计算机科学与技术系列教材

# 离散数学题解

主编 程虹 郑巧仙

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

计算机科学与技术系列教材

# 离散数学题解

主　编　程虹　郑巧仙

武汉大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

离散数学题解/程虹,郑巧仙主编. —武汉：武汉大学出版社,2006.9
(计算机科学与技术系列教材)
ISBN 7-307-05079-X

Ⅰ.离… Ⅱ.①程… ②郑… Ⅲ.离散数学—高等学校—解题
Ⅳ.O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 052161 号

责任编辑:黄金文 夏炽元 责任校对:程小宜 版式设计:支 笛

出版发行：**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)
印刷:武汉大学出版社印刷总厂
开本：720×1000 1/16 印张:11.5 字数:233 千字
版次:2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-05079-X/O·343 定价:16.00 元

# 计算机科学与技术系列教材

## 编　委　会

# 前　言

本书是《离散数学》一书的配套题解.

离散数学是以数学的方法研究离散体的结构特征、相互关系以及相互运算规律的学科. 而计算机研究的对象正是离散信号和数据，计算机的硬件结构也正是由具有两态的元器件组成的. 所以离散数学是计算机科学与技术的核心基础理论课，是培养学生抽象思维和逻辑推演能力的必修课，是掌握处理离散结构所必须的工具和方法.

在离散数学的教学中，我们发现学生经常反映这样的问题：概念多，内容散，知识点碎，复习时不知道哪里是重点；对书上的例题一看就懂，但自己遇到题目却不知从何下手；没有典型题目的具体解题思路等. 故可看出离散数学的解题方法起着特殊重要的作用. 通过解题方法的训练，可以培养学生的综合分析和理论联系实际的能力.

与配套教材一致，全书可分为 8 个部分：

1. 初等数论基础知识
2. 数理逻辑
3. 集合
4. 关系
5. 函数
6. 代数系统
7. 图论
8. 计算机科学中的应用.

每部分均包含三方面的内容：

(1) 内容提要（分定义和常用定理两部分）；

(2) 典型题解；

(3) 习题解答.

其中郑巧仙编写第三、第六章，其他章节和前言均由程虹负责编写并对全书做统编和审核. 本书在编写及出版过程中，得到襄樊学院电气信息工程系、湖北大学数学与计算机科学学院领导和刘学书老师、袁磊老师及同事们的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢.

本书可作为《离散数学》的辅助教材，也可以作为其他《离散数学》教材的参考书.

由于作者水平有限，难免有错误与不足，请读者批评指正.

作　者

2005 年 10 月

# 目 录

# 第一章　初等数论知识

## 内容提要

### 整数的整除性

**定义 1.1**　任给两个整数 $m,n$,其中 $n\neq 0$,如果存在一个整数 $k$,使得等式 $m=n\cdot k$ 成立,则称 $n$ **整除** $m$,或称 $m$ 被 $n$ 整除,记为 $m/\!/n$,并称 $n$ 是 $m$ 的一个因子,$m$ 是 $n$ 的倍数.

**定理 1.2**　整除关系具有以下性质:

以 $I$ 表示全体整数集合,设 $m,n,k,x,y\in I$,且 $m,n,k\neq 0$,则

(1)对任何 $m\neq 0$,有 $m/\!/m$.

(2)若 $m/\!/n$ 且 $n/\!/m$,则 $m=\pm n$.

(3)若 $m/\!/n$ 且 $k/\!/m$,则 $k/\!/n$.

(4)若 $m/\!/n$,则$(m\cdot k)/\!/n$.

(5)若 $m/\!/n$ 且 $k/\!/n$,则$(m\cdot x+k\cdot y)/\!/n$.

(6)若 $m,n>0$,且 $m/\!/n$,则 $n\leqslant m$.

**定理 1.3**　设 $m,n$ 是两个整数,其中 $n>0$,则存在两个惟一的整数 $q$ 和 $r$,使得 $m=n\cdot q+r$,其中 $0\leqslant r<n$ 成立($r$ 称为 $m$ 除以 $n$ 的余数).

**定义 1.4**　$m,n$ 是两个不同时为零的整数,如果整数 $R\neq 0$ 满足:

(1)$m/\!/R$,且 $n/\!/R$,则称 $R$ 为 $m,n$ 的公因子,也称为**公约数**.

(2)对整数 $k\neq 0$,若 $R$ 是 $m,n$ 的所有公因子中最大的,则称 $R$ 为 $m,n$ 的**最大公因子**,记为 $R=(m,n)$.

