



2007年 全国硕士研究生 入学统一考试

数学考试 大纲解析

数学三和数学四适用

● 教育部考试中心



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2007年 全国硕士研究生 入学统一考试

数学考试 大纲解析

教育部考试中心 组织编写

教育部考试中心

教育部考试中心

2007 年全国硕士研究生入学统一考试

数学考试大纲解析

(数学三和数学四适用)

教育部考试中心



高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析. 数学三和数学四适用/教育部考试中心. —北京: 高等教育出版社, 2006. 7

ISBN 7-04-019447-3

I. 2... II. 教... III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 059364 号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 雷旭波 封面设计 王凌波
责任绘图 朱 静 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市白帆印务有限公司

开 本 787×1092 1/16
印 张 22.5
字 数 530 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2006 年 7 月第 1 版
印 次 2006 年 7 月第 1 次印刷
定 价 35.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19447-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010)58581897/58581896/58581879

传 真：(010)82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)58581114/5/6/7/8

特别提醒：“中国教育考试在线” <http://www.eduexam.com.cn> 是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供名师导航、试题宝库、在线考场、图书浏览等多项增值服务。高教版考试用书配有本网站的增值服务卡，该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息，并以此辨别图书真伪。

目 录

第一部分 微 积 分

一、函数、极限、连续	1	四、多元函数微积分学	100
二、一元函数微分学	28	五、无穷级数(数学三)	124
三、一元函数积分学	67	六、常微分方程与差分方程	150

第二部分 线 性 代 数

一、行列式	174	四、线性方程组	219
二、矩阵	179	五、矩阵的特征值和特征向量	241
三、向量	200	六、二次型	264

第三部分 概率论与数理统计

一、随机事件和概率	279	五、大数定律和中心极限定理	330
二、随机变量及其分布	286	六、数理统计的基本概念(数学三)	333
三、多维随机变量的分布	294	七、参数估计(数学三)	341
四、随机变量的数字特征	306	八、假设检验(数学三)	351

第一部分 微 积 分

一、函数、极限、连续

• 考试内容与要求 •

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念。
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法。
7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法。了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系。
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型。
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质。

• 考试内容解析 •

(一) 函数

1. 函数的概念及表示法

(1) 函数的定义：设有两个变量 x 与 y ，如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时，变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$ 。

这时称 x 是自变量， y 是因变量，称 x 的取值范围 D 是函数 $f(x)$ 的定义域， y 的取值范围为函数 $f(x)$ 的值域。

一个函数是由它的定义域和对应法则所确定的。换句话说，两个函数，若它们的定义域相同，在该定义域上的对应法则也相同，则这两个函数相等。

(2) 函数的表示法：常用的函数的表示法有四种：公式法(解析法)、表格法、图像法和文字叙述法。如，函数 $y = [x]$ 的对应法则是“ y 为不超过 x 的最大整数”，这就是一种文字叙述法。它比较简洁，虽然用公式法也可表示该函数，但是没有这么直接明了。

2. 函数的简单性质

(1) 单调性: 设 $y=f(x)$ 在某区间 I 内有定义, 如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加的** (或**单调减少的**).

区间 I 内单调增加的函数的图像是在区间 I 内上升的曲线, 如图 1.1.1;

区间 I 内单调减少的函数的图像是在区间 I 内下降的曲线, 如图 1.1.2.

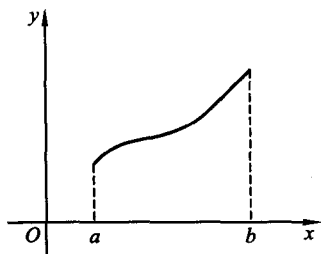


图 1.1.1

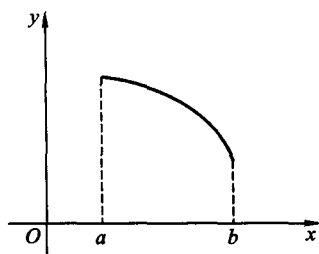


图 1.1.2

值得注意的是, 函数的单调性是和某个区间 I 有关系的, 一个函数可能在一个区间内单调, 而在另外的区间内没有单调性; 也可能在一个区间内单调增加, 而在另外的区间内单调减少. 如, $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数, 但是在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内单调减少.

(2) 奇偶性: 设 $y=f(x)$ 在某对称于原点的区间 I 内有定义, 如果对于 I 内任意点 x , 恒有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内是**偶函数**; 如果恒有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 I 内是**奇函数**.

