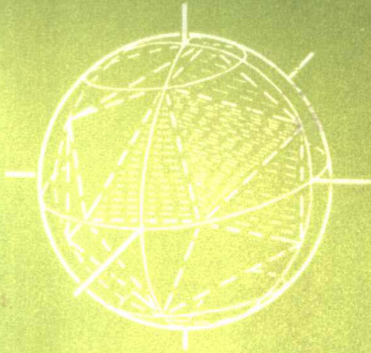
数学进修用书



孙贤铭

多面体和旋转体

DUOMIANTIHEXUANZHUANTI

浙江人民出版社

多面体和旋转体

数学进修用书

多面体和旋转体

孙贤铭

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书较系统地介绍了多面体和旋转体的性质以及它们的体积、表面积的计算，内容较中学教科书丰富、详尽，叙述也较全面、严谨，文字简明，深入浅出，不仅适合自学，同时还可供教学参考。

数学进修用书

多面体和旋转体

孙[illegible]铭

浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥境）
浙江省新华书店发行

开本：787×1092 1/32 印张 7.5 字数 170,000
1982年1月第 一 版
1982年1月第一次印刷
印数 1--12,500

统一书号：7103·1197
定 价：0.62 元

编辑说明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的。随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加。在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务。当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切。出版本丛书目的就是为他们进修提供一点比较系统的材料。编写时照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实。同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学。丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学。

前　言

几何学是研究现实世界空间形式的学科．从现实世界中的物体抽象出来的形的概念——几何图形，显然不完全在一个平面上．这种所有的点不完全在一个平面上的几何图形，叫做空间的图形．物体所占有的空间部分，叫做几何体．多面体和旋转体是常见的、基本的几何体，这也是本书研究的主要对象．

本书侧重于介绍立体几何的基础知识，它不同于一般的教科书．在选材上，比教育部新编中学几何教材有所扩大、加深、提高，但仍然注意联系中学几何教学实际．

第一章，对简单多面体的拓扑性质作了较全面的阐明．在论述多面体的性质时，尽量与平面几何中的有关知识进行对比：如平行六面体的性质及其与平行四边形的比较；空间对称的讨论及其与平面对称的对比等．最后，对于正多面体的性质、作法、旋转和对称都作了较详细的论述．

第二章，首先阐述多面体体积的理论基础．然后逐步介绍各种类型的多面体体积的计算，并对四面体的体积及其内切球和旁切球作了详尽的讨论．最后，还将各种多面体体积公式和度量方法作了总结．

第三章，介绍常见的圆柱、圆锥、圆台及球的性质和面积、体积的计算，它比中学教材都有所扩大，特别是：对母线为直线的旋转面作了较全面的讨论；至于作为圆锥截线的椭圆、双曲线、抛物线则用综合法作了论证．除此以外，还叙述了较一般的旋转体的性质，并且对各种多面体和旋转体体积公式作出了统一的阐明．

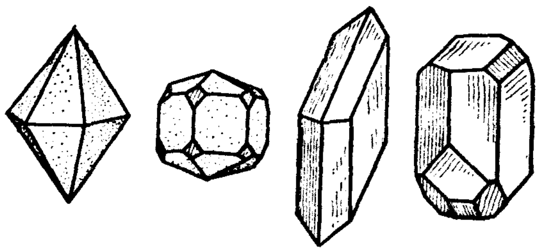
在每个章节后面，配备了相当数量的练习题，最后并附有解答．书中难度较大的内容或某些命题的另外证明，读者可根据自己的情况取舍．

目　　录

第一章　多　面　体

§1.1　多面体的一般性质

1. 多面体 有很多矿物的结晶，它们的表面都是平面多边形（图1—1），这里讲的平面多边形，是指所有顶点在同一平面上的多边形连同它的内部的平面部分．有的大跨度建筑物屋顶，它的表面也是平面多边形．