**定理 1.5**　设 $m,n,R$ 是三个不全为零的整数,且 $m=n\cdot q+R$,则$(m,n)=(n,R)$,即 $m,n$ 的最大公约数等于 $n,R$ 的最大公约数.

**推论 1.6**　任给两个整数 $m,n>0$,则$(m,n)$就是带余除法最后一个不等于零的余数.

**定理 1.7**　任给 $m,n>0$,则存在两个整数 $x,y$(不一定是正整数),使得:

$m(m,n)=m\cdot x+n\cdot y.$

**定义 1.8**　设 $m,n$ 为整数,如果整数 $k$ 满足:

(1) $k /\!/ m, k /\!/ n$，且 $k>0$.

(2) 对任意整数 $R$，且 $R /\!/ m, R /\!/ n$，有 $k \leqslant |R|$.

则称 $k$ 为 $m,n$ 的**最小公倍数**，记为 $[m,n]$.

**定理 1.9** 两个不为零的整数，其最小公倍数等于该两数之积除以此两数的最大公约数.

**推论 1.10** 设 $a,b$ 是任给的两个正整数，则 $a,b$ 的所有公倍数是最小公倍数 $[a,b]$ 的倍数.

## 素数及其性质

**定义 1.11** 一个大于 1 的整数，如果它的正因数只有 1 和它本身，则称此数为**素数**，否则称为**合数**.

**引理 1.12** 设 $a$ 是大于 1 的整数，则 $a$ 除去 1 之外的最小因数 $q$ 必是素数.

**引理 1.13** 设 $p$ 是素数，$a$ 是任一整数，则 $a$ 与 $p$ 的最大公约数 $(p,a)=1$，或是 $a /\!/ p$.

**定理 1.14** (整数的惟一分解定理) 任一大于 1 的整数能惟一分解为素数的乘积.

**定理 1.15** 设 $a$ 是任一大于 1 的整数，其最小正因数 $q$ 是素数；当 $a$ 是合数时，则 $q \leqslant \sqrt{a}$.

## 特殊性质的整数关系

**定义 1.16** 设 $x,y,z$ 均为整数，若 $z^2=x^2+y^2$，则称 $x,y,z$ 为一组**毕氏数**.

**定义 1.17** 任何一个整数，如果它是两个整数之积，则称为**矩形数**.

**定义 1.18** 满足 $T_n=\frac{1}{2}(n+1)\cdot n(n=1,2,\cdots)$ 关系的数 $T_n$ 称为**三角数**.

**定义 1.19** 在 $n\times n$ 的乘法表中，以对角线上的点为折线中点，其周边各数称为**磬折形数**.

**定义 1.20** 所谓幻方就是将 $1,2,\cdots,n^2$ 这 $n^2$ 个整数排列成满足下列条件的方阵：使其每一行、每一列以及每条对角线上的数字相加都有相同的和. 此和称为**幻和**，且很容易求出幻和为 $S=\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

**定义 1.21** 一个数，若它的所有除得尽的因数(除去该数本身)之和等于这个数的本身，则称此数为**完全数**.

**定理 1.22** 若数 $R$ 满足 $R=2^{p-1}\cdot(2^p-1)$，其中 $2^p-1$ 是麦生素数，$p$ 为另一素数，则 $R$ 是**完全数**.

**定义 1.23** 自然数 $m,n$，若它们除本身之外的所有因数之和等于对方，则称它们互为**亲和数**.

**定义 1.24** 如果一个数的各位数字的立方和等于该数，则称此数为**水仙花数**.

**定义 1.25**　同构数是指该数平方的最后一位或几位数字恰好就是该数.

### 同余式

**定义 1.26**　所谓同余式是指用整数 $m$ 同时去除两个整数 $a,b$ 所得到的余数相同，则称 $a,b$ 对模 $m$ 同余，记为 $a\equiv b(\bmod m)$.

**定理 1.27**　同余式的性质有：

(1) $a\equiv a(\bmod m)$　（自反性）.

(2) 若 $a\equiv b(\bmod m)$，则 $b\equiv a(\bmod m)$　（对称性）.

(3) 若 $a\equiv b(\bmod m)$，且 $b\equiv c(\bmod m)$，则 $a\equiv c(\bmod m)$　（传递性）.

**定理 1.28**　如果 $a\equiv b(\bmod m)$，$\alpha\equiv\beta(\bmod m)$，则 $a\cdot x+\alpha\cdot y\equiv b\cdot x+\beta\cdot y(\bmod m)$，其中 $x,y$ 为任给的整数.