偶函数的图像对称于 y 轴 (如图 1.1.3), 奇函数的图像对称于原点 (如图 1.1.4).

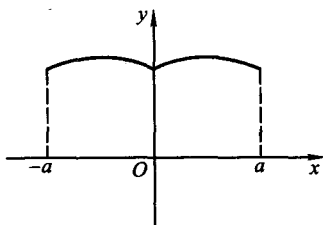


图 1.1.3

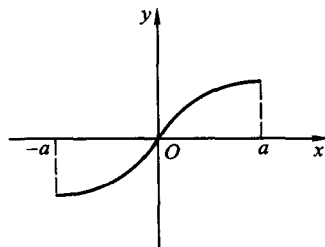


图 1.1.4

关于函数的奇偶性, 按其定义易推出以下结果:

① 若 $f(x)$, $g(x)$ 是区间 $(-a, a)$ 内的偶函数, 则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) 也是 $(-a, a)$ 内的偶函数.

② 若 $f(x)$, $g(x)$ 是区间 $(-a, a)$ 内的奇函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是 $(-a, a)$ 内的奇函数, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) 是 $(-a, a)$ 内的偶函数.

③ 若在区间 $(-a, a)$ 内, $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) 是 $(-a, a)$ 内的奇函数.

(3) 周期性: 设 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有定义, 若存在一个正的常数 T , 使得 $f(x+T)=f(x)$ 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 则称 $f(x)$ 是**周期函数**. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

(4) 有界性: 设 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义, 如果存在 $M > 0$, 使得对于任意 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$,

则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

对于周期函数的图像, 只需关心它在一个周期内的图像, 如 $[0, T]$ 上, 其他区间的图像可由平移得到.

关于函数的有界性, 要注意它是一个与区间 I 相联系的概念. 例如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界函数, 而在 $(1, 2)$ 内是有界函数.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_u , $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_x , 值域为 E , 若 $E \subseteq D_u$, 则对于任意 $x \in D_x$, 有 $u = \varphi(x)$ 与 x 对应, 而 $u \in E \subseteq D_u$, 故又有确定的 y 与 u 对应, 从而, 对于任意 $x \in D_x$, 都有确定的 y 与 x 对应, 按照函数的定义, 确定了 y 是 x 的函数. 此函数是通过中间变量 u 建立的 y 与 x 的对应关系, 因而, 称此函数为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的**复合函数**, 记为 $y = f(\varphi(x))$.

若 $u = \varphi(x)$ 的值域 E 只有部分含在 $f(u)$ 的定义域 D_u 内, 此时仍能确定复合函数 $y = f(\varphi(x))$, 只不过这时它的定义域也只是 D_u 的一部分.

4. 反函数

设 $y = f(x)$ 的值域为 D_y , 如果对于 D_y 中的任意一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的 x 值, 则此时按照函数的定义, 也确定了 x 是 y 的函数, 称此函数为 $y = f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上, 用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此也称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.

$y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

注意: $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图像相同.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数: 称下述五种函数为**基本初等函数**:

幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数).

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$.

反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数: 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而成, 并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域的不同的区间内, 其对应法则 f 有着不同的初等函数表达式, 则称此函数为**分段函数**.

7. 常见题目类型

(1) 已知 $f(\varphi(x))$ 的表达式, 求 $f(x)$ 的表达式.

(2) 已知奇(偶)函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ (或 $[-a, 0]$) 上的表达式, 求其在该区间的对称区间 $[-a, 0]$ (或 $[0, a]$) 上的表达式.

(3) 已知两个分段函数 $f(x)$, $g(x)$ 的表达式, 求复合函数 $f(g(x))$ 的表达式.

(4) 已知函数求反函数的表达式.

(5) 判断单调函数经过复合等运算后的函数的单调性.

(6) 求函数经过多次自身复合运算后的表达式.

(7) 求初等函数的定义域.

(二) 极限

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义: 对于数列 $\{x_n\}$, 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称常数 a 是 $\{x_n\}$ 的当 n 趋于无穷时的**极限**, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 也记为 $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$). 此时也称数列 $\{x_n\}$ **收敛**. 若 $\{x_n\}$ 的极限不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义:

① 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

② 设 $f(x)$ 当 x 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.

③ 设 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 也记为 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义:

① 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.

② 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$.

③ 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$.

(4) 无穷小量的定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量.