石英　　磷灰石　　石膏　　正长石

图1—1

如果一个几何体的表面是由有限个平面多边形组成的，那末这样的几何体就叫做**多面体**．

围成多面体的各个平面多边形叫做**多面体的面**．各相邻的多边形的公共边叫做**多面体的棱**．相交于同一点的各面所组成的多面角叫做**多面体的多面角**．各个多面角的顶点叫做**多面体的顶点**，它们的二面角、面角分别叫做**多面体的二面角、面**

角．连接不在一个面内的两个顶点的线段叫做**多面体的对角线**．经过不在一个面内的三个顶点的平面，它和多面体的截面叫做**多面体的对角面**．

多面体的面数至少是四，这样的多面体可由一个三面角被某一平面所截而得．多面体按照它的面数 f 叫做 **f 面体**，如图 1—2 分别是四、五、六、七面体．

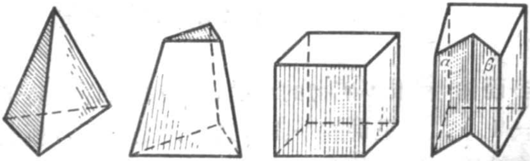


图 1—2

如果多面体满足下列各条件，便叫做**简单多面体**．

1）多面体的所有面都是简单多边形；*

2）相交于同一点的多面体的面组成一个多面角；

3）多面体的各顶点不在各面的内部，也不在各棱的内部；

4）多面体的任何两棱没有公共内部的点，任何棱与面也没有公共内部的点．

图 1—2 所画的多面体都是简单多面体．但是，简单多面体的形状并不一定"简单"，如图 1—3 所画的是由九个四边形所围成的"环状形"的多面体，它是简单多面体，因为满足以上所举的条件．

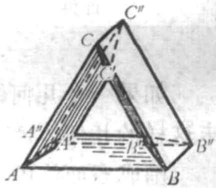


图 1—3

图 1—4 所画的七面体不是简单多面体，因为它的两顶点 D、D' 分别在两棱 AB、$A'B'$ 内，而棱 DD' 在面

* 一个多边形，如果它的全部顶点互不相同，没有一个顶点在它的边内，并且它的任何两边没有公共内部的点，就叫做简单多边形．

$ABB'A'$ 的内部，同时面 $ABCDE$、$A'B'C'D'E'$ 都不是简单多边形.

图 1 — 5 所画的九面体不是简单多面体，它虽然满足条件 1)、3)、4)，但是相交于点 S 的各面构成两个三面角 $SABC$ 和 $SA'B'C'$.

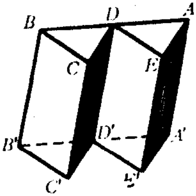


图 1 — 4

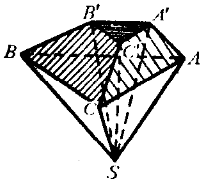


图 1 — 5

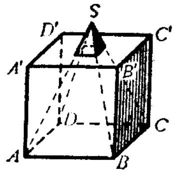


图 1 — 6

最后，图1—6所画的也不是简单多面体，因为它的棱 SA、SB、SC、SD 和面 $A'B'C'D'$ 的内部有公共点.

如果把多面体的任意一面伸展成平面，而这个多面体的所有其他各面都在这个平面的同旁时，这样的多面体叫做**凸多面体**，如图 1 — 2 中前三个多面体都是凸的，最后的多面体就不是凸的，因为它不在面 α（或 β）伸展所成的平面的同旁.显然图 1 — 3 到图 1 — 6 的多面体都不是凸多面体. 如果凸多面体被一平面所截，那末所得的截面总是凸多边形. 因此，如果多面体被一平面所截得的截面不是凸多边形，那末这多面体不是凸的.

分别记多面体、简单多面体、凸多面体的集合为 P、Q、R，则这三个集合的包含关系为 $P \supset Q \supset R$.

