锦囊妙解

中学生数理化系列

主编/张延良

不可不知的素材

MATH

高考数学

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解 中学生数理化系列

不可不知的素材

高考数学

总 策 划　司马文

丛书主编　万强华

编　　委　刘　芬　江华平　欧阳晔

郑永盛　吴小平　管厚坤

胡志芳　吴小菲　王智军

张和良　张延良　黄维

本册主编　张延良

编　　者　柯　莹　罗燕红　赖荣振

机械工业出版社

本书是“锦囊妙解中学生数理化系列”的《不可不知的素材　高考数学》分册，它体现了新课标改革精神，不受任何版本限制。书中每章节按选择题、填空题、解答题等题型(不包括实验题)分开编写。题目内容选取大部分以近两年的高考题为主，经典题为辅。题型全，解析简要，解答规范。本书内容新颖，题材广泛，目的是要从本质上提高学生的知识理解能力，以及分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

不可不知的素材. 高考数学/张延良主编. —北京：机械工业出版社，2006.6

(锦囊妙解中学生数理化系列)

ISBN 7-111-18930-2

Ⅰ. 不… Ⅱ. 张… Ⅲ. 数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006)第 056593 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)

策划编辑：石晓芬

责任编辑：胡　明

责任印制：洪汉军

北京双青印刷厂印刷

2006 年 9 月第 1 版・第 1 次印刷

169mm×230mm 13 印张 ・314 千字

定价：19.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话：(010)68326294

编辑热线：(010)88379037

前 言
Preface

武林竞技，想要取胜，或"一把枪舞得风雨不透"，或有独门绝技，三招之内，挑敌于马下。古有"锦囊妙计"，今有"锦囊妙解"辅导系列。继"锦囊妙解——中学生英语系列"、"锦囊妙解——中学生语文系列"之后，我们又隆重推出了"锦囊妙解——中学生数理化系列"。

这是一套充满智慧的系列丛书，能使你身怀绝技，轻松过关斩将，技增艺长。这更是一套充满谋略的系列丛书，能使你做到"风雨不透"，意外脱颖而出，圆名校梦。

这套丛书紧密结合教材内容，力求将教学需求和实际中高考要求完美结合。在体例设计，内容编排，方法运用，训练考查等方面都充分考虑各个年级学生的实际，由浅入深，循序渐进，稳步提高，并适度、前瞻性地把握中高考动态和趋向，在基础教学中渗透中高考意识。

本丛书作者均为在初中、高中多年一线教学的精英，每册都由有关专家最后审稿定稿。

这套丛书按中高考数、理、化必考的知识点分成三大系列：《不可不读的题》、《不可不知的素材》和《不可不做的实验》。从七年级到高考，并按数学、物理、化学分类，配套中学新课标教材，兼顾老教材，共有36册。

本丛书有如下特点：

1. 选材面广，知识点细，针对性强

在《不可不读的题》中，我们尽量选用当前的热点题，近几年各地的中高考题，并有自编的创新题。在《不可不知的素材》中，我们力求做到：知识面广、知识点细而全、知识网络清晰，并增加一些中高考的边缘知识和前瞻性知识。在《不可不做的实验》中，我们针对目前中学生实验水平低、实验技能差、实验知识缺乏的情况，结合课本教材的知识网络，详细而全面地介绍了实验。有实验目的、原理、步骤、仪器，实验现象、结论、问题探讨，并增加了实验的一般思路和方法。除介绍课本上的学生实验和教师的演示实验外，还增加了很多中高考中出现的课外实验和探究实验。

2. 指导到位

本丛书在指导学生处理好学习中的基础知识的掌握，解题能力的娴熟，实验能力的提高方面，有意想不到的功效。选择本丛书潜心修炼，定能助你考场上游

刃有余，一路顺风，高唱凯歌。

3. 目标明确

在强调学生分析问题和解决问题能力的同时，在习题、内容上严格对应中高考命题方式，充分体现最新中高考的考试大纲原则和命题趋势。

梦想与你同在，我们与你同行。我们期盼：静静的考场上，有你自信的身影。我们坚信：闪光的金榜上，有你灿烂的笑颜。

本丛书特邀江西师范大学附属中学高级教师、南昌市学科带头人万强华担任主编。本分册由张延良主编。

我们全体策编人员殷切期待广大读者对丛书提出宝贵意见。无边的学海仍然警示着我们：只有不懈努力，才会取得胜利，走向辉煌。

编　　者

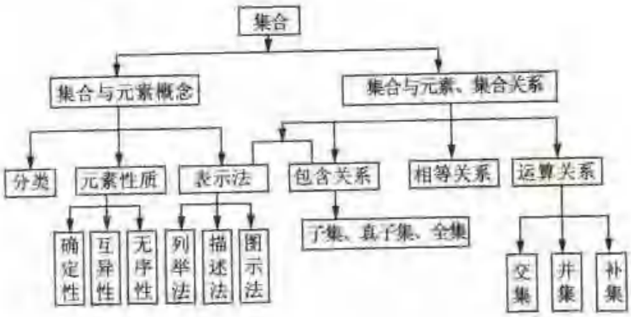
2006 年 6 月

目 录
Contents

第一章 集合与简易逻辑

第一节 集合及其运算

知识表解



知识与规律

（一）集合的基本概念及表示方法

1. 集合与元素

一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集，通常用大写字母 A、B、C…表示. 集合中的每个对象叫做这个集合的元素，通常用小写字 a、b、c…表示.

