SHUXUEFENXIZHENGTIFAXUANJIANG

数学分析证题法选讲

王思聪 编著

$$\cdots\cdots \int_a^b g(t)dt = g(\xi)(b-a),\quad a \leqslant \xi \leqslant b$$

$$f(b) = g(\xi)(b-a)$$

$$\frac{f(b)}{b-a} = g(\xi)\ \cdots\cdots$$

贵州人民出版社

数学分析证题法选讲

王思聪　编著

贵州人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析证题法选讲/王思聪编著.—贵阳:
贵州人民出版社,2006.5
ISBN 7-221-07374-0

Ⅰ.数... Ⅱ.王... Ⅲ.证明论 Ⅳ.0141.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第052494号

数学分析证题法选讲

编　　著:王思聪
责任编辑:何伊德
封面设计:陈红昌
出版发行:贵州人民出版社(邮编:550001)
印　　刷:贵州兴隆印务有限责任公司
字　　数:220千字
开　　本:889×1194　1/16
印　　张:9
印　　数:1000册
印　　次:2006年6月第1次印刷
版　　次:2006年6月第1版
书　　号:ISBN 7-221-07374-0/O.09
定　　价:20.00元

前　　言

本书是作者在《数学分析》课的教学过程中，为了提高学生的证题思维能力，改变学生对证明题心存疑惧的状况，在多年教学实践的基础上，逐步修改编写完成的。

本书内容的选取，主要根据学生对问题的证明不知从何入手的情况，结合教材，参考考研复习资料以及历年全国硕士研究生入学考试试题，着重于证题方法与技巧的总结和分类，选取了大量具有典型型、针对性和启发性的题目，对所选题目采取了先写出分析思路，然后再写出详细的证明过程。作者试图通过对这些例题的分析、证明，去训练学生的证题思维能力和证题分析技巧，为学生运用所学知识独立地去分析证题提供思维的钥匙。

全书共分五章：证明极限存在的方法；利用常数变易的证题法；应用中值定理证题法；应用泰勒公式证题法；借助反证法之证题法。

从本书的内容性质来看，可作为师范院校数学专业本、专科学生的辅助教材和教师的教学参考书，也可作为理工科学生学习《高等数学》的指导书，同时也可作为报考理学、工学、经济类硕士研究生的考前复习资料。

本书的编写，得到贵州教育学院李长明老师和贵州人民出版社何伊德先生的支持，并提出许多指导性意见。在写作过程中，参考了下列文献：

[1]刘玉琏.傅沛仁《数学分析讲义(上册)》(高等教育出版社，1992年6月第3版)；

[2]刘玉琏，杨奎元，吕凤《数学分析讲义学习指导书(上册)》(高等教育出版社，1987年4月第1版)；

[3]华东师范大学数学系《数学分析(上册)》(人民教育出版社，2001年6月第3版)；

[4]邹承祖，齐东旭，孙玉柏《数学分析习题课讲义》(吉林大学出版社，1986年8月第1版)；

[5]陈文灯，黄先开《数学复习指南(理工版)》，(世界图书出版公司，1999年3月第1版；2003年2月第9版)；

[6]张安元《高等数学应试能力训练》，(湖南大学出版社，2001年8月第1版).

在此一并致谢。

本人水平有限，不妥之处以及错误在所难免，恳请读者批评指正。

王思聪

2006年5月

目　　录

第一章　证明极限存在的方法

函数是数学最基础最核心的概念,也是自然科学和工程技术普遍使用的一个数学概念。函数在基础理论和应用学科中占有十分重要的地位。

数学分析这门课程研究的对象是函数。

数学分析用什么方法去研究函数呢？这个方法就是极限方法。用根限的方法去研究函数的分析性质,即函数的连续性,可微性,可积性等。从方法论来说,用极限方法研究函数是数学分析乃至分析系统各门课程的显著特征。

数学分析中几乎所有的概念都离不开极限。如函数的连续性,函数的可微性,函数的可积性,定积分,重积分,线面积分,级数的收敛性等都是用极限来定义的,因此极限概念是数学分析的主要概念,极限理论是数学分析的基础理论,极限方法是数学分析研究函数的重要工具。

极限理论问题,首先是极限的存在问题。

函数极限的存在性,是数学分析首要研究的一个内容,它是继续研究函数的基础。

本章从几个方面,即用极限定义,夹逼定理,实数连续性公理,柯西收敛准则以及施笃兹定理、托布利兹定理来阐述数列极限和函数极限存在的证明方法。

这里我们约定:无穷大量仍然认定它的极限存在,且极限为∞。

§ 1.1　用数学语言证明极限

一、极限的定义

1. 数列极限的定义

用“ε—N”语言叙述:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\, N\in N, \forall\, n>N$,有$|a_n - a|<\varepsilon$.

