31st IMO 1990 中国

单墫 葛军 编

数学奥林匹克

第31届国家集训队资料

北京大学出版社

数学奥林匹克

第31届国家集训队资料(1990)

单 墫 葛 军 编

北 京 大 学 出 版 社

数学奥林匹克

第 31 届国家集训队资料(1990)

单 墫 葛 军 编

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 8.125印张 177千字

1991年6月第一版 1991年6月第一次印刷

印数：00001—21,000册

ISBN 7-301-01516-0/G·86

定价：4.30元

序

为了迎接1990年在北京举行的第31届国际数学奥林匹克(IMO)，中国数学会、中国数学奥林匹克委员会委托南京师范大学数学系担任国家集训队的训练工作。

集训队的队员是经过年初的数学冬令营选派出来的24名优秀学生：汪建华、周彤、库超、王崧、张朝晖、余嘉联、刘彤威、张里钊、王绍昱、刘立武、蔡连侨、杭晓渝、孙峥、王肇东、李达航、梁栋刚、江焕新、沈伟、胡军、李伟华、阎翌、张建丰、林涛、曾崇纯(其中有九名来自清华附中的理科试验班)。

集训队由单墫担任主教练，葛军担任班主任。1990年夏，在国家集训队的基础上，选拔7名选手(5名正式，2位替补)，组成了以单墫为领队的中国队，参加了在我国北京举办的第31届IMO，获团体总分第一名，五名参赛选手获得了四枚金牌、一枚银牌。我国选手的优异成绩为世人瞩目。

在国家队集训期间，我们邀请了国内著名专家学者及饶有经验的教师给集训队上课。舒五昌、施咸亮、刘鸿坤、严镇军、杜锡禄、康士凯、马明、黄宣国、曹鸿德、胡大同、李克正、熊斌、陈计、余红兵、冯惠愚、吴伟朝、高珍光、刘亚强等先生都热情支持这项工作，亲自莅临指导并作了精彩的讲演。

我们进行了多次测试，布置了大量的习题。每周测试1～2次，4道试题，要求3个小时完成，难度接近IMO．例题、习题约有一千道，同学们互相启发，提供了不少好的解法。

这些资料汇集成本书，它是北京大学出版社出版的《1986年第一届国家集训队资料选编》的续集(第二、三、四届集训队资料未出过专集)。我们尽量注意吸取以往各届的成功经验，同时避免与第一届资料选编重复。重点放在问题与解法上，而不补充更多的知识。问题方面，也竭力注意推陈出新，反映数学竞赛的潮流。

囿于水平，错误不妥之处在所难免，敬请热心数学竞赛，热心普及工作的读者不吝指正。

编　者

目　　录

第一部分　讲　　座

§1　数　　论

我们着重介绍数论中的存在性问题.

数论中的存在性问题，是数学竞赛中较难的一类问题．解此类问题没有现成的线索可依，需要我们去寻找、去发掘、去构造，多练习、多积累、多总结.

例 1.1　证明：任何一个有理数都能够表示成一系列有理数的平方和或差.

证明　设任意一个有理数为 $\frac{q}{p}$，p,q 是整数，$(p,q)=1$.

若 $\frac{q}{p}=0$，结论显然成立.

若 $\frac{q}{p}>0$，不妨令 $p>0$，$q>0$，则

$$\frac{q}{p}=\frac{pq}{p^2}=\sum_{i=1}^{pq}\left(\frac{1}{p}\right)^2.$$

若 $\frac{q}{p}<0$，不妨令 $p>0$，$q<0$，则

$$\frac{q}{p}=\frac{-pq}{-p^2}=-\sum_{i=1}^{-pq}\left(\frac{1}{p}\right)^2=0^2-\left(\sum_{i=1}^{-pq}\left(\frac{1}{p}\right)^2\right).$$

例 1.2 证明:存在整系数多项式 $f(x)$,使得 $\frac{3}{10}<x<\frac{9}{10}$ 时,有 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10^{1990}}$.

证明 考虑一般情形.

由 $\frac{3}{10}<x<\frac{9}{10}$ 得

$$|2x-1|<\frac{4}{5},\quad |(2x-1)^n|<\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

当 n 趋于无穷大时,$(2x-1)^n$ 趋于零,也就是对于任一自然数 m,存在自然数 n_0,当 $n\geqslant n_0$ 时,$|(2x-1)^n|<\frac{1}{10^m}$. 故 $f(x)$ 可取 $\frac{(2x-1)^n+1}{2}$,这是整系数多项式.

例 1.2 的证明过程表明,在解题时,不受题中一些特殊要求(如具体数字、具体表达式)的限制,考虑一般化的问题,反而容易求得解答.

例 1.3 在直角坐标系中,存在 n 个点的集合 $(n\in \boldsymbol{N})$,其中无三点共线,且任意子集的重心都是整点.