2. 集合的分类

集合
- 按元素属性分
  - 数集（元素是数）
  - 点集（元素是点）
  - 序数对（元素是有序数对）
  - ……
- 按元素多少分
  - 有限集（元素个数是有限个）
  - 无限集（元素个数是无限个）
  - 空集（不含任何元素）

3. 集合中元素的性质

集合有两个特性：整体性与确定性.

对于一个给定的集合，它的元素具有确定性、互异性、无序性.

4. 集合的表示方法

(1)列举法；(2)描述法；(3)图示法（韦恩图法）；(4)区间法（数集）；(5)字母法.

（二）元素与集合、集合与集合之间的关系

1. 元素与集合："$\in$"或"$\notin$"

说明：元素与集合之间是个体与整体的关系，不存在大小与相等关系，如 3 与$\{3\}$，只能是 $3\in\{3\}$，不是 $3=\{3\}$，再如 2 与$\{3\}$，只能是 $2\notin\{3\}$，不能是 $2\neq\{3\}$.

2. 集合与集合之间的关系

(1) 包含关系

① 子集：如果 $x\in A\Rightarrow x\in B$，则集合 A 是集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

显然，任何集合是它自身的子集，即 $A\subseteq A$；空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

② 全集：如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集. 全集通常用 U 表示. 显然，一切集合都是这个全集的子集.

(2) 相等关系

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么集合 A 和集合 B 叫做集合相等，记为

$A=B$. 显然，两个相等的集合的元素完全相同.

(3) 真子集关系

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$或 $B\supsetneqq A$. 显然空集是任何非空集合的真子集.

(4) 运算关系

集合的运算关系是在全集上进行的.

① 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$，且$x\in B\}$.

② 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$，或$x\in B\}$.

③ 补集：一般地，设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$)，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集(或余集)，记为 $\complement_S A$，即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$，且$x\notin A\}$.

(三) 集合之间的逻辑关系

1. 交集的运算性质

$A\cap B=B\cap A$，$(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq B$，$A\cap U=A$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

2. 并集的运算性质

$A\cup B=B\cup A$，$(A\cup B)\supseteq A$，$(A\cup B)\supseteq B$，$A\cup U=U$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

3. 补集的运算性质

$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$.

4. 分配律、结合律

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)-(A\cap B)\cap C$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

5. 反演律(摩根法则)

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

6. 传递性

若集合 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则集合 $A\subseteq C$；

若集合 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则集合 $A\subsetneqq C$.

(四) 有限集合的子集个数公式

设有限集合 A 中有几个元素，则 A 的子集个数有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$(个)，其中真子集的个数为 2^n-1(个)，非空子集个数为 2^n-1(个)，非空真子集个数为 2^n-2(个).

(五) 有限集合间的元素的个数公式

设有限集合 A 的元素个数为 $n(A)$，U 为全集，易得

(1) $n(A)+n(\complement_U A)=n(A\cup\complement_U A)=n(U)$

(2) $n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\complement_U B)=n(B)-n(B\cap\complement_U A)$

(3) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

身边的数学

康托尔与集合论

康托尔是19世纪末20世纪初德国伟大的数学家、集合论的创立者，是数学史上最富有想象力，最有争议的人物之一. 19世纪末他所从事的关于连续性和无穷的研究从根本上背离了数学中关于无穷的使用和解释的传统，从而引起了激烈的争论乃至严厉的谴责. 然而数学的发展最终证明康托尔是正确的. 他所创立的集合论被誉为20世纪最伟大的数学创造，集合概念大大扩充了数学的研究领域，给数学结构提供了一个基础. 集合论不仅影响了现代数学，而且也深深影响了现代哲学和逻辑学.

对康托尔来说，如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应，它就是无穷的. 它定义了基数、可数集合等概念，并且证明了实数集是不可数的. 康托尔最初的证明发表在1874年的一篇题为《关于全体实代数的特征》的文章中，它标志着集合论的诞生.

集合论是现代数学中重要的基础理论. 它的概念和方法已经渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支以及物理学和质点力学等自然科学部门，为这些学科提供了奠基的方法，改

变了这些学科的面貌. 几乎可以说，如果没有集合论的观点，很难对现代数学获得一个深刻的理解. 所以集合论的创立不仅对数学基础的研究有重要意义，而且对现代数学的发展也有深远的影响.

今天集合论已成为整个数学大厦的基础，康托尔也因此成为世纪之交的最伟大的数学家之一.