2. 函数极限的定义

由于函数类型不同与自变量的变化趋势不同,就出现不同类型的函数极限。尽管函数极限的类型不同,但是描述极限的思想方法却是完全相同的。下面,我们将不同类型的函数极限定义用数学语言描述出来:

(1)当自变量 x 的变化趋势是趋于∞,函数 $f(x)$以常数 $b(b\neq\infty)$为极限,用“ε—A”语言叙述.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\, A>0, \forall\, |x|>A$,有$|f(x)-b|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\, A>0, \forall\, x>A$,有$|f(x)-b|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\, A>0, \forall\, x<-A$,有$|f(x)-b|<\varepsilon$.

(2)当自变量 x 的变化趋势是趋于定值x_0时,函数 $f(x)$以常数 $b(b\neq\infty)$为极限,用“ε—δ”语言叙述.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall\, x:0<|x-x_0|<\delta$,　有$|f(x)-b|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall\, x:x_0<x<x_0+\delta$,　有$|f(x)-b|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=b \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x: x_0-\delta<x<x_0, \quad 有 |f(x)-b|<\varepsilon.$$

3. 无穷大量的定义

(1)当自变量 x 趋于 ∞ 时,函数 $f(x)$ 是无穷大量,用"M—A"语言叙述.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall |x|>A, \quad 有 |f(x)|>M.\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall x<-A, \quad 有 |f(x)|>M.\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall x>A, \quad 有 |f(x)|>M.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall |x|>A, \quad 有 f(x)>M.\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall x<-A, \quad 有 f(x)>M.\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall x>A, \quad 有 f(x)>M.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall |x|>A, \quad 有 f(x)<-M.\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall x<-A, \quad 有 f(x)<-M.\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0, \forall x>A, \quad 有 f(x)<-M.\end{cases}$$

(2)当自变量 x 趋于定值 x_0 时,函数 $f(x)$ 是无穷大量,用"M—δ"语言叙述.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta, \quad 有 |f(x)|>M.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta, \quad 有 f(x)>M.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta, \quad 有 f(x)<-M.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: x_0<x<x_0+\delta, \quad 有 |f(x)|>M.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: x_0<x<x_0+\delta, \quad 有 f(x)>M.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: x_0<x<x_0+\delta, \quad 有 f(x)<-M.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: x_0-\delta<x<x_0, \quad 有 |f(x)|>M.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: x_0-\delta<x<x_0, \quad 有 f(x)>M.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x: x_0-\delta<x<x_0, \quad 有 f(x)><-M.$$

以上是用数学语言来叙述了数列极限,函数极限和无穷大量的定义.

从上面的叙述可以看出,极限定义关键的就是"四句话",且"四句话"有很强的规律性,通过观察分析,不难看出,只要能抓住"极限值"和"极限过程"这两个方面,就能将任一极限准确地用数学语言叙述出来.

下面以函数 $f(x)$ 的极限为例,说明极限定义的"四句话"的叙述方法.

第一句和第四句的叙述,是以"极限值是什么"来确定的:

若极限值是有限数 b,则为 $\forall \varepsilon>0, \cdots, |f(x)-b|<\varepsilon$.

若极限值是无限数 ∞,则为 $\forall M>0, \cdots, |f(x)|>M$.

(若极限值为 $+\infty$ 和 $-\infty$,则第四句为 $f(x)>M$ 和 $f(x)<-M$).

第二句和第三句的叙述,是以"极限过程是什么"来确定的.

若极限过程是趋于定值 x_0(或 x_0^+, x_0^-),则为 $\exists \delta>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta$(或 $x_0<x<x_0+\delta, x_0-\delta<x$

$< x_0)$

若极限过程是趋于∞(或$+\infty$，$-\infty$)，则$\exists A>0, \forall x: |x|>A$(或$x>A, x<-A$).

