么又不在变。

德沙格就教帕斯卡民用这种高招，能把圆锥曲线的许多问题简化成数几个基本命题。而帕斯卡这么一试，果真灵验，这样就有了那帕斯卡的“神秘的六边形”定理。要知道，这定理的推论就有 400 多个呢！

不过德沙格本人却不太走运，甚至还招来许多抨击。连笛卡尔也写信给他，说你那磋商方法搞不出什么新名堂。但是当笛卡尔老人家看到了德沙格的证明后，又马上推崇备至，高！

德沙格把他的射影法写成一本书，印成 50 份，送给他的朋友。朋友们可能都心不在焉，书都弄丢了。直到 1950 年，在巴黎国立图书馆才发现了一本，孤本。

那么他的朋友们为什么又都心不在焉呢？笛卡尔又为什么一开始说他弄不出什么名堂呢？原来，当时笛卡尔正在用代数的方法来研究几何，收获不小，大伙的焦点一起盯在了这儿。

用代数方法研究几何，把几何图形用代数方程表示出来，通过对方程的研究和变换来掌握图形，这个好主意可不是人人都能想到的。

想了几千年，也没有人能想到一招，却被一位青年军官“南柯一梦”得出了结果，成了现如今被称为解析几何这一门的鼻祖。

话说这笛卡尔出生于 1596 年，法国的一个名门望族。小时候身体不好，早上要睡睡懒觉。后来养成习惯，那早晨的懒觉，变成了想问题出成果的好时光。他自己也说过，大部分东西是在床上想出来的，特有灵感。

这恐怕是正中同学们下怀，睡懒觉有了好理由。不过大家要睡请各自方便，出不了成果可别怨笛卡尔先生没教睡法大全。公鸡孵不出小鸡别怨鸡窝不好。

再说笛卡尔 20 岁大学毕业，就去巴黎当律师，曾和前面提

过的梅森在一块研究研究数学。过了一年，1617 年，这位贵公子心里静不下来，忽然从了军，当了兵。真有点安邦治国建功立业的大志，横刀立马叱咤风云的气派。

这兵一当就是九年，有时还逛逛巴黎，狂欢作乐一番，来点公子哥的小脾气。但他一直研究数学。一次在荷兰布莱达，看到大街上贴招贤榜，围观的人议论纷纷，对那榜上的几道数学题没法下招。笛卡尔揭下此榜，很快解决。这使他自信自己的数学才能，从此静下心来钻数学。

不过笛卡尔最有兴趣的，还是研究科学和寻求真理的一般方法。人们说他是近代第一个杰出的哲学家。同时他对整个自然界都在探索，力学的、光学的、生物的实验，他做了许多，是第一流的物理学家。

也不知怎么，一不留神成了个数学家。倒有点像现如今有些写书的朋友说过的，一不留神能闹出本红楼梦来。

所以他就开始寻找这种一般的方法。但他不久就断定逻辑本身是无结果的，“与其能用来探索未知的东西，不如说用来交流已知的东西”。

就这么找来找去，据他自己说，在 1619 年 11 月 10 日，多瑙河旁的一座军营里，躺在床上的他思维这么一聚焦，立刻悟出了这种方法，这就是数学方法。“众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯光阑珊处。”

据说那天晚上他躺在床上久久不能入睡，望着天花板发呆。突然看到一只苍蝇在天花板上爬来爬去画曲线，这条曲线到底怎么个表示？如何描绘？一时间倒有些摸不着头。再想想那飞逝的流星，飞奔的骏马，不都在画着曲线吗？

昏昏然入了梦乡，好像看见那苍蝇还在爬，和那相邻两墙的距离也是一会大些，另一会小些。有门了！灵感来了！他顿时领

悟到，要是知道苍蝇与两墙之间的距离关系，不就能描绘苍蝇的路线吗？

这故事虽然有点玄乎，但是就是当真也无伤大雅，咱们就让它在似与不似之间吧。

那故事里的两堵墙，看起来就是现在所说的坐标系的两根轴了！X 轴和 Y 轴。现在这样一种坐标系，就叫做笛卡尔坐标系。

对于坐标系，咱们不只是在课本里见过面，每个人周围都有不少。那影剧院里的座位，地球仪上的经纬网，不都是要用两个数，才能表示一个确定的点吗？到图书馆找书，每本书的位置也能用第几排、第几层、第几本这三个数表示出来。这里用到三个数，因为书放在了一个立体空间中，两根坐标轴不够了，得添上一根竖起来的，这就叫三维空间。