联系生活应用题

例1 （抽检商品总数问题）某行政管理部门在一次对市场商品的抽检中，发现有 80 种商品质量达标，有 71 种商品价格合理，其中 50 种商品质量达标且价格合理，另有 29 种商品质量次且价格高. 试问本次抽检的商品总数为多少？

解 设 U={被抽检的商品}，A={质量达标的商品}，B={价格合理的商品}，则 $A\cap B$={质量达标且价格合理的商品}，$\complement_U(A\cup B)$={质量次且价格高的商品}，抽检的商品种数 = $\mathrm{card}(U)$ = 价格合理或质量达标的商品种数 + 价格高且质量次的商品种数 = $\mathrm{card}(A\cup B)+\mathrm{card}(\complement_U(A\cup B))$，其中价格高且质量次的商品种数 = $\mathrm{card}(\complement_U(A\cup B))=29$（种），价格合理或质量达标的商品种数 = $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)=80+71-50=101$（种），所以被抽检的商品种数为 $101+29=130$（种）.

【评注】 有不少同学可能会误认为 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$，那是对 $A\cup B$ 的理解有错误，$\mathrm{card}(A\cup B)$ 中既包含了质量达标的商品种数，又包含了价格合理的商品种数，但是，那些质量达标且价格合理的商品数就被计算了两次，所以应该再减去一次. 即

$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B).$$

这在集合论中称为容斥原理，是解决与元素个数有关的问题的重要理论依据.

其实，本题还有另一种方法，称为韦恩图法. 如图 1－1－1，全集 U 被分成四部分：$A\cap B$、$(\complement_U A)\cap B$、$(\complement_U B)\cap A$、$\complement_U(A\cup B)$，由已知可得 $\mathrm{card}(A\cap B)=50$，$\mathrm{card}((\complement_U A)\cap B)=21$，$\mathrm{card}((\complement_U B)\cap A)=30$，$\mathrm{card}(\complement_U(A\cup B))=29$，所以 $\mathrm{card}(U)=50+21+30+29=130$.

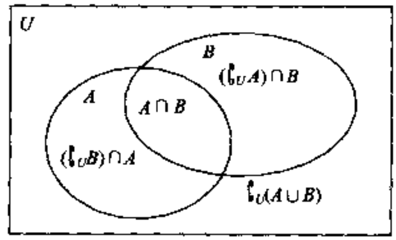


图 1－1－1

这四个部分的元素个数与全集的元素个数共五个量. 只要知道了其中的四个，求另一个就很容易了.

例2 有 a、b、c 三本新书，至少读过其中一本的有 18 人，读过 a 的有 9 人，读过 b 的有 8 人，读过 c 的有 11 人，同时读过 a、b 的有 5 人，同时读过 b、c 的有 3 人，同时读过 c、a 的有 4 人，那么 a、b、c 全部都读过的有几人？

解 设 A={读过 a 的人}，B={读过 b 的人}，C={读过 c 的人}，则 $A\cap B$={同时读过 a、b 的人}，$A\cap C$={同时读过 a、c 的人}，$B\cap C$={同时读过 b、c 的人}，$A\cap B\cap C$={a、b、c 全都读过的人}，$A\cup B\cup C$={至少读过 a、b、c 中一本书的人}，由容斥原理知：

$$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$$

$\therefore$ $18=9+8+11-5-4-3+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

$\therefore$ $\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=2$（人）.

$\therefore$ a、b、c 全部都读的有 2 人.

【评注】 例 1、例 2 中分别用到了两个集合与三个集合中的容斥原理，其实这一结论还可以推广到更多个集合的情况，例如：

$\text{card}(A\cup B\cup C\cup D)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)+\text{card}(D)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(A\cap D)-\text{card}(B\cap C)-\text{card}(B\cap D)-\text{card}(C\cap D)+\text{card}(A\cap B\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap D)+\text{card}(A\cap C\cap D)+\text{card}(B\cap C\cap D)+\text{card}(A\cap B\cap C\cap D)$

三个集合的容斥原理可以用韦恩图来解释，如图 1-1-2，如果将 A、B、C 的元素个数都加起来，显然 $A\cap B$ 被加了两次. $B\cap C$ 也被加了两次. $A\cap C$ 也被加了两次，因此要将它们全都减去，但在此过程中，$A\cap B\cap C$ 先是被加了三次，后来又被减了三次，所以最后还要再补加一个 $A\cap B\cap C$ 的元素个数.

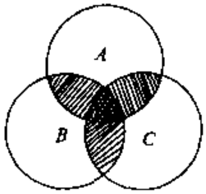


图 1-1-2

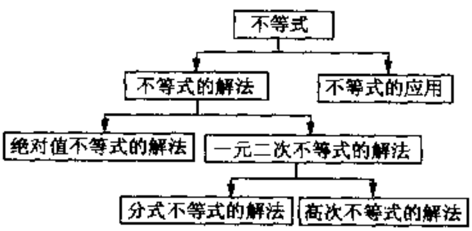
[illegible] （谁能当选的问题）在某个国家的总统竞选中，有三分之二的人认为 A 比 B 好，有三分之二的人认为 B 比 C 好，有三分之二的人认为 C 比 A 好，则三个候选人 A、B、C 中，谁最有可能当选.