证明 设 n 个点的集合为

$$A=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\},$$

对于任意子集

$$A_i=\{(x_{i1},y_{i1}),(x_{i2},y_{i2}),\cdots,(x_{ik},y_{ik})\},$$

其中 $\quad 1\leqslant k\leqslant n,\quad 1\leqslant i\leqslant 2^n,$

此子集的重心是 $\left(\frac{\sum_{j=1}^{k}x_{ij}}{k},\frac{\sum_{j=1}^{k}y_{ij}}{k}\right)$. 由于此点应是整点,

x_i, y_i 必须为 k 的倍数（$1 \leqslant k \leqslant n$）。

若令

$$x_1 = (n+1)!, \quad x_2 = (n+2)!, \cdots, x_n = (2n)!,$$

且点(x_i, y_i) $1 \leqslant i \leqslant n$ 在抛物线 $y = x^2$ 上，则点(x_i, y_i)均为整点。所以，在直角坐标系中，的确存在 n 个点的集合

$$\{((n+1)!, ((n+1)!)^2), \cdots, ((2n)!, ((2n)!)^2)\},$$

其中没有三点共线，而且任意子集的重心是整点。

例 1.4 证明：存在一个整系数二元二次多项式$P(x,y)$，使得对于任意的整数 x, y，$2P(x,y)$为三个整数的平方和，$2P^2(x,y)$是三个整数的四次方和。

证明 设$2P(x,y) = u^2 + v^2 + w^2$，$u, v, w \in \boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{Z}$表示整数集，则

$$2P^2(x,y) = \frac{u^4 + v^4 + w^4}{2} + u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2.$$

考虑对于 $2P^2(x,y) = u^4 + v^4 + w^4$，$u, v, w$ 应符合的关系。由

$$u^4 + v^4 + w^4 = 2(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)$$

就有

$$(u+v)^2(u-v)^2 = w^2(2u^2 + 2v^2 - w^2).$$

若取 $u + v = w$，则

$$2P^2(x,y) = u^4 + v^4 + w^4,$$

因此，存在二元二次多项式 $P(x,y) = x^2 + xy + y^2$ 满足条件（取 $x = u, y = v$）。

例 1.5 是否存在二元二次多项式 $P(x,y)$，对于任意的自然数 n，有且仅有一对自然数 x, y，使 $P(x,y) = n$。

解 从简单情形入手，考虑只有一个变元是二次的二元

二次多项式 $P(x,y)$。

任一正整数 n，可以表示为

$$n=1+2+\cdots+k+l=\frac{k(k+1)}{2}+l \quad (0\leqslant l<k).$$

于是，令

$$P(x,y)=\frac{x(x-1)}{2}+y,$$

易知 $P(x,y)$ 满足要求。

例 1.6 对于自然数 $n(n>1)$ 的素因子 p，考虑 p 的不超过 n 的最高次幂，记 $f(n)$ 为这些幂的和。证明：有无穷多个 n，使 $f(n)>n$。

证明 对于素数 p，$p|n$，存在自然数 k，

$$p^k\leqslant n<p^{k+1}, \quad f(n)=\sum_{p|n}p^k,$$

$\sum\limits_{p|n}$ 表示对 n 的素因子 p 求和，于是

$$\frac{f(n)}{n}=\sum_{p|n}\frac{p^k}{n}>\sum_{p|n}\frac{1}{p}.$$

显然，含有素因子 2,3,5 的自然数均满足要求。

例 1.7 设 $r(n)$ 为 $\frac{n}{1},\frac{n}{2},\cdots,\frac{n}{n}$ 的余数之和，证明有无穷多个自然数 n，使 $r(n)=r(n-1)$。

证明 对于自然数 k，

$$n=qk+r_k=\left[\frac{n}{k}\right]k+r_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]k + \sum_{k=1}^{n} r_k,$$

所以

$$r(n) = \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]k,$$

$$r(n) - r(n-1) = (n-1) - \sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right)k.$$

欲使 $r(n) - r(n-1) = 0$，则必须

$$n - 1 = \sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right)k.$$

利用

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 1, & k \mid n; \\ 0, & k \nmid n, \end{cases}$$

因而自然数 n 一定具有性质：它的所有因子(包含1，但不包含本身)之和等于 $n-1$.

显然，取 $n = 2^l$, l 为自然数，则

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{l-1} = 2^l - 1 = n - 1,$$

这样的 n 有无穷多个.

例1.8 证明：对于任意的自然数 $s \geqslant 2$，存在一个本原整边直角三角形(三边两两互素)，周长是一个整数的 s 次幂.

证明 对于正整数 a, b，$a > b$，作

$$x = a^2 - b^2,\quad y = 2ab,\quad z = a^2 + b^2,$$

则 x, y, z 是整边直角三角形的三边长.