为了加深对数列极限的“ε—N”定义的理解，以便进一步对定义的熟悉和掌握，先看下面二个例题.

例 1.1.1 写出与极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$定义等价的几个常用的叙述.

解:1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in N, \forall n>N, |a_n - a| \leqslant \varepsilon$.

因$\varepsilon>0$具有任意性，所以$|a_n - a|<\varepsilon$与$|a_n - a|\leqslant\varepsilon$等价.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists K\in N, \forall \varepsilon>0, \forall N\in N, \forall n>N, |a_n - a| < K\varepsilon$.

因为ε具有任意性，所以ε与$K\varepsilon$等价.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in N, \forall n\geqslant N, |a_n - a| \leqslant \varepsilon$.

因为N不唯一，所以$\forall n>N$与$\forall n\geqslant N$等价.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall K\in N, \exists N\in N, \forall n>N, |a_n - a| < \dfrac{1}{K}$.

因为对任意$\varepsilon>0$，且$\varepsilon<1$，总存在两相邻的自然数K与$K+1$，使$\dfrac{1}{K+1}<\varepsilon<\dfrac{1}{K}$，

所以不等式$|a_n - a|<\varepsilon$与$|a_n - a|<\dfrac{1}{K}$是等价数.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，只有数列$\{a_n\}$的有限项$a_n$在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之外.

设数列$\{a_n\}$中有K项$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_K}$在邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之外，令$\max\{n_1, n_2, \cdots, n_K\} = N$，于是“只有数列$\{a_n\}$的有限项$a_n$在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之外”与“$\exists N\in N, \forall n>N, |a_n - a|<\varepsilon$”是等价的.

例 1.1.2 判断正误.

(1)两个数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都发散，则$\{a_n+b_n\}$一定发散.

解:错！如$\{a_n\} = \{\dfrac{1}{n}+(-1)^n\}$，$\{b_n\} = \{\dfrac{1}{n}-(-1)^n\}$都发散，而$\{a_n+b_n\} = \{\dfrac{2}{n}\}$却是收敛的.

(2)已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\forall$数列$\{b_n\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

解:错！如$\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$b_n = n$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\cdot n = 1 \neq 0$

(3)已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

解:错！ 如$a_n = 1+(-1)^n$，$b_n = 1-(-1)^n$，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$都不存在，而虽有

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty}[1-(-1)^{2n}] = 0$

二、用“ε—N”语言证明数列极限

数列极限的定义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in N, \forall n>N$，有$|a_n - a|<\varepsilon$.

用数列极限的“ε—N”定义证明数列极限，即$\forall \varepsilon>0$，要找到某一个自然数N，$\forall n>N$时，有$|a_n - a|<\varepsilon$. 关键是找到自然数N. N怎样找？N是从不等式$|a_n - a|<\varepsilon$出发去找。在找N的过程中，一般是将不等式进行适当地放大后，解出$n>N(\varepsilon)$

令 $N=[N(\varepsilon)]$即可.

用"ε—N 定义"证明数列极限

例 1.1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$

分析: $\forall\varepsilon>0$,从不等式$\left|\dfrac{2n}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$去求$N$.只须将不等式进行适当放大就可求出$N$.

证明: $\forall\varepsilon>0$,从不等式

$$\left|\frac{2n}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{-2}{3(3n+1)}\right|<\frac{2}{9n}<\varepsilon.$$

解得 $n>\dfrac{2}{9\varepsilon}$,所以取 $N=[\dfrac{2}{9\varepsilon}]$,于是

$\forall\varepsilon>0,\exists N=[\dfrac{2}{9\varepsilon}],\forall n>N$,有$\left|\dfrac{2n}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon.$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n+1}=\dfrac{2}{3}.$

例 1.1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4+2^n}=0$

分析: $\forall\varepsilon>0$,将不等式$\left|\dfrac{1}{4+2^n}\right|<\varepsilon$进行适当放大,就可求出$N$.

证明: $\forall\varepsilon>0$,从不等式

$$\left|\frac{1}{4+2^n}-0\right|=\frac{1}{4+2^n}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

解得 $n>\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}$,所以取 $N=[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}]$,于是

$\forall\varepsilon>0,\exists N=[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}],\forall n>N$,有$\left|\dfrac{1}{4+2^n}-0\right|<\varepsilon.$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4+2n}$

例 1.1.5 **证明:** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=0$

分析: $\forall\varepsilon>0$,不能直接解不等式$|\sqrt{n^2+1}-n|<\varepsilon$求出$N$.首先进行恒等变形,然后进行适当放大,再求$N$.