解 初看起来，你可能会以为 A 一定会当选. 其实答案应该是不能确定，现举一反例如下：设有 $\frac{1}{3}$ 的选民认为 A 比 B 好且 B 比 C 好，$\frac{1}{3}$ 的选民认为 B 比 C 好且 C 比 A 好，$\frac{1}{3}$ 的选民认为 C 比 A 好且 A 比 B 好，这样综合起来认为 A 比 B 好的有 $\frac{2}{3}$ 的选民，认为 B 比 C 好的有 $\frac{2}{3}$ 选民，认为 C 比 A 好的也有 $\frac{2}{3}$ 的选民，所以在这次选举中，没有谁占优势.

【评注】 此题的实质也跟集合的元素有关，要说明一下结论不正确，只要举出一个反例即可.

第二节 不等式的解法

知识表解



知识与规律

（一）含有绝对值符号的不等式的解法

1. 同解定理法

(1) 不等式的同解定理

当 $a>0$ 时，$|f(x)|<a\Leftrightarrow -a<f(x)<a$；

当 $a>0$ 时，$|f(x)|>a\Leftrightarrow f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$.

(2) 推广结论

当 $a\in\mathbf{R}$ 时，

① 若 $a>0$ 时，$|f(x)|<a\Leftrightarrow -a<f(x)<a$；

$|f(x)|>a\Leftrightarrow f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$

② 若 $a=0$ 时，$|f(x)|<a$ 无解；

$|f(x)|>a\Leftrightarrow f(x)\neq 0$.

③ 若 $a<0$ 时，$|f(x)|<a$ 无解；

$|f(x)|>a\Leftrightarrow f(x)$ 有意义.

当 $g(x)>0$ 时，$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ 或 $f(x)>g(x)$.

(3) $|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow[f(x)]^2>[g(x)]^2\Leftrightarrow[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]>0$.

2. 零点分段法

依据不等式中所含各绝对值的零点，将数轴划分为若干区间，通过对各区间取值情况的讨论，去掉绝对值符号，从而求解，所谓“零点”就是使各绝对值为 0 的 x 值，在数轴上对应的点.

如：解不等式 $|x+1|+|x-1|\leqslant 3$.

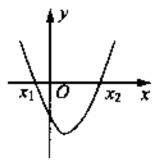
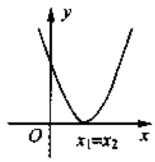
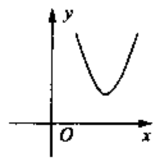
可转化为 $\begin{cases}x<-1\\-x-1-x+1\leqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\x+1-x+1\leqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1\\x+1+x-1\leqslant 3.\end{cases}$

最后求三个不等式组群集的并集.

（二）一元二次不等式的解法

1. 一元二次不等式的概念

只含一个未知数，并且经过合并同类项后，未知数的最高次数为 2 的整式所组成的不等式，叫做一元二次不等式.

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	两相异实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(x_1<x_2)$	两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\mid x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geqslant 0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2\}$	**R**	**R**
$ax^2+bx+c\leqslant 0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$	$\left\{x\mid x=-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$\varnothing$

2. 简单分式不等式和高次不等式的解法

(1) 形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 型

$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0;\end{cases}$

或 $\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)<0.\end{cases}$

(2) 形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 型

$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)<0;\end{cases}$

或 $\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)>0.\end{cases}$

(3) 形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0$ 型

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant 0,\\g(x)\neq 0.\end{cases}$

(4) 形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0$ 型

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant 0,\\g(x)\neq 0.\end{cases}$

身边的数学

哥德巴赫猜想

我们容易得出：$4=2+2$，$6=3+3$，$8=5+3$，$10=7+3$，$12=7+5$，$14=11+3$……那么，

是不是所有的大于 2 的偶数，都可以表示为两个素数的和呢？这个问题是德国数学家哥德巴赫(CGoldbach，1690--1764)于 1742 年 6 月 7 日在给大数学家欧拉的信中提出的，所以被称作哥德巴赫猜想. 同年 6 月 30 日，欧拉在回信中认为这个猜想可能是真的，但他无法证明.

现在，哥德巴赫猜想的一般提法是：每个大于等于 6 的偶数，都可表示为两个奇素数之和；每个大于等于 9 的奇数，都可表示为三个奇素数之和. 其实，后一个命题就是前一个命题的推论. 哥德巴赫猜想貌似简单，要证明它却着实不易，成为数学中一个著名的难题. 18、19 世纪，所有的数论专家对这个猜想的证明都没有作出实质性的推进，直到 20 世纪才有所突破. 1937 年苏联数学家维诺格拉多夫(uMBиноградов，1891—1983)，用他创造的“三角和”方法，证明了“任何大奇数都可表示为三个素数之和”. 不过，维诺格拉多夫的所谓大奇数要求大得出奇，与哥德巴赫猜想的要求仍相距甚远.

直接证明哥德巴赫猜想不行，人们采取了迂回战术，就是先考虑把偶数表示为两数之和，而每一个数又是若干素数之积. 如果把命题“每一个大偶数可以表示成为一个素因子个数不超过 a 个的数与另一个素因子不超过 b 个的数之和”记作“$a+b$”，那么哥氏猜想就是要证明“1+1”成立. 1966 年，我国年轻的数学家陈景润，在经过多年潜心研究之后，成功地证明了“1+2”，也就是“任何一个大偶数都可以表示成一个素数与另一个素因子不超过 2 个的数之和”，这是迄今为止，这一研究领域最佳的成果，距摘取这颗“数学王冠上的明珠”仅一步之遥，在世界数学界引起了轰动. “1+2”也被誉为陈氏定理.