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则称数列 $|x_n|$ 为当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量.

类似地, 可定义当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量.

(5) 无穷大量的定义: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大量. 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

类似地, 可定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

类似地, 还可定义当 $x \rightarrow \infty$ 与 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷大量.

(6) 无穷小量阶的定义: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$.

① 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是比 β 高阶的无穷小量, 记为 $\alpha = o(\beta)$.

② 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A (A \neq 0)$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是与 β 同阶的无穷小量, 记为 $\alpha = O(\beta)$. 特别地, 若 $A = 1$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是与 β 等价的无穷小量, 记为 $\alpha \sim \beta$.

③ 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, α 是比 β 低阶的无穷小量.

类似地, 可定义当 $x \rightarrow \infty$ 与 $n \rightarrow \infty$ 情形下的无穷小量的阶.

2. 极限的有关性质

(1) 数列极限的有关性质

① (唯一性) 若数列 $|x_n|$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则极限是唯一的.

② (有界性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则数列 $|x_n|$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得对任意 n 均有 $|x_n| \leq M$.

③ (单调有界准则)若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \leq x_{n+1}$ (或 $x_n \geq x_{n+1}$)，且存在常数 $M > 0$ ，使 $|x_n| \leq M$ ，则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。

④ (夹逼准则)对于数列 $\{x_n\}$ ， $\{y_n\}$ ， $\{z_n\}$ ，若存在 $N > 0$ ，使得当 $n > N$ 时，满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

⑤ (保号性)若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，且 $a > 0$ (或 $a < 0$)，则存在正整数 N ，使得当 $n > N$ 时 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$)。

⑥ 若数列 $\{x_n\}$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ ，均有 $x_n \geq 0$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则 $a \geq 0$ 。

(2) 函数极限的有关性质

① (唯一性)若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，则极限是唯一的。

② (局部保号性)若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，且 $A > 0$ (或 $A < 0$)，则存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时， $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

③ 若 $f(x) \geq 0$ ，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，则 $A \geq 0$ 。

④ (局部有界性)若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta)$ ，使得 $f(x)$ 在该邻域内有界。

⑤ (极限与左、右极限的关系) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 。

⑥ (极限与无穷小量的关系) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$ ，其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$ 。

⑦ (夹逼准则)若在 x_0 的某去心邻域内有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ ，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

以上有关函数极限的性质当 $x \rightarrow \infty$ ， $x \rightarrow +\infty$ ， $x \rightarrow -\infty$ 时也有相应的形式，请读者自行写出。

⑧ (单调有界准则)若对于任意两个充分大的 x_1, x_2 ， $x_1 < x_2$ ，有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$)，且存在常数 M ，使 $f(x) < M$ (或 $f(x) > M$)，则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在。

(3) 数列极限与函数极限的关系

① 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$ 。

② 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ， $x_n \neq x_0$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

3. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

通过变量替换，这两个公式可写成更加一般的形式：设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ，且 $f(x) \neq 0$ ，则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

4. 极限的运算法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ，则：

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = AB.$$

$$(3) \text{若 } B \neq 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

上述性质当 $x \rightarrow \infty$ 时也成立。在数列极限的运算中，也有完全类似的法则。

5. 无穷小量的有关性质

(1) 有限个无穷小量的代数和是无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

(3) 有界变量乘无穷小量是无穷小量.

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$.

(5) 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量; 反之, 若 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量.

(6) (等价无穷小量替换) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$, 且 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 时也成立.

6. 常用的等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有以下等价的无穷小量:

(1) $\sin x \sim x$.

(2) $\tan x \sim x$.

(3) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

(4) $e^x - 1 \sim x$.

(5) $\ln(1+x) \sim x$.

(6) $(1+x)^a - 1 \sim ax$ (a 是实常数).

7. 常见的题目类型

(1) 利用极限的有关定义和性质的选择题.

(2) 利用等价无穷小量替换的性质求 “ $\frac{0}{0}$ ” 型极限.

(3) 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 求 “ 1^∞ ” 型极限.

(4) 利用 “通分相加” 等初等变形将 “ $\infty - \infty$ ” 型、“ $0 \cdot \infty$ ” 型、“ 1^∞ ” 型、“ 0^0 ” 型、“ ∞^0 ” 型化为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型求极限.

(5) 利用分子、分母有理化变形求极限.

(6) 利用 “拆项相消” 变形求 n 项和式的极限.