证明: $\left|\sqrt{n^2+1}-n\right|=\dfrac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\dfrac{1}{2n}<\varepsilon.$

$n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$,取 $N=[\dfrac{1}{2\varepsilon}]$,于是

$\forall\varepsilon>0,\exists N=[\dfrac{1}{2\varepsilon}],\forall n>N$,有$\left|\sqrt{n^2+1}-n\right|<\varepsilon.$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=0$

例 1.1.6 **证明:** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$

分析: $\forall\varepsilon>0$,不能直接解不等式$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon$求$N$,先进行恒等变形,再进行适当放大,然后再

求 N.

证明： $\forall \varepsilon>0$,要使不等式

$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$ **成立,从不等式解得**

$n>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$,所以取 $N=[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}]$,于是

$$\forall \varepsilon>0,\exists N=[\frac{1}{4\varepsilon^2}],\forall n>N,\text{有}\quad \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

例 1.1.7 **证明：** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2}{7n-n^2}=-5$

分析： $\forall \varepsilon>0$,找 $N\in N$,从不等式 $\left|\dfrac{5n^2}{7n-n^2-(-5)}\right|<\varepsilon$ 去找.

证明： $\forall \varepsilon>0$,先限定 $n>7$,由不等式

$$\left|\frac{5n^2}{7n-n^2}+5\right|=\left|\frac{35}{7-n}\right|=\frac{35}{n-7}<\varepsilon$$

解得 $n<\dfrac{35}{\varepsilon}+7$. 取 $N=\max\{7,[\dfrac{35}{\varepsilon}+7]\}$.

于是 $\forall \varepsilon>0,\exists N=\max\{7,[\dfrac{35}{\varepsilon}+7]\}\in N.\quad \forall n>N$

有 $\left|\dfrac{5n^2}{7n-n^2}-(-5)\right|<\varepsilon.$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2}{7n-n^2}=-5.$

例 1.1.8 证明下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{2^n}=0$

分析： $\forall \varepsilon>0$,不能直接解不等式 $\left|\dfrac{n^k}{2^n}-0\right|<\varepsilon(k=1,2,3)$求 N,先将 $\left|\dfrac{n^k}{2^n}-0\right|(k=1,2,3)$放大,之后再解不等式求 N.注意

$$2^n=(1+1)^n=1+\frac{n}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\cdots+1$$

所以有 $2^n>\dfrac{n(n-1)}{2!}$

$$2^n>\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$2^n>\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$\left|\dfrac{n^k}{2n}-0\right|\quad(k=1,2,3)$就可进行放大了.

证明： (1) $\forall \varepsilon>0$,从不等式

$$\left|\frac{n}{2^n}-0\right|<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}}=\frac{2}{n-1}<\varepsilon$$

解得 $n>\frac{2}{\varepsilon}+1$,取 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$,于是

$\forall \varepsilon>0, \exists N=[\frac{2}{\varepsilon}]+1, \forall n>N$ 有 $\left|\frac{n}{2^n}-0\right|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

(2) $\forall \varepsilon>0$,从不等式

$$\left|\frac{n^2}{2^n}-0\right|<\frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}=\frac{6n}{n^2-3n+2}<\frac{6n}{n(n-3)}=\frac{6}{n-3}<\varepsilon$$

解得 $n>\frac{6}{\varepsilon}+3$,所以取 $N=[\frac{6}{\varepsilon}]+3$,于是

$\forall \varepsilon>0, \exists N=[\frac{6}{\varepsilon}]+3, \forall n>N$,有 $\left|\frac{n^2}{2^n}-0\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$

(3) $\forall \varepsilon>0$,由不等式

$$\left|\frac{n^3}{2^n}-0\right|<\frac{n^3}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}=\frac{24n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$=\frac{24n^2}{(n^2-3n+2)(n-3)}<\frac{24n^2}{(n^2-3n)(n-3)}=\frac{24n}{(n-3)(n-3)}$$

$$=\frac{24n}{n^2-6n+9}<\frac{24n}{n^2-6n}=\frac{24}{n-6}<\varepsilon$$

解得 $n>\frac{24}{\varepsilon}+6$,所以取 $N=[\frac{24}{\varepsilon}]+6$.