联系生活应用题

例 1 (2004 年北京)某段铁路上依次有 A、B、C 三站，$AB=5$ km，$BC=3$ km. 在列车运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 07 分到达 B 站并停车 1 min，8 时 12 分到达 C 站. 在实际运行时，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停留 1 min，并在行驶时以同一速度 v km/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(1) 分别写出列车在 B、C 两站的运行误差；

(2) 若要求列车在 B、C 两站的运行误差之和不超过 2 min，求 v 的取值范围.

解 (1) 列车在 B、C 两站的运行误差(单位：min)分别是 $\left|\frac{300}{v}-7\right|$ 和 $\left|\frac{480}{v}-11\right|$.

(2) 由于列车在 B、C 两站的运行误差之和不超过 2 min，所以 $\left|\frac{300}{v}-7\right|+\left|\frac{480}{v}-11\right|\leqslant 2$； ①

当 $0<v\leqslant\frac{300}{7}$ 时，①式变形为 $\frac{300}{v}-7+\frac{480}{v}-11\leqslant 2$.

解得 $39\leqslant v\leqslant\frac{300}{7}$；

当 $\frac{300}{7}<v\leqslant\frac{480}{11}$ 时，①式变形为 $7-\frac{300}{v}+\frac{480}{v}-11\leqslant 2$.

解得 $\frac{300}{7}<v\leqslant\frac{480}{11}$；

当 $v>\frac{480}{11}$ 时，①式变形为 $7-\frac{300}{v}+11-\frac{480}{v}\leqslant 2$.

解得 $\frac{480}{11}<v\leqslant\frac{195}{4}$.

综合所述，v 的取值范围是 $\left[39,\frac{195}{4}\right]$.

【评注】 本题主要考查不等式基本知识，考查应用数学知识分析问题和解决问题的能力. 本题通过铁路列车的运行作为知识背景，

新颖而具有实用价值，需要根据题中条件构建不等式①，这恰是近年高考命题的热点和重点题型，在解答过程中蕴涵着分类讨论思想、模型思想和构造法.

例2 某工厂以每件50元的价格销售一种产品，可销售8000件. 如果这种产品的单价每增加1元，销售量就减少100件，为了使这种产品销售收入不低于420000元，单价应定为多少？

解 设这种产品单价为 x 元，其中 $x\geqslant 50$ 元. 单价比50元增加 $(x-50)$ 元时，销售量减少件数为 $100(x-50)$，此时销售件数为

$$8000-100(x-50)=13000-100x(\text{件}),$$

而销售收入为

$$(13000-100x)\cdot x(\text{元}).$$

依据题意，销售收入应满足

$$(13000-100x)\cdot x\geqslant 420000,$$

即 $x^2-130x+4200\leqslant 0$,

解之 $60\leqslant x\leqslant 70$.

即这种产品单价为60～70元之间时，销售收入不少于420000元.

例2 某工厂生产的商品A，若每件定价为80元，则每年可销售80万件，政府税务部门对在市场上销售的商品A要征收附加税，为了增加国家收入又要有利于生产发展与市场活跃，必须合理地确定征税的税率. 根据调查分析，若政府对商品A征收附加税率为 $p\%$（即每销售100元对，征税 p 元）对，每年销售量将减少 $10p$ 万件. 试问：

(1) 若税务部门对商品A每年所收的税金不少于96万元，求 p 的范围；

(2) 若税务部门仅仅考虑每年所获的税金最高，求此时 p 的值.

解 由题设可知，当税率为 $p\%$ 时，销售额将减少，只能卖出 $(80-10p)$ 万件，此时销售金额为 $80(80-10p)$ 万元，税收金额为 $f(p)=80(80-10p)\cdot p\%$ 万元.

(1) 由题设可知 $\begin{cases}80(80-10p)\cdot p\%\geqslant 96,\\ 0<p<8,\end{cases}$

解之 $2\leqslant p\leqslant 6$.

即当税务部门对商品A每年所收的税金不少于96万元时，p 的范围是 $2\leqslant p\leqslant 6$.

(2) 当 $0<p<8$ 时，

$f(p)=80(80-10p)\cdot p\%=-8(p-4)^2+128$

$\therefore$ 当 $p=4$ 时，$f(p)_{\max}=128$.

即当 $p=4$ 时，国家所收的税金最高是128万元.

例2 甲、乙、丙三种食物的维生素A、B含量及成本见下表：

某食物营养研究所想用 x kg 甲种食物，y kg乙种食物，z kg 丙种食物配成100kg混合物，并使混合物至少有56000单位维生素A和63000单位维生素B.

	维生素A/kg	维生素B/kg	成本/(元/kg)
甲	600	800	11
乙	700	400	9
丙	400	500	4

(1) 用 x,y 表示混合物的成本 C(元)；

(2)确定 x、y、z 的值使成本最低.