由于 $x+y+z=2a(a+b)$，所以，若取

$$a=2^{s-1}t_1^s,\quad b=t_2^s-2^{s-1}t_1^s,$$

t_1,t_2 是自然数，且 $(t_2,2t_1)=1$，则易验证它们是两两互素的。

例 1.9 是否存在有理数 $\frac{c}{d}(0<c<d<100)$，使

$$\left[k\frac{c}{d}\right]=\left[k\frac{73}{100}\right],\quad k=1,2,\cdots,99?$$

解 注意 73 与 100 互质，因而有 $c,d\in\boldsymbol{N}$，使

$$73d-100c=1.$$

不妨设 $d<100$（否则用 $d-100,c-73$ 代替 d,c）。这时，对于 $1\leqslant k\leqslant 99$，

$$0<\frac{73k}{100}-\frac{kc}{d}=\frac{k(73d-100c)}{100d}=\frac{k}{100d}<\frac{1}{d},$$

所以

$$\left[\frac{73k}{100}\right]=\left[\frac{kc}{d}\right].$$

例 1.10 证明数列 $\{\sqrt{2}n\}(n\in\boldsymbol{N})$ 中有无穷多个平方数。

证明 对于不定方程 $u^2-2v^2=-1$ 的解，

$$(2uv)^2=u^4+u^2,$$

所以

$$u^2<\sqrt{2}uv<u^2+1,$$

即

$$[\sqrt{2}uv]=u^2.$$

这里 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。

由于不定方程 $u^2-2v^2=-1$ 有无穷多组正整数解，所以

$n=uv$ 也有无穷多个，且$\sqrt{2}n=u^2$。

欧拉定理 设m为正整数，a为整数，并且$(a,m)=1$，则

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1(\bmod m),$$

其中$\varphi(m)$为欧拉函数，

$$\varphi(m)=m\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

这里$\prod\limits_{p\mid m}$表示乘积过m的所有素因子p。

取m为素数p，$\varphi(p)=p-1$，由此得到：

费尔马小定理 设p为素数，a为整数，并且$p\nmid a$，则$a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$，即$p\mid a^{p-1}-1$。

根据费尔马小定理，我们有：若n是奇素数，则$n\mid 2^n-2$。但是，此命题的逆命题是不成立的，如$n=341=11\times 31$是满足$n\mid 2^n-2$。

例1.11 证明有无穷多个奇合数n，使$n\mid 2^n-2$。

证明 取一个满足$n\mid 2^n-2$的奇合数n（这是可以做到的，如$n=341$），则$2^n-2=nk$，k为某自然数。

令$m=2^n-1$，则m为奇合数，且

$$2^m-2=2(2^{m-1}-1)=2(2^{2^n-2}-1)=2(2^{nk}-1).$$

于是$2^n-1\mid 2^m-2$，即$m\mid 2^m-2$。由此可知，我们可以利用如下递推关系

$$a_0=n_0,\ a_1=2^{n_0}-1,\ a_n=2^{a_{n-1}}-1,\quad n\in\boldsymbol{N}$$

得到无穷多个奇合数a_i，使

$$a_i\mid 2^{a_i}-2,\quad i=1,2,\cdots.$$

类似地，可以证明：有无穷多个奇合数 n，使 $n|2^n+2$。

例 1.12 证明：在集合

$$\left\{1,2,3,\cdots,\frac{3^k+1}{2}\right\} \quad (n\in \boldsymbol{N})$$

中可取出 2^n 个数，无三个数成等差。

证明 用数学归纳法证明。$n=1$ 显然成立。

设 $n=k$ 时，集合$\left\{1,2,3,\cdots,\frac{3^k+1}{2}\right\}$中可取 2^k 个数，无三个数成等差。当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，可以从

$$A_1=\left\{1,2,3,\cdots,\frac{3^k+1}{2}\right\}$$

及

$$A_2=\left\{3^k+1,3^k+2,\cdots,3^k+\frac{3^k+1}{2}\right\}$$

中各取 2^n 个符合条件的数。由于集合 A_1 或 A_2 中的两数之差小于等于$\frac{3^k+1}{2}$，并且从 A_2 中取的数比 A_1 中的数至少大$\frac{3^k+1}{2}$，所以，所取的2^{k+1}个数无三个成等差。故命题成立。