于是 $\forall \varepsilon>0, \exists N=[\frac{24}{\varepsilon}]+6, \forall n>N$,有 $\left|\frac{n^3}{2^n}-0\right|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$

例 1.1.9 证明下列极限:其中 $0<a<1$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}na^n=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a^n=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3a^n=0$

分析： $\forall \varepsilon>0$,不能直接解不等式 $|n^ka^n|<\varepsilon(k=1,2,3)$ 求 N,先将 $|n^ka^n|$ 放大,之后再解不等式求 N.

注意 $0<a<1$, a 是常数,所以存在唯一的常数 $h>0$,使 $a=\frac{1}{1+h}$,则

$$a^n=\frac{1}{(1+h)^n}$$

而$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}h^4+\cdots+h^n$

所以有 $(1+h)^n>\frac{n(n-1)}{2!}h^2$

$$(1+h)^n>\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3$$

$$(1+h)^n>\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}h^4$$

$|n^ka^n-0|=\frac{n^k}{(1+h)^n}$ $(k=1,2,3)$就可进行放大了.

证明:(1) $\forall\varepsilon>0$,由不等式

$$|na^n|=\left|\frac{n}{(1+h)^n}\right|<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}<\varepsilon$$

解得 $n>\frac{2}{\varepsilon h^2}+1$,所以取 $N=[\frac{2}{\varepsilon h^2}]+1$,于是

$\forall\varepsilon>0,\exists N=[\frac{2}{\varepsilon h^2}]+1,\forall n>N$,有$|na^n-0|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}na^n=0$

(2) $\forall\varepsilon>0$,从不等式

$$|n^2a^n-0|=\left|\frac{n^2}{(1+h)^n}\right|<\frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3}=\frac{6n}{(n-3n+2)h^3}<\frac{6}{(n-3)h^3}<\varepsilon$$

解得 $n>\frac{6}{\varepsilon h^3}+3$,所以取 $N=[\frac{6}{\varepsilon h^3}]+3$.

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists N=[\frac{6}{\varepsilon h^3}]+3,\forall n>N$ 有$|n^2a^2-0|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a^2=0$

(3) $\forall\varepsilon>0$,从不等式

$$|n^3a^n-0|=\left|\frac{n^3}{(1+h)^n}\right|<\frac{n^3}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}h^4}$$

$$=\frac{24n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)h^4}<\frac{24n^2}{(n^2-3n+2)(n-3)h^4}<\frac{24n^2}{(n^2-3n)(n-3)h^4}=\frac{24n}{(n-3)(n-3)h^4}$$

$$=\frac{24n}{(n^2-6n+9)h^4}<\frac{24n}{(n^2-6n)h^4}=\frac{24}{(n-6)h^4}<\varepsilon$$

解得 $n>\frac{24}{\varepsilon h^4}+6$,所以取 $N=[\frac{24}{\varepsilon h^4}]+6$

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists N=[\frac{24}{\varepsilon h^4}]+6,\forall\varepsilon>0$有$|n^3a^n-0|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3a^n=0$

例 1.1.10 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

分析: $\forall\varepsilon>0$,不能直接解不等式$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$求$N$,先将$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|$放大,之后再解不等式求$N$.

注意到　当 $n\geqslant$时，$n!\ =1,2,3\cdots n\geqslant 2^{n-2}\cdot n$

证明：　$\forall\varepsilon>0$，从不等式

$$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|=\left|\frac{2^n}{n!}\right|\leqslant\frac{2^n}{2^{n-2}n}=\frac{4}{n}<\varepsilon\quad(n)\geqslant 2)$$

解得　$n>\frac{4}{\varepsilon}$，所以取 $N=[\frac{4}{\varepsilon}]$，于是

$\forall\varepsilon>0,\exists N=[\frac{4}{\varepsilon}]$　　$\forall n>N$，有$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$

即　　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

例 1.1.11　证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

分析：　$\forall\varepsilon>0$，不能直接解不等式$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$　求 N，先将$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|$放大，之后再解不等式求 N.