其实不知大家意识到没有，小学、初中就知道的数轴，一根轴，也构成了一个坐标系。但是它只能表示直线上的点，用一个数就够了，就叫一维空间。

咱们住在单元房，诸葛亮的八卦阵，城市里纵横交错的道路，无一不是坐标系。我们在实际运用时，都有意无意地用坐标系的语言来说出其中的位置的。

有人说了，那城市的街道不标准，不都是横平竖直的，不相互垂直，怎么还算平面坐标系？其实，平面的坐标系不强求你一定要把 X 轴 Y 轴互相垂直。你画斜了试试，看看能不能表示出平面中的点？

其实，只要把平面编成个网网，把空间隔成个鸽子笼，不管你编的线怎么弯怎么曲，坐标系就被你编成了。就说有无数多种形形色色的坐标系，也是千真万确的事。

咱们要是回到笛卡尔那里去看看，就会惊奇地发现，这位解

析几何的老祖宗最初的平面坐标系,就是两根斜交的直线构成的,而不是今天在课本里看到的那样。

平面上的点能用一对有序的数表示,而平面上的图形能用方程来描绘,现在的初中生已经知道一些了。一次函数、二次函数的方程,能在坐标系中作出相应的图形,代数的语言有了直观的几何解释。

而平面上的圆,又能用代数方程来研究,很清楚地知道了圆心和半径。代数,终于从希腊时代的附庸地位一下子变成了完全独立的部门,代数变得比几何更重要。

不过,笛卡尔老先生倒并没有把这若大的发明太当回事。那时候,他把这一套东西都当成附录,附在他的哲学论著《方法论》的后面,突破附庸的大创造又当了一次附庸。

《方法论》是笛卡尔居住于荷兰 20 年中完成的,那里安静自由的学术环境很适合他的胃口。1649 年,瑞典女皇邀请他去讲授哲学。这位年轻的女皇非得要每天早上五点开讲,笛卡尔勉为其难,身体不能适应,懒觉没法睡了。几个月后,染上了肺炎,不治逝世,终年 54 岁。

二、采百家之长建费尔马大定理

在笛卡尔叙述了解析几何基础的同时,另一位法国数学天才费尔马也注意到这门学科。两人卷入了优先权之争。

费尔马说,他在 1636 年给罗伯瓦的一封信中说到,他有这方面的概念已经七年了。而 1637 年笛卡尔才发表他的著作。笛卡尔当时已完全知道费尔马的许多发现,但否认他的思想是从费尔马那里来的。

没有知识产权法庭断这件官司,所以就打起了笔仗。罗伯

瓦、帕斯卡等人站在费尔马一边，而米道奇、德沙格站在笛卡尔一边。一时间信来信去，争个不休。后来就慢慢平息下来。

1660年，笛卡尔死后十年，费尔马写了一篇文章，指出笛卡尔的一个错误。但他接着说，他是如此佩服笛大哥的天才，即使有瑕疵，他笛先生的工作甚至比别人没有错误的工作更有价值。

费尔马(1601？—1665)确实要比较谦虚一些。他是一位卑微的律师，业余时间就全用在数学研究上了。他一辈子发表的著作不多，恐怕是没钱自费出版，但他和第一流的数学家经常通信交流。

他还有个僻好，喜欢在书边上写注记，许多重要的发现就这么记着的。他的数论方面的许多贡献就是记在一本丢番都的书边上。数论，是费尔马先生最杰出的工作，奠基者。

其中记下了最有名的一个，就是费尔马大"定理"：不存在正整数X、Y、Z、n，使得$X^n+Y^n=Z^n$(当$n>2$时)。

大家知道，当$n=2$时，就是勾股定理了，有解，毕氏三数就是答案。

费尔马发现$n=3$时就来了麻烦，所以就有了上面的猜测。费尔马在书边写道："我确实找到了一个极妙的证明，但页边太窄，写不下。"

看来有没有证明只能是天知地知了。后来许多数学家都寻求这"极妙的证明"而一无所获。这样100年过去了，费尔马大"定理"成了著名的世界难题，人类仍然没能突破。

第一次具有历史意义的突破是在1779年，由欧拉先生做出的，他成功地证明了当$n=3$，$n=4$的情况。大约在1825年，勒让德和狄利克雷独立地证出了$n=5$的情况。八年之后，一位完全是自学成才的法国妇女索菲娅，竟然也取得了不小的成果。

历史过了100年，n才被推进到100。公元1850年和1853

年，法兰西科学院两次悬赏 2000 金法郎，征解费尔马猜想，也不过把指数的上限推到 216。

日历又翻过 50 年，德国数学家佛尔夫斯克给哥廷根科学院留下十万马克，悬巨赏再次征解。一时之间，各种证明纷至沓来，统统不对。费尔马定理如此著名，恐怕就在于发表了许多错误的证明。

借助于电子计算机，n 的上限被推进到 4000 万！但当然不能算是证得了定理。

1993 年 6 月，英国剑桥牛顿数学研究所举行了一个学术报告会。一位英国皇家学会会员、美国普林斯顿大学教授维拉斯，应邀作了一系列演讲，演讲题目是“椭圆曲线，模形式，和伽罗瓦表示”。从这个题目，听众猜不透他到底要得出些什么。