解 (1) 依据题意，知

$$C=11x+9y+4z.$$

$\because x+y+z=100$，即 $z=100-x-y$,

$\therefore C=400+7x+5y$.

(2) 由题意可知，有以下不等式组

$$\begin{cases}600x+700y+400z\geqslant 56000, & ①\\ 800x+400y+500z\geqslant 63000, & ②\end{cases}$$

将 $z=100-x-y$ 代入①、②，得

$$\begin{cases}2x+3y\geqslant 160,\\ 3x-y\geqslant 130.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{又}\because C&=400+7x+5y\\ &=400+2(2x+3y)+3x-y\\ &\geqslant 400+320+130=850,\end{aligned}$$

当且仅当 $\begin{cases}2x+3y=160\\ 3x-y=130\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=50\\ y=20\end{cases}$ 时，等式成立.

即当 $x=50$kg，$y=20$kg，$z=30$kg 时，混合

物成本最低为 850 元.

从以上几题看出,有一类最优化的应用问题,如最小(大)、最低(省)、合理调配、统筹安排等问题.一般都要用到不等式的知识,建立不等式或不等式组来求解.

例5 如图 1-2-1 所示.铁路拐弯处的曲率半径不允许小于 600m.如果某铁路拐弯处的弧小于 180°,而联结弧的两端所得的弦长为 156m.试确定弓形高 CD 的允许值范围.

分析 这是一个铁路建设中的实际问题.为了保障列车在拐弯处的行驶安全,在设计中需要考虑拐弯处弯曲的程度.这里用弓形 AOB 的高 CD 的允许值范围来描述弯曲的程度.

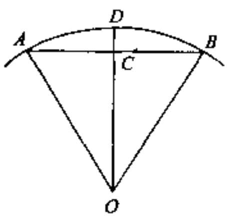


图 1-2-1

解 设 $AB=156$m.若 $OD\geqslant 600$m,问题转化为确定弓形 AOB 的高 CD 的范围.

设⊙O 的半径为 R,由图可知:

$$OC=OD-CD=R-CD,$$

$$AC=\frac{1}{2}AB=78\text{m}.$$

在 Rt△AOC 中,有

$$(R-CD)^2+78^2=R^2,$$

$$\therefore\quad \frac{CD^2+6084}{2CD}=R. \qquad ①$$

依据条件,$R\geqslant 600$m,

即 $\dfrac{CD^2+6084}{2CD}\geqslant 600$,

即 $CD^2-1200CD+6048\geqslant 0$, ②

解之 $CD\leqslant 5.1$ 或 $CD\geqslant 1194.9$

∵ $CD>0$,$\angle AOB<180°$

∴ $CD<R$,其解为 $0<CD\leqslant 5.1$.

令 $CD=4$m,从①式,得

$$R=\frac{16+6048}{8}\text{m}=762.5\text{m}>600\text{m}.$$

即弓形高 CD 的允许值范围在 $0<CD\leqslant 5.1$m之间.

例6 某工厂现有甲种原料 360kg,乙种原料 290kg,计划利用这两种原料生产 A、B 两种产品共 50 件.已知生产一件 A 种产品用甲种原料 9kg、乙种原料 3kg,可获利润 700 元;生产一件 B 种产品,需用甲种原料 4kg、乙种原料 10kg,可获利润 1200 元.

(1) 按要求安排 A、B 两种产品的生产件数有哪几种方案?请你设计出来;

(2) 设生产 A、B 两种产品获总利润为 y 元,其中一种的生产件数为 x,试用含 x 的代数式表示 y,并说明(1)中哪种生产方案获总利润最大,最大总利润是多少?

分析 这是一个生产安排问题,生产 A、B 两种产品件数,受到甲、乙两种原料的制约,而生产 A、B 两种产品的总利润也与两种产品件数有关.

解 (1)设安排生产 A 种产品 x 件,则 B 种产品生产$(50-x)$件,

由题意知 $\begin{cases}9x+4(50-x)\leqslant 360,\\3x+10(50-x)\leqslant 290,\end{cases}$

解之 $30\leqslant x\leqslant 32$.

∵ $x\in\mathbf{N}$,∴ $x=30,31,32$.

即生产方案有三种,生产 A 种产品分别为 30 件、31 件、32 件时,B 种产品分别相应地安排生产 20 件、19 件、18 件.

(2) 依据题意,得总利润函数为

$$y=700x+1200(50-x),$$

即 $y=-500x+60000$.

由此可知,y 随 x 的增大而减少.

∴ 当 $x=30$ 时,y 值最大,即

$$y_{max}=-500\times 30+60000=45000.$$

即安排生产 A 种产品 30 件,B 种产品 20 件时,利润最大,最大利润为 45000 元.

例6 甲工厂去年上交利税 40 万元,今后 5 年内计划每年平均增长 10%;乙工厂去年

上交利税比甲工厂少，今后5年内计划每年平均增长20%.这样从今年起，第二年乙工厂上交利税就能超过甲工厂，但是要到第三年末，才能使从今年开始的三年内上交利税的总和不少于甲工厂.求乙工厂去年大约上交利税多少万元(只取到整数万元)?