注意　　$\forall n>1$，有$\sqrt[n]{n}-1>0$，

$$\begin{aligned}n&=(\sqrt[n]{n})^n=[1+(\sqrt[n]{n}-1)]^n\\&=1+n(\sqrt[n]{n}-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2+\cdots+(\sqrt[n]{n}-1)^n\\&>1+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2\end{aligned}$$

所以有　　$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n}}$

证明：　$\forall\varepsilon>0$，从不等式$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon$

解得　$n>\frac{2}{\varepsilon^2}$，所以取 $N=[\frac{2}{\varepsilon^2}]$，于是

$\forall\varepsilon>0,\exists N=[\frac{2}{\varepsilon^2}],\forall n>N$，有$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$，

即　　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 1.1.12　证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

分析：　$\forall\varepsilon>0$，不能直接解不等式$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$ 求 N，先将$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|$放大.

已知　　a 是常数，$\exists K\in N$，使$|a|\leqslant k$，当 $n>k$ 时.

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a^n|}{n!}=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{k}\cdot\frac{|a|}{k+1}\cdots\frac{|a|}{n}\leqslant\frac{|a|^k}{k!}\cdot\frac{|a|}{n}=\frac{|a|^{k+1}}{k!}\cdot\frac{1}{n}$$

再解不等式求 N.

证明：　已知 a 是常数，$\exists K\in N$，使$|a|\leqslant k$，当 $n>k$ 时，$\forall\varepsilon>0$，由不等式

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|^n}{n!}\leqslant\frac{|a|^{k+1}}{k!}\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon$$

解得　　$n>\frac{|a|^{k+1}}{k!\ \varepsilon}$　　所以取 $N=\max\{k,[\frac{|a|^{k+1}}{k!\ \varepsilon}]\}$

于是　　$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\{k,[\frac{|a|^{k+1}}{k!\ \varepsilon}]\},\forall n>N$.

有 $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$

例 1.1.13 证明,若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$

分析: 分两种情形:当 $a=0$ 时易证;当 $a\neq 0$ 时,由 $a_n-a=(a_n^{\frac{1}{3}})^3-(a^{\frac{1}{3}})^3$ 可得

$$\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right|=\frac{|a_n-a|}{\left|\sqrt[3]{a_n^2}+\sqrt[3]{a_n}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right|}=\frac{|a_n-a|}{(\sqrt[3]{a_n}+\frac{\sqrt[3]{a}}{2})^2+\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}<\frac{|a_n-a|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}$$

可令 $|a_n-a|<\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\varepsilon$,即可.

证明: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in N$,

$\forall n>N$,有 $|a_n-a|<\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\varepsilon$. $(a\neq 0)$

$$\therefore\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right|=\frac{|a_n-a|}{\left|\sqrt[3]{a_n^2}+\sqrt[3]{a_n}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right|}<\frac{|a_n-a|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}<\varepsilon$$

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N,\forall n>N$ 有 $\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right|<\varepsilon$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$

例 1.1.14 (贵州大学考研试题)

证明,若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

分析: $\forall\varepsilon>0$,从不等式 $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon$ 找 N.

变形, 取充分大的 $m\in N$,当 $n>m$ 时有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na}{n}\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m-ma}{n}+\frac{a_{m+1}-a+\cdots+a_n-a}{n}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m-ma}{n}\right|+\frac{|a_{m+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$

可证 上述不等式的右端每一项都任意小.

证明: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists m\in N,\forall n>m$,有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

将 m 固定有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m-ma}{n}=0\Leftrightarrow\text{对上述 }\varepsilon>0,\exists N_1\in N,\forall n>N_1\text{ 有}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m-ma}{n}\right|<\varepsilon.$$

现取 $N=\max\{m、N_1\}$,于是有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m-ma}{n}\right|+\frac{|a_{m+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}<\varepsilon+\frac{n-m}{n}\varepsilon<2\varepsilon$$

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\{m,N_1\}\in N,\forall n>N$,有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

说明:该题证明极限的方法是一个常用的方法,要证明一个变数能任意小(如要证$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-a\right|<\varepsilon$),将它进行放大后,分成有限多项(如将$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-a\right|$分成两项),然后证明每一项都任意小,就可达到证明的目的.