然而在 6 月 23 日他的最后一个演讲结束时，他终于推出了费尔马大定理。在场的数学家纷纷举起相机记录下数学界的这千金一刻。很多报纸纷纷报导，报导这数学发展中的巨大里程碑。

虽然他的证明有 200 多页，许多细节要逐个检查，但专家们认为他是对的，证明的思路是对的。证明中他采用了许多不同分支的最新思想，采用了许多当代名家的思想、结果和技巧。采百家之花，方得芳香之蜜。他的工作是一项意义深远的贡献，是本世纪一项重大科学成就。

费尔马老先生页边寥寥数语。引得 400 年中无数英雄竟折腰，得出了好多成果，真正是能下金蛋的老母鸡。

费先生的声名之大，全因这大定理增加了份量，往往忘了他也是解析几何的奠基人。

且说笛卡尔、费尔马两位豪杰，用思维这把利剑，辟得一块个全新的数学疆域，真正是盘古开天地一般的功劳。

此话怎讲？原来所谓初等数学，也就是从盘古一直到 16 世纪这一段的数学，叫常量数学。

咱们在中小学学的，就是常量数学。它主要研究静止的量的各种运算。这些运算现在看来很简单，但却整整折磨了多少哲人的思维，达 4000 多年之久！

解析几何的方法一出，变量登上了数学的舞台唱主角。“两个未知量决定的一个方程，它对应着一条轨迹——一条直线或曲线”。费尔马的这番话就表示了变量的思想。

你想想，一个方程中有两个未知量，一个未知量变化了，另一个不也随着变化？这实际上还是一种函数关系的体现。

有人会说，那么不定方程中，未知量的个数大于方程的个数，未知量也固定不下来，也在变化，为什么不说不定方程的出现是变量数学的开始呢？

那不定方程，人们的注意力集中在方程的求解，而并不关心未知量是不是在变。

解析几何中，曲线的方程一旦用曲线描绘出来，立即得到一种几何的直观。人们从点的运动想到所对应的量的变化，变量的概念形成了。

老前辈恩格斯曾这么说：“数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微积和积分也就立刻成为必要的了。”

坐标系、变量、函数，是数学的一个转折点，也是变量数学发展的一个决定性步骤。

现在，咱们已经清晰地听到了那位巨人的脚步声了——牛顿，莱布尼茨。

三、牛顿莱布尼茨创立微积分

那牛顿、莱布尼茨的大名，现在是无人不知，无人不晓。说他们是巨人当然不错；如果把他们当成是创建微积分的唯一的两位，那就不大对了。

数学和科学的巨大进展，都是建立在几百年中做出一点一滴贡献的许多人的工作之上的。这时就需要一个人来走那最高的最后的一步。

这个人要有敏锐的透视，从纷纭繁杂的猜测中拣出有价值的想法；这个人要有足够的想象力，把零乱的思维碎片搭成系统的大厦；这个人要有献身的精神，不怕坐冷板凳，眼睛不能天天盯着大款。

牛顿，莱布尼茨正是这样的巨人，他们各自独立地跑完了“微积分”接力赛的最后一棒。

微积分的萌芽，是古已有之了。

咱们刘徽老先生的著名“割圆术”，就是把圆近似的割成边数很多，边长很短的正多边形，来计算圆面积。“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

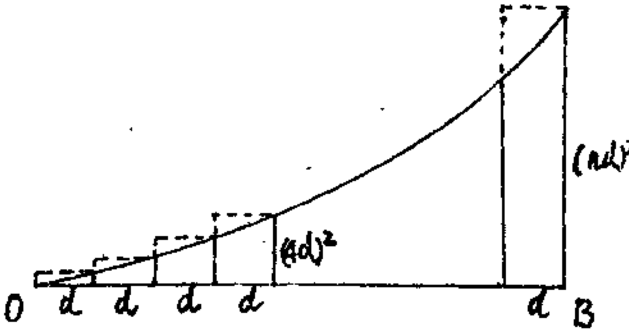
刘徽的的这一套，阿基米德在公元前 240 年左右也做过。阿基米德也“割”过圆。而且，他不但用内接正多边形去从内往外逼近圆，还用外切正多边形来近似，从外往内逼。一内一外，把圆周率的真值夹在中间，就能准确估计误差了。

面积体积计算很重要，17 世纪的工作开始于开卜勒。这位酒保被酒桶体积的计算问题吸引住了。不过他的工作比较粗糙。比如算圆面积，他把圆看成是无穷多个三角形，每个三角形的顶点都在圆心，底在圆周上，然后像正内接多边形的面积一样，用