(7) 利用左、右极限求极限或证明极限不存在, 常见于分段函数.

(8) 利用 “夹逼准则” 求极限.

(9) 利用 “单调有界准则” 求数列的极限.

(10) 利用极限或无穷小量的性质求极限.

(11) 求有理函数的极限.

(12) 利用 “变量替换” 求极限.

(13) 利用洛必达法则求极限.

(14) 利用定积分的定义求 n 项和的极限.

(15) 利用收敛级数的通项的必要条件求极限.

以上(13)、(14)、(15)的有关内容见微分学、积分学和级数部分.

(三) 连续性

1. 函数连续的有关定义

(1) 设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内有定义. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义. 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

在上面两式中, 若记 $x=x_0+\Delta x$, 则可看出这两个定义是等价的.

(3) 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\epsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$, 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

以上三个定义是相互等价的.

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处右连续; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续.

(5) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内每一点处都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 还在 $x=a$ 处右连续, 在 $x=b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

2. 函数间断点的定义及分类

(1) 若在 $x=x_0$ 处, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 或 $f(x_0)$ 无定义, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处间断, $x=x_0$ 称为 $f(x)$ 的间断点.

(2) 若 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 则有:

① 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则称 $x=x_0$ 是可去间断点.

② 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 但不相等, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

③ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

④ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 且当 $x \rightarrow x_0$ 时函数值在摆动, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

上述中, ①、②两类称为第一类间断点, ③、④两类称为第二类间断点.

3. 连续函数的运算性质

(1) 若 $f(x)$, $g(x)$ 均在 $x=x_0$ 处连续, 则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 也在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 若 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 $x=x_0$ 处连续.

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, $y=f(u)$ 在 $u=a$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)) = f(a)$.

(4) 若 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在相应的区间 $I_y = \{x | x=f(y), y \in I_x\}$ 上单调且连续.

(5) 基本初等函数在其定义域内连续.

(6) 初等函数在其定义区间内连续.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) (有界性) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) (最值性) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值、最小值.

(3) (介值性) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取到介于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最小值与最大值之间的一切值.

(4) (零点存在定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

5. 常见的题目类型

(1) 函数经过加、减、乘、除和复合运算后的连续性判断.

(2) 分段函数在分界点处连续性的判断.

- (3) 间断点的判断与分类.
 (4) 开区间内连续函数有界性的判断.
 (5) 含参变量的极限式所表示的函数间断点的判断.
 (6) 利用“连续函数零点存在定理”证明方程的实根的存在性.
 (7) 无穷区间内连续函数有界性的判断.
 (8) 利用“连续函数的介值定理”证明函数可取到某定值或方程的根的存在性.

• 例题详解 •

例 1.1.1 已知 $f(x) = \sin x$, $f(\varphi(x)) = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____ 的定义域为 _____.

[答案] $\arcsin(1 - x^2)$, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

[提示] 此题主要考查函数的复合运算、反三角函数的性质以及初等函数的定义域的求法.

[解] 由于 $f(x) = \sin x$,

所以

$$f(\varphi(x)) = \sin \varphi(x).$$

由题设知

$$\sin \varphi(x) = 1 - x^2,$$

于是

$$\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2).$$

由于 $\arcsin x$ 的定义域是 $[-1, 1]$,

所以有

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1,$$

于是得

$$x^2 \leq 2,$$

即

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

所以, 此填空题的空白处应依次填 $\arcsin(1 - x^2)$, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

[典型错误]

- ① 对函数的复合运算不熟练.
- ② 将反三角函数的定义域记错.

例 1.1.2 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查“ $\infty - \infty$ ”型, “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限的计算方法. 由于本题是“平方根式之差”的形式, 可考虑用分子有理化的方法变形, 化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的极限.

[解]

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

所以, 本题应填 2.

[典型错误] 部分考生得 0 或 ∞ , 原因是没有掌握“ $\infty - \infty$ ”型极限的求法.

例 1.1.3 根据 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] =$ _____.

[答案] $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[提示] 本题考查的内容和解题的方法与例 1.1.2 一样, 所不同的是先要对根号内的“ n 项和式”求和.

【解】 由于

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \right] \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \\&= \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

所以, 应填 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【典型错误】 部分考生填 0 或 ∞ , 原因是没有先求和或不会处理“根式之差”.

例 1.1.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1.

【提示】 本题主要考查数列极限的概念. 若正确理解数列极限的定义, 就可用 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$ 与 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$ 的存在且相等来求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值.