有时，我们需利用递归定义的方式，求解一些存在性问题，如例 1.11。这种解题方法，在解有关数列的存在性问题时用得较多。

例 1.13 证明：数列$\{2^n-3\}$中有一个无穷子数列，其中任意两项互素。

证明 设数列$\{2^n-3\}$中已有 k 项是两两互素的，记为

$u_1,u_2,\cdots,u_k$。作

$$u_{k+1}=2^{\varphi(u_1\cdot u_2\cdots u_k)+1}-3,$$

其中 $\varphi(x)$是欧拉函数。由欧拉定理得

$$2^{\varphi(u_1\cdot u_2\cdots u_k)}=2^{\varphi(u_1)\cdot\varphi(u_2)\cdots\varphi(u_k)}\equiv 1(\bmod u_i),\quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

所以 $\qquad u_{k+1}\equiv-1(\bmod u_i),\quad 1\leqslant i\leqslant k,$

即 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 与 u_{k+1} 均互素。故 $u_1,u_2,\cdots,u_k,u_{k+1}$ 两两互素。

根据上述讨论，必存在一个任意两项均互素的无穷子数列$\{u_n\}$。

相仿地，可以证明数列$\{2^n+1\}$中含有一个无穷子数列，其中的任意两项互素。

例 1.14 设 a,b 为给定自然数，$(a,b)=1$。证明：等差数列$\{an+b\}(n\in\boldsymbol{N})$中有一个无穷子数列，其中任意两项互素。

证明 令

$$u_1=a+b,\ \ u_{k+1}=b+a(u_1\cdot u_2\cdot\cdots\cdot u_k),\quad k\in\boldsymbol{N},$$

按此定义构造了一个无穷子数列$\{u_k\}$。

显然，$(u_1,b)=1$。

设 u_k 与 u_i 互素，且 u_i 与 b 互素$(1\leqslant i\leqslant k)$，则

$$(u_{k+1},u_i)=(b+a(u_1\cdot u_2\cdot\cdots\cdot u_k),u_i)=(b,u_i)=1,$$

$$1\leqslant i\leqslant k.$$

$$(u_{k+1},b)=(a(u_1\cdot u_2\cdot\cdots\cdot u_k),b)=1.$$

所以，数列$\{u_k\}$的任意两项互素。

例1.15 设$\sigma(n)$是自然数 n 的所有约数的和，证明有无穷多个自然数 n，使

$$\frac{\sigma(n)}{n}>\frac{\sigma(k)}{k}\quad(1\leqslant k<n).$$

证明 对任意$n\in\boldsymbol{N}$，由于$\frac{n!}{h}$在$h\leqslant n$时为整数，所以

$$\frac{\sigma(n!)}{n!}\geqslant\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{h}.$$

熟知$\sum\limits_{h=1}^{n}\frac{1}{h}\to+\infty$，所以$\left\{\frac{\sigma(n)}{n},n\in\boldsymbol{N}\right\}$是无界集合.

取$i_1=1$。设已有$i_1<i_2<\cdots<i_n$，满足

$$\frac{\sigma(i_k)}{i_k}>\frac{\sigma(h)}{h}\quad(1\leqslant h<i_k),\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

由$\left\{\frac{\sigma(n)}{n},n\in\boldsymbol{N}\right\}$的无界性，有$m\in\boldsymbol{N}$，使

$$\frac{\sigma(m)}{m}>\frac{\sigma(i_n)}{i_n}.$$

不妨设m是使这个不等式成立的最小数。令

$$i_{n+1}=m.$$

这样，我们就得到一个自然数的无穷数列

$$1=i_1<i_2<\cdots<i_n<\cdots$$

满足

$$\frac{\sigma(i_k)}{i_k}>\frac{\sigma(h)}{h}\quad(1\leqslant h<i_k),\qquad k=1,2,\cdots.$$

例1.16 证明：存在一个由不同正整数构成的集合X，使得任一正整数可唯一地表示成X中的两数之差.

证明 按如下定义构造集合$X=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k_1}\cdots\}$:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{k+1}=a_k+f(k),\quad k\in\boldsymbol{N},$$

其中$f(k)$取不能表示成集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$中任意两数之差的最小正数。

易知

$$f(2)<f(3)<\cdots<f(k)<\cdots,$$

而且$\leqslant f(k)$的数可以唯一地表示为X中两数之差，所以，由k的任意性，任意正整数均可唯一地表示为X中两数之差。

例1.17 任意给定自然数n，证明：在平面上存在无穷多个有限点集S，使得对S中任意一点A，S中恰有n个点与A点的距离为1。

证明 作一个向量集$\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$:

i) $|u_i|=\dfrac{1}{2}$,

ii) $|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n|\neq 0,\ \dfrac{1}{2}$,

其中$c_i=0,1,-1$，$i=1,2,\cdots,n$，且至少有两个不为零。

$|u_1|=\dfrac{1}{2}$，构造$u_2,u_3,\cdots,u_k$后，由于满足

$$|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k+u|=0,\ \frac{1}{2}$$

的u只有有限个，所以，可以取得一个u_{k+1}，$|u_{k+1}|<\dfrac{1}{2}$，使