例 1.1.15 (斯笃兹(*Stolz*)定理)若

(1)数列$\{y_n\}$严格增加且无界;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$;

则　数列$\{\frac{x_n}{y_n}\}$收敛,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l.$$

分析: $\forall\varepsilon>0$,要能找到$N\in N$,$\forall n>N$,有$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\varepsilon$,怎样找$N$? 为此,首先找到固定的$k\in N$,当$n>k$时有.

$$\frac{x_n}{y_n}-l=\frac{x_k-ly_k}{y_n}+(1-\frac{x_k}{y_n})(\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l)$$

则 $\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|\leqslant\left|\frac{x_k-ly_k}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l\right|$

即　将它放大后分成有限多项,这里分成了两项,然后再证明每一项都任意小.

证明: 由已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists k\in N,\forall n>k$　有

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-l\right|<\varepsilon,\qquad y_n-y_{n-1}>0$$

或　$$l-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<l+\varepsilon$$

或　$$l-\varepsilon<\frac{x_i-x_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}<l+\varepsilon,(i=k+1,k+2,\cdots,n)$$

于是有　$$l-\varepsilon<\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}<l+\varepsilon^{①}\Rightarrow\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l\right|<\varepsilon$$

对固　定的k,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_k-ly_k}{y_n}=0\Rightarrow\text{对上述 }\varepsilon>0,\exists m\in N,\forall n>m\quad\text{有}\quad\left|\frac{x_k-ly_k}{y_n}\right|<\varepsilon.$$

所以　取$N=\max\{k,m\}\in N$,于是$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\{k,m\}\in N,\forall n>N$,有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|\leqslant\left|\frac{x_k-ly_k}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$$

① 若 $a<\frac{a_i}{b_i}<b\qquad b_i>0,i=1,2,\cdots,n.$

则 $$a<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<b.$$

事实上，由 $a<\frac{a_i}{b_i}<b \Rightarrow ab_i<a_i<bb_i, i=1,2\cdots,n$. 将 n 个不等式相加得：

$a(b_1+b_2+\cdots+b_n)<a_1+a_2+\cdots+a_n<b(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

故有 $a<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<b$

例 1.1.16 证明(托布利兹(Toeplitz)定理)

若 (1) $a_{nk}\geqslant 0,\quad n\in N,\quad k=1,2,\cdots,n;$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}=1,\quad \forall n\in N;$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=0,\quad \forall k\in N;$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=l,$

设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}t_k$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=l.$

分析： $\forall \varepsilon>0$，要能找到 $N\in N, \forall n>N$，有

$$|S_n-l|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}t_k-l\right|<\varepsilon.$$

怎样找 N? 将不等式 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}t_k-l\right|<\varepsilon$ 放大后分成有限多项，然后证明它的每一项都任意小，事实上，只须证

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}t_k-l\right| \xlongequal{\text{由(2)}} \left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}t_k-\sum_{k=1}^{n}a_{nk}l\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(t_k-l)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_{nk}|t_k-l|<\varepsilon.$$

由(3) 当 n 充分大时，有 $a_{nk}<\varepsilon, k=1,2,\cdots n$.

由(4) 当 n 充分大时，有 $|t_n-l|<\varepsilon$.

证明： 由(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=0, \forall k\in N \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N_1\in N, \forall n>N_1$，有 $a_{nk}<\varepsilon, \forall k\in N$.

由(4) $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=l \Rightarrow$ 对上述 $\varepsilon>0, \exists N_2\in N, \forall n>N_2$，有 $|t_n-l|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}, \forall n>N$，上两个不等式都成立，即 $a_{nk}<\varepsilon,(k=1,2,\cdots,N;)$；$|t_n-l|<\varepsilon$.

由(4) 又知，$\exists M>0, \forall n\in N$，有 $|t_n-l|\leqslant M$.

$\forall n>N$ 时，由(1)、(2)有

$$|S_n-l|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}t_k-l\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_{nk}|t_k-l|$$

$$=a_{n1}|t_1-l|+a_{n2}|t_2-l|+\cdots+a_{nN}|t_N-l|+a_{nN+1}|t_{N+1}-l|+a_{nN+2}|t_{N+2}-l|+\cdots+a_{nn}|t_n-l|$$

$$<NM\varepsilon+\varepsilon(a_{nN+1}+a_{nN+2}+\cdots+a_{nn})$$

$$<NM\varepsilon+\varepsilon$$

$$=(MN+1)\varepsilon$$

于是 $\forall \varepsilon>0, \exists N=\max\{N_1,N_2\}\in N, \forall n>N$.

有 $|S_n-l|<(MN+1)\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}t_k=l.$