【解】 设

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n}.$$

由于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k} = 1,$$

且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2k+1+1}{2k+1} \right)^{-1} = 1,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

【典型错误】 一些考生由极限 “ $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ ” 不存在而错误地推知本题的极限也不存在, 原因是数列极限的定义理解不深.

例 1.1.5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{6}{5}$.

【提示】 本题主要考查等价无穷小量的替换性质或重要极限的应用. 这是一个 “ $0 \cdot \infty$ ” 型的极限问题, 用等价无穷小量的替换性质将 $\sin \frac{2}{x}$ 换成 $\frac{2}{x}$, 此题将容易化为 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型的极限问题.

【解】

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(3x^2+5)}{(5x+3)x} \left(\sin \frac{2}{x} \sim \frac{2}{x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{10}{x^2}}{5 + \frac{3}{x}} \\&= \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

【典型错误】 有的考生填 0. 原因是错误地应用极限运算法则:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{2}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

例 1.1.6 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

〔答案〕 1, -4.

〔提示〕 本题主要考查等价无穷小量的替换性质和极限的四则运算法则.

〔解〕 由题设可知分子的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x (\cos x - b) = 0,$$

所以有分母的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0,$$

因而有

$$a = 1.$$

将 $a = 1$ 代入到原式, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (\cos x - b) \quad (\sin x \sim x, e^x - 1 \sim x) \\ &= 1 - b = 5, \\ & b = -4. \end{aligned}$$

解得

所以, 应依次填 1, -4.

〔典型错误〕 有的考生填 $b = -4$, a 任意, 原因是不加条件地应用洛必达法则:

$$5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - b)}{e^x - a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos x - b) - \sin^2 x}{e^x} = 1 - b,$$

故 $b = 4$, a 任意. 但是考生没有注意到, 若要用洛必达法则, 需要分母的极限为零.

例 1.1.7 设函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln [f(1) \cdot f(2) \cdots f(n)] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

〔答案〕 $\frac{1}{2} \ln a$.

〔提示〕 本题主要考查指数函数和对数函数的运算性质以及“ n 项和式”的极限求法.

〔解〕 由题设知

$$\begin{aligned} & f(1) \cdot f(2) \cdots f(n) \\ &= a^1 \cdot a^2 \cdots a^n = a^{1+2+\cdots+n} \\ &= a^{\frac{n(n+1)}{2}}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln [f(1) \cdot f(2) \cdots f(n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} \ln a = \frac{\ln a}{2}. \end{aligned}$$

〔典型错误〕 有的考生填 0. 原因是错误应用极限运算法则:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln [f(1) \cdots f(n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \ln a \\ &= \ln a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

例 1.1.8 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} =$ _____.

【答案】 e^2 .

【提示】 本题主要考查应用重要极限 “ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ” 来解决 “ 1^∞ ” 型不定式极限问题的能力. 将此极限式化为重要极限的形式, 用重要极限的结果即可解决问题.

【解】
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ [1 + \ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}} \right\}^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}. \end{aligned}$$

由于
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}} &= e, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln(1+x)}{x} &= 2, \end{aligned}$$

所以, 原式 $= e^2$. 应填 e^2 .

【典型错误】 有的考生填 1 或 ∞ . 原因是没有掌握 “ 1^∞ ” 型极限的求法, 错误地采取 “部分取极限” 的方法:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 1^{\frac{2}{x}} = 1,$$

或
$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^\infty = \infty.$$

例 1.1.9 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2an+1}{n(1-2a)} \right]^n =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{1-2a}$.

【提示】 本题主要考查数列的重要极限 “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ” 和连续函数求极限的性质 “ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ ”.

【解】
$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2an+1}{n(1-2a)} \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^{n(1-2a) \cdot \frac{1}{1-2a}} \\ &= \frac{1}{1-2a} \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right)^{n(1-2a)} \right] \\ &= \frac{1}{1-2a}. \end{aligned}$$

所以, 应填 $\frac{1}{1-2a}$.

例 1.1.10 若 $a > 0$, $b > 0$ 均为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} =$ _____.

【答案】 $(ab)^{\frac{3}{2}}$.

【提示】 本题主要考查函数的重要极限 “ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ” 和 “ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ”, 或考查洛必达法则的应用.

【解法 1】
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2}} \right]^{\frac{3(a^x + b^x - 2)}{2x}}, \end{aligned}$$

而由重要极限知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2}} = e,$$