另一方面，非简单多面体一般可以分割成简单多面体，如图 1 — 4 的七面体由棱 DD' 分割为两个简单多面体，图 1 — 5 的九面体由对角面 SAA'、SBB'、SCC' 分割为三个简单多

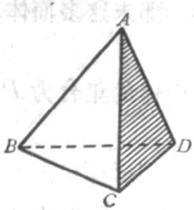
面体．和简单多边形可以分割成三角形类似，简单多面体可以分割成四面体，而四面体是面数最少的凸多面体．因此本书限于研究凸多面体．

2．欧拉定理　多面体的几何性质可以分作两类．关于棱长、面角及二面角的大小、面的面积等性质属于一类，叫做**度量性质**．另一类只与多面体的顶点数、面数和棱数等有关的性质，叫做**拓扑性质**．

计算图1—2的每个多面体的顶点数(v)、面数(f)、和棱数(e)都可以看到$v+f-e=2$．这个有趣的性质，在1640年由笛卡儿发现，1752年由欧拉再度发现并加以运用．不仅凸多面体，而且还有较广泛一些的多面体都有着这样的性质．让我们用多面体的变形来讨论它．

考虑任意一个多面体，以四面体为例，假定它的面是用橡胶薄膜做成的，如果充以气体，那么它就连续变形，最后可变成一个球面(图1—7)．在连续变形时，多面体的顶点数、面数和棱数仍保持不变．

象这样，表面连续变形，可变为球面的多面体叫做**第零类多面体**．也就是说，一个第零类多面体与一个球之间可以建立一对一的“连续”对应．球面上的棱所组成的每个简单封闭曲线，把球面分成两部分(如图1—7中的ABC)；对应的第零类



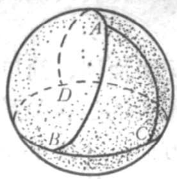


图1—7

多面体的棱所组成的每个简单封闭折线(叫做**多面体的划界**)，也把多面体的表面分成两部分，也就是说，第零类多面体的每一个划界把它的表面分成两部分，只有零个划界(没有一个划界)不把它的表面分成两部分. 对于这种多面体，我们有

欧拉定理 *第零类多面体的顶点数 v、面数 f 和棱数 e 之间有下列关系*

$$v+f-e=2.$$

这个 $v+f-e$ 的值叫做**多面体的特征数**.欧拉定理就是说：第零类多面体的特征数是 2.

证明 首先利用变形的方法，证明四面体的特征数是 2.

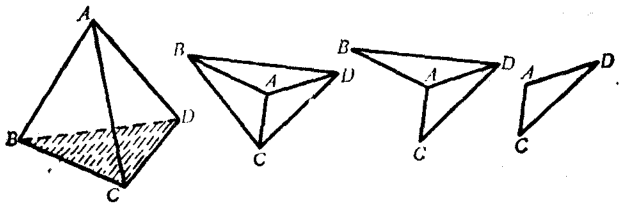


图 1—8

将四面体 $ABCD$ 的一个面 BCD 去掉，再使它变形为平面图形，得到由三角形构成的三角网络(图 1—8). 这时，四面体的顶点数 v、棱数 e 和剩下的面数 $f_1(=f-1)$ 变形后都没有变，因此，只要对三角网络证明 $v+f_1-e=1$. 分下面三步进行：

1)在三角网络中，先去掉有一棱在边界上的 $\triangle ABC$ 的棱 BC，就减少了一个面 ABC，由于 f_1-e、v 都不变，因此 $v+f_1-e$ 的值不变.

2)再去掉有二棱在边界上的 $\triangle ABD$ 的二棱 AB、AD，就减少了一个面 ABD，又减少了一个顶点 B，因此 $v+f_1-e$的

值仍不变.

3)从剩下的一个 $\triangle ACD$，得到 $v+f_1-e=3+1-3=1$.

最后，加上最初去掉的一个面，得到四面体的特征数

$$v+f-e=2.$$

用类似的方法可以证明任意第零类多面体的特征数是 2.

将第零类多面体(如图 1—9(1))的一个面去掉，再使它变为平面网络(如图 1—9(2)). 这时，多面体的顶点数 v、棱数 e 和剩下的面数 f_1 变形后都没有变.

先将平面网络照下述方法划为由三角形构成的网络：在一个还不是三角形的简单多边形中，添上一条对角线. 这时棱数和面数都增加了一个，顶点数没有变，因此 $v+f_1-e$ 的值不变. 这样逐次画上一些对角线，就可以把平面网络划为三角网络(如图 1—9(3))，这时 $v+f_1-e$ 的值不变.