解 设乙厂去年上交利税 x 万元，从去年起，今后5年内，乙工厂上交利税数组成数列 $\{b_n\}$，则 $b_1=x,n=6$，公比为1.2；甲工厂上交利税组成数列 $\{a_n\}$，则 $a_1=40$，公比为1.1，根据题意，得不等式组

$$\begin{cases} b_1<a_1,\\ b_2\leqslant a_2,\\ b_3>a_3,\\ b_2+b_2<a_2+a_3,\\ b_2+b_3+b_4\geqslant a_2+a_3+a_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<40,\\ 1.2x\leqslant 40\times 1.1\\ 1.2^2x>40\times 1.1^2,\\ \dfrac{1.2x(1.2^2-1)}{1.2-1}<\dfrac{40\times 1.1\times(1.1^2-1)}{1.1-1},\\ \dfrac{1.2x(1.2^3-1)}{1.2-1}\geqslant\dfrac{40\times 1.1\times(1.1^3-1)}{1.1-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<40,\\ x\leqslant 36\dfrac{2}{3},\\ x>33\dfrac{11}{18},\\ x<35,\\ x\geqslant 33.34, \end{cases}\quad \therefore\quad 33\frac{11}{18}<x<35.$$

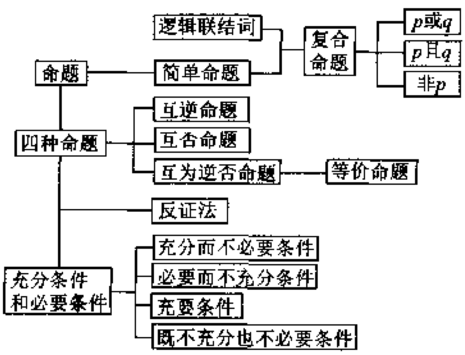
即乙工厂去年上交利税34万元.

这是一个与数列、不等式有关的实际问题.在列不等式组时，要认真审题，搞清每句话的含义.如“才能使从今年开始的三年内上交利税的总和不少于甲工厂”这句话应列两个不等式：$b_2+b_3<a_2+a_3$ 且 $b_2+b_3+b_4\geqslant a_2+a_3+a_4$.如果漏掉前者，解答就变为 $33\frac{11}{18}<x\leqslant 36\frac{2}{3}$，要取34，35两个值，这就不符合实际了.

从例5、例6、例7可看出，与不等式相关的实际问题，往往又有约束条件的限制，与方程、函数、数列等知识联系密切，建立的数学模型通常是不等式与方程，或函数、或数列等形式的混合型模型.这种混合型模型在高考试题中出现的频率较高，如“轧钢问题”、“沉淀杂质问题”及“运输成本问题”等，应引起我们的高度重视.

第三节 简易逻辑

知识表解



知识与规律

(一) 命题

1. 命题

可以判断真假的语句叫做命题.

2. 逻辑联结词

“或”“且”“非”这些词叫做逻辑联结词.

或：两个简单命题至少一个成立.

且：两个简单命题都成立.

非：对一个命题的否定.

3. 简单命题与复合命题

不含逻辑联结词的命题叫做简单命题；由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合

命题.

4. 表达形式

用小写字母 p、q、r、s、…、来表示简单命题.

复合命题有三类:①p 或 q;②p 且 q;非 p.

5. 真值表

表示命题真假的表叫真值表.

(1) 非 p 形式复合(见命题真值表)

p	非 p
真	假
假	真

(2)p 且 q 形式复合(见命题真值表)

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

(3) p 或 q 形式复合(见命题真值表)

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

6. 四种命题及其关系

(1) 四种命题

在两个命题中,如果第一个命题的条件(或题设)是第二个命题的结论,且第一个命题的结论是第二个命题的条件,那么这两个命题叫做互逆命题;如果把其中一个命题叫做原命题,那么另一个叫做原命题的逆命题.

一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定,这样的两个命题叫做互否命题. 把其中一个命题叫做原命题,另一个命题就叫做原命题的否命题.

一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定,这样的两个命题叫做互为逆否命题. 把其中一个命题叫做原命题,另一个命题就叫做原命题的逆否命题.

(2) 表示形式

一般地,用 p 或 q 分别表示原命题的条件和结论,用$\neg p$ 或$\neg q$ 分别表示 p 或 q 的否定,于是四种命题的形式就是:

原命题:若 p 则 q $(p\Rightarrow q)$;

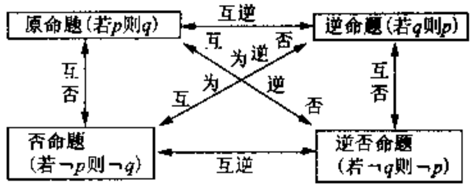
逆命题:若 q 则 p $(q\Rightarrow p)$;

否命题:若$\neg p$ 则$\neg q$ $(\neg p\Rightarrow \neg q)$;

逆否命题:若$\neg q$ 则$\neg p$ $(\neg q\Rightarrow \neg p)$.

(3) 四种命题的关系

①



② 一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下四条关系:

a. 原命题为真,它的逆命题不一定为真.

b. 原命题为真,它的否命题不一定为真.

c. 原命题为真,它的逆否命题一定为真.

d. 逆命题为真,否命题一定为真.