长乘以半径除以 2，就是圆的面积了。球的体积也是如此。

这里面实际上就是现在所说的积分。不管是刘徽、阿基米德，还是开卜勒，都是一样的思想，但是，每一种曲线的面积计算，都要用不同类型的直边形去逼近，一题一法、一题一变化，太烦。

而 17 世纪的一些人则采用了系统的办法，都用小矩形。比如计算 $y=x^2$ 之下，从 $x=0$ 到 $x=B$ 的面积(图见下)：



首先将 OB 分为几份，构成一个个小矩形，用矩形面积之和逼近待求面积，当这些矩形的宽度 d 越来越小时，这个面积和就越来越接近曲线下的面积，“割之弥细，所失弥少。”

如果矩形的宽度都是 d，那么根据抛物线 $y=x^2$ 中 x 与 y 的关系，这些小矩形的高分别为 d^2、$(2d^2)$、$(3d^2)$，等等，一直到 (nd^2)。所以矩形面积之和为：

$$d \cdot d^2 + d(2d)^2 + d(3d)^2 + \cdots\cdots + d(nd)^2, \qquad 1)$$

即 $$d^3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)。$$

这括号中的自然数平方之和为 $\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$，所以，这面积就为 $$d^3\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)。\qquad 2)$$

d 是$\frac{1}{n}$OB 的长，再次代入 OB，就有：

$$OB^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)。$$

现在再按这些人的说法，认为当 n 无穷大时，最后的两项可以忽略，那么这待求的抛物线下的面积就求出来了：$\frac{1}{3}OB^3$。

同学们能看懂这些，看了之后可能很满意了：任何曲线形的面积似乎都能这么算。

但是仔细考虑一番就会看到有两个麻烦。麻烦之一是为什么 n 无穷大时，最后两项能够略去，没有理论基础，没有证明，只是直观地觉察到。

麻烦之二是从 1)式变到 2)式，不同的题目要用不同的方法，也是个很不方便的大问题，有时单靠技巧还不一定得出结果。

这个困难困扰了 17 世纪所有的数学家。但是牛顿和莱布尼茨却找出了一个解决的通道。相比较而言，牛顿似乎想得更清楚一点。

简单来讲，牛顿的思路大致是这样的：

比如上面抛物线的求积中，求出的面积是$\frac{1}{3}OB^3$。如果 OB 再伸长或缩短一些，也就是说 OB 不固定，是个变化着的 x，那么上面抛物线的面积计算仍然一样算，可以得到是$\frac{1}{3}x^3$。

这样，算出的面积 $S=\frac{1}{3}x^3$，也是个函数 $S=\frac{1}{3}x^3$。既然是 $y=x^2$，通过求积过程变化得到的，那么反过来，$y=x^2$ 是不是也可以通过对 $S=\frac{1}{3}x^3$ 进行某种变化运算而得出来呢？

经过研究，这种变换果真被牛顿找到了，就是求出当 x 变化

时,S 的变化速度。S 随着 x 的变化而变化,自然有个变化速度问题,那么这个速度如何求呢?

这能不能用 S 除以求出来呢?那当然不行。因为对等速运动时的情况,用距离除以时间这样常量数学的公式是可以的。现在 S 随着 x 变,不是等速变化的,常量数学就没戏了。

十六、十七世纪,正有大量的变速运动的问题要求解决。牛顿是这么考虑的,如果让 x 的变化很小,比如只增加$\triangle x$这么一点点,那么 S 也有一点点增加,就用$\triangle S$表示。

因为$\triangle x$很小,所以这一小段内,S 的变化可以认为是匀速的。这时,变化的速度就可以用$\triangle S$除以$\triangle x$来表示:$\frac{\triangle S}{\triangle x}$。

如果$\triangle x$充分的小,那么这速率算得就越精确。当然,这样算出的速度,每一点都不一样,是一种瞬间的速度。这个速度也是变,不是常量,

这么一种求速度的运算,要用到求极限的方法;让$\triangle x$无穷地小,看看$\frac{\triangle S}{\triangle x}$怎么个变化。经过牛顿的努力,像 $S=\frac{1}{3x^3}$这个一个函数式 S 随 x 变化的速率算出来了,就是 $y=x^2$!

从 $y=x^2$,通过求面积,能得到 $S=\frac{1}{3}x^3$,这种变换叫积分;而从 $S=\frac{1}{3}x^3$,通过求速率,又能求得 $y=x^2$,这种变换叫微分,又叫求导。

大伙看看,微分、积分是不是一种可逆的过程?可逆的变换?实际上也完全可以看成是可逆的运算.

大家可能会说,四则运算都起码有两项,现在微分只是对 $S=\frac{1}{3x^3}$进行变换,能叫运算吗?当然能。其实,咱们在初等数学里也有这种只对一项进行的运算,比如求相反数,求倒数。当然,现在运算的对像可有了质的变化,不是数,是一个函数!