又在三角网络中，有一些三角形有一边或二边在边界上. 有一边在边界上的三角形(如图 1—9(3)的 ABC)，我们去掉

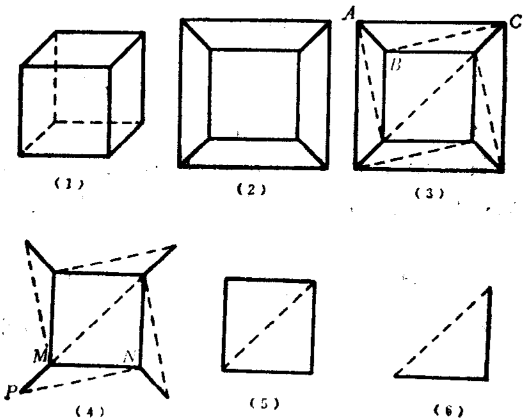


图 1—9

这一边，因而去掉一个面，所以 $v+f_1-e$ 的值不变. 有两边在边界上的三角形(如图 1 — 9 (4)的 MNP)，我们去掉这两边，因而棱数减少二个、面数减少一个、顶点数也减少一个，所以 $v+f_1-e$ 的值仍然不变. 我们逐次去掉边界上的三角形，每次都没有改变 $v+f_1-e$ 的值. 最后剩下一个三角形 (如图 1 — 9 (6))，这时面数是 1，顶点数和棱数都是 3，所以 $v+f_1-e=3+1-3=1$.

加上最初去掉的一个面，就得到第零类多面体的特征数

$$v+f-e=2.$$

图 1 — 2 的多面体都是第零类多面体，它们的表面连续变形后都变为球面，而且 $v+f-e=2$；图 1 — 3 的环状形多面体则是非零类多面体，它的表面连续变形后就不能变为球面，而变为环面(救生圈面)，这时，$v=9$、$f=9$、$e=18$，$v+f-e=0$；图 1 —10 的双环形多面体是由图 1 — 3 的两个环形多面体构成，它也是非零类多面体，它的表面连续变形后不能变为球面，也不能变为环面，而变为双环面. 这时，$v+f-e=14+16-32=-2$.

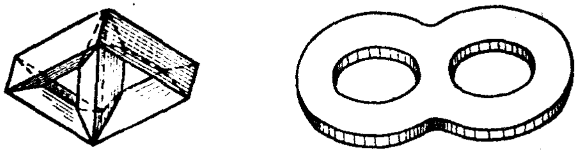


图 1 —10

非零类多面体，可用下面定义分作第一、第二、…、第 k 类多面体.

如果一个多面体有 k 个没有公共点的划界仍不能将它的表面分成两部分，而每 $k+1$ 个没有公共点的划界能将它的表面

分成两部分，便叫它做第 k 类多面体.

欧拉定理可以推广到第 k 类多面体，也就是：

任何第 $k(k\geqslant 0)$ 类多面体的顶数 v、面数 f 和棱数 e 之间有下列关系

$$v+f-e=2-2k.$$ （它的证明超出了本书的范围）

3．简单多面体的拓扑性质.

1）简单多面体的面角数是它的棱数的两倍.

因为多面体的面角数就是多面体各个面的内角数之和，每一个多边形面的内角数就是它的边数，而简单多面体的每一条棱是相邻两个多边形面的公共边，所以简单多面体的面角数是它的棱数的两倍.

假设多面体的顶点数为 v、面数为 f、棱数为 e，从性质1)立即知道：

1° 如果简单多面体的各面都是n边形，那末 $fn=2e(n\geqslant 3)$.

2° 如果简单多面体的各多面角都是 p 面角，那末 $vp=2e$ $(p\geqslant 3)$.

因此，对于任何简单多面体，一定有 $3f\leqslant 2e$，$3v\leqslant 2e$.