(二) 充要条件

定　义	从集合观点看
若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件	若集合 $p\subseteq q$,则 p 是 q 的充分条件
若 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要条件	若集合 $q\subseteq p$,则 p 是 q 的必要条件
若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件	若集合 $p\subsetneqq q$,则 p 是 q 的充分不必要条件
若 $q\Rightarrow p$ 且 $p\not\Rightarrow q$,则 p 是 q 的必要不充分条件	若集合 $p\supsetneqq q$,则 p 是 q 的必要不充分条件
如果 $p\Leftrightarrow q$,则 p 是 q 的充分且必要条件	若集合 $q=p$,则 p 是 q 的充分必要条件
如果 $p\not\Rightarrow q$,且 $q\not\Rightarrow p$,则 p 是 q 的非充分非必要条件	若集合 $p\nsubseteq q$ 且 $q\nsubseteq p$,则 p 是 q 的非充分非必要条件

身边的数学

罗素悖论带来第三次数学危机

一天,萨维尔村理发师挂出一块招牌:"村里所有不自己理发的男人都由我给他们理发.

我也只给这些人理发."于是有人问他:"您的头发由谁理呢?"理发师顿时哑口无言.因为,如果他给自己理发,那么他就属于自己给自己理发的那类人.但是,招牌上说明他不给这类人理发,因此他不能自己理.如果由另外一个人给他理发,他就是不给自己理发的人,而招牌上明明说他要给所有不自己理发的男人理发,因此,他应该自己理.由此可见,不管怎样推论,理发师所说的话总是自相矛盾的.

这就是著名的"罗素悖论".它是由英国哲学家罗素提出来的,他把关于集合论的一个著名悖论用一个故事的形式给通俗地表述出来了.

罗素还提出过与"理发师难题"相似的几个悖论,数学上将这些悖论统称为"罗素悖论"或者"集合论悖论".为什么又叫"集合论悖论"呢?因为"罗素悖论"都可以用集合论中的数学语言来描述,归结成一种说法就是:$W=\{x|x$ 不属于 $W\}$,即在某一非空全集中,有这样一个确定的集合,这个集合中"只有不属于这个集合的元素".那么,全集中的某一个指定元素和这个确定集合之间是什么关系呢?不难分析,如果这个元素包含于这个集合的话,那么根据这个集合的定义,这个元素就应该是"不属于这个集合"的元素;可如果这个元素"不属于这个集合",那么根据这个集合的定义,这个元素就应该在这个集合中,即包含于这个集合.这就是说,全集中的每一个元素与这个确定集合之间都不存在确定的包含关系,这无疑是讲不通的.自从康托尔创立了数学领域中的"集合论",用集合论中的观点来诠释各个数学概念之间的逻辑关系,真可谓是"天衣无缝".因此集合论被誉为"数学大厦的基石".然而"罗素悖论"的发现,证明了集合论中竟然存在自相矛盾的悖论,这足以暴露集合论本身的缺陷.

"罗素悖论"在20世纪数学理论中引起了轩然大波."数学大厦的基石"竟然出现了明显的"裂缝",那么人类耗费数千年心血建立起来的"数学殿堂"会不会倒塌呢?一时间,数学界众说纷纭,悲观者甚至因此把当代数学比作"建立在沙滩上的庞然大物".这就是数学史上著名的"第三次数学危机".

此后,为了克服这些悖论,数学家们做了大量研究工作,由此产生了大量新成果,也带来了数学观念的革命.

理发师悖论

自从德国数学家康托尔(Georg Cantor,1845—1918)于19世纪末20世纪初创立集合论以来,他自己及他同时代的一些哲学家们、数学家们陆续发现了康托尔的集合论中蕴涵着互相矛盾的命题——集合论悖论.其中影响最大的就是罗素发现的悖论.

罗素(Bertrand Russell,1872—1970),英国数学逻辑学家、哲学家,为了使自己的观点能通俗易懂,他讲了一个故事:在一个村子里,有一位自认为手艺高超的理发师,他对外宣称:"我不给村子里任何一个给自己刮脸的人刮脸,但却给村子里所有不给自己刮脸的人刮脸."有一天,他发生了疑问:他是否应该给自己刮脸?

这就是罗素1902年提出的,并于1918年将其通俗化为理发师悖论.它的出现表示集合论本身存在着问题,进而表明整个数学在基础上存在着问题,所以它引发了数学发展史上的第三次危机.初看起来,它与集合论没有任何关系,如果你想进一步了解它,请看分析:

(1) 对理发师悖论的理解:

现我们将村子里的人分成两类(实际上就是两个集合):集合 $A=\{$村子中不给自己刮脸的人$\}$;集合 $B=\{$村子中给自己刮脸的人$\}$,很显然 A 与 B 是互为补集.理发师的疑问在于他不知道自己该属于哪一个集合.

① 若他属于 A,则由他所宣称的第二句话可推出,他要给自己刮脸,进而推出他属于 B,这显然是不可能的;

同样道理可得到:

② 若他属于 B,则他属于 A,这也不可能,所以他陷入了逻辑上的困境.