3° 如果第 k $(k\geqslant 0)$ 类多面体的各面都是 n 边形，那末

$$2v=4(1-k)+(n-2)f.$$

事实上，将 $e=\dfrac{fn}{2}$代入 $v+f-e=2(1-k)$

就得 $$2v=4(1-k)+(n-2)f.$$

特别，如果凸多面体的各面都是三边形，那末由 $k=0$，$n=3$ 得到 $f=2v-4$.

4° 如果第 $k(k\geqslant 0)$ 类多面体的各多面角都是 p 面角，那末

$$2f=4(1-k)+(p-2)v.$$

2) 棱数是 e，面数是 f 的多面体的各面角的和等于 $4d(e-f)$. 这里 d 表示直角.

已知多面体有 f 个面和 e 条棱，并且它的各面分别是 n_i 边形 $(i=1,2,\cdots,f)$，根据性质 1)得：

$$\sum_{i=1}^{f} n_i = n_1+n_2+n_3+\cdots+n_f = 2e.$$

因为 n_i 边形的内角和等于 $2d(n_i-2)(i=1,2,\cdots,f)$，所以所有各面的内角和等于

$$\sum_{i=1}^{f} 2d(n_i-2) = 2d\cdot 2e-2d\cdot 2f = 4d(e-f).$$

例 试证：除了四面体外，不存在其他凸多面体，它的任何两顶点的连线都是棱.

证明 若多面体有 v 个顶点，它们互相连接成棱，则棱数 $e=C_v^2=\dfrac{v(v-1)}{2}$. 每一条棱是两个邻面的边界，而每一个面至少有三条棱作边界，因此多面体的面数 $f\leqslant\dfrac{2}{3}C_v^2$. 利用凸多面体的欧拉定理，得到

$$v+\frac{2}{3}C_v^2\geqslant C_v^2+2.$$

即 $$v^2-7v+12\leqslant 0.$$

或 $$(v-3)(v-4)\leqslant 0.$$

由于 v 的整数解只有 $v=3$，$v=4$. 但三个顶点不能成为多面体. 所以唯一的值是 $v=4$.

练 习 题 1.1

1．证明：(1) 凸多面体的面都是凸多边形；

(2) 凸多面体的多面角都是凸多面角；

(3) 一直线不能截凸多面体于两个以上的点.

2. 证明：(1) 如果由简单多面体的每一顶点所引出的棱数都是奇数，那末这个多面体的顶点数是偶数；

(2) 如果围成简单多面体的每一多边形面的边数都是奇数，那末这多面体的面数是偶数.

3. 证明在多面体中，有 $2e=3f_3+4f_4+5f_5+\cdots+nf_n=3v_3+4v_4+5v_5+\cdots+pv_p$，其中 e 表示棱数；$f_i(i=3,\cdots,n)$ 表示 i 边形的面数；$v_j(j=3,\cdots,p)$ 表示 j 面角的多面角数.

4. 证明有七条棱的多面体是不存在的.

5. 一多面体的棱数为30，面数为12，求它的各面角之和.

6. 证明有奇数个面而每个面都有奇数条边的多面体是不存在的.

7. 已知凸多面体的各多面角都是四面角，求证 $f=v+2$.

§1.2 棱　　柱

1. 棱柱的一般性质　有两个面互相平行，其余每相邻两个面的交线平行的多面体叫做**棱柱**. 在棱柱中，两个互相平行的面叫做**棱柱的底面**. 其余各面叫做**棱柱的侧面**. 相邻两个侧面的公共边叫做**棱柱的侧棱**. 两个底面间的距离叫做**棱柱的高**. 过不在同一侧面上的任意两条侧棱所作平面和棱柱的截面叫做**棱柱的对角面**（图 1—11）.

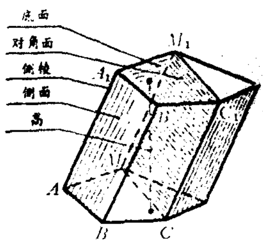


图 1—11

如图 1—11中棱柱，通常记作 $ABC\cdots M-A_1B_1C_1\cdots M_1$，也可以简单记作 AC_1.

棱柱是一种特殊的多面体，它有多面体的一般性质，但也