## 典型题解

**例 1.1**　在平面上给定 25 个点，其中任意三点都不在同一直线上，过两点可以作一条直线，以三点为顶点可以作一个三角形，问这样的直线和三角形各有多少？

**解答**：根据排列组合知识可知：

$$\text{直线数}: N_1=C_{25}^2=\frac{25!}{2!\cdot 23!}=300.$$

$$\text{三角形数}: N_2=C_{25}^3=\frac{25!}{3!\cdot 22!}=2\ 300.$$

**例 1.2**　求 $(2x_1-3x_2+5x_3)^6$ 中，$x_1^3\cdot x_2\cdot x_3^2$ 项的系数.

**解答**：根据题目知方次系数为 3，1，2，原方次为 6，于是根据二次式函数的知识可知：令 $n=6, n_1=3, n_2=1, n_3=2$，则 $x_1^3\cdot x_2\cdot x_3^2$ 项的系数为

$$\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 2!}\cdot 2^3\cdot(-3)^1\cdot 5^2=\frac{6!}{3!\cdot 1!\cdot 2!}\cdot 8\cdot(-3)\cdot 25=-36\ 000.$$

**例 1.3**　若有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？有几种可能方案？

**解答**：根据整数的拆分知识可知：

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$
$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10}.$$

其中方次 1 ~ 10 即为可称出 1 ~ 10 克几种重量，对应于方次的系数即为该方次所表示的重量有几种称法的方案数.

如：称 5 克的方案数为：$2x^5$，2 即为方案数 $5=3+2=1+4$.

　　称 7 克的方案数为：$2x^7$，2 即为方案数 $7=4+3=4+2+1$.

**例 1.4** 应用同余式的性质,计算任何一天是星期几.

$$S = x - 1 + \frac{x-1}{4} - \frac{x-1}{100} + \frac{x-1}{400} + C.$$

其中 $x$ 是公元年数,$C$ 是从该年的元旦计算到该天(包括该天)的总天数(注意闰年与非闰年计算天数上的差别). 若为闰年,也应按闰年的实际天数计算 $C$,然后 $S$ mod 7 的余数就是该天对应星期几.

例:求 1941 年 6 月 22 日是星期几 . $C = 173, x = 1\ 941$

$$S = 1\ 941 - 1 + \frac{1\ 941-1}{4} - \frac{1\ 941-1}{100} + \frac{1\ 941-1}{400} + 173$$

$= 2\ 583$(取整)

$S \bmod 7 = 0$,所以该天是星期天.

例:求 2004 年 3 月 5 日是星期几.

$x = 2\ 004, C = 31 + 29 + 5 = 65$,

$$S = 2\ 004 - 1 + \frac{2\ 004-1}{4} - \frac{2\ 004-1}{100} + \frac{2\ 004-1}{400} + 65 = 2\ 553.727\ 5,$$

取整 $S = 2\ 553$ ,$S \bmod 7 = 5$,即为星期五.

**例 1.5** $n$ 条直线最多能将平面分成多少块?

**解答**:这里公式的推导采用不完全归纳法,它不是得出惟一的个数值,而是得出一个最大的值. 这显然也是根据初等数论的知识.

$n = 1$ 时,显然将平面划分为两个区域.

$n = 2$ 时,若两条直线平行,则划分为三个区域;若两条直线相交,则最多可划分为四个区域.

$n = 3$ 时, 若三条均平行,则划分为 4 个区域;若两条平行,另一条相交,则划分为 6 个区域;

若三条直线均两两相交,则划分为 7 个区域.

人们推想,每增加一条直线,则划分的区域数在原来的基础上最多增加多少?

发现推导公式:

$$S_n = \frac{n^2 + n + 2}{2},$$

这个公式对不对呢?

$n = 1$ 时,$S_1 = 2$;

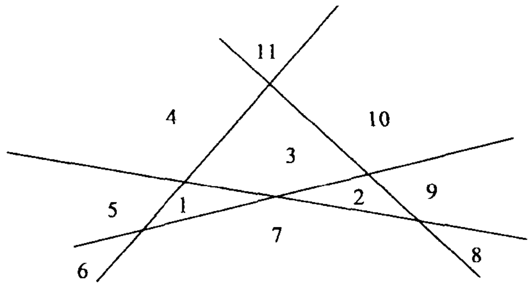
$n = 2$ 时,$S_2 = 4$;

$n = 3$ 时,$S_3 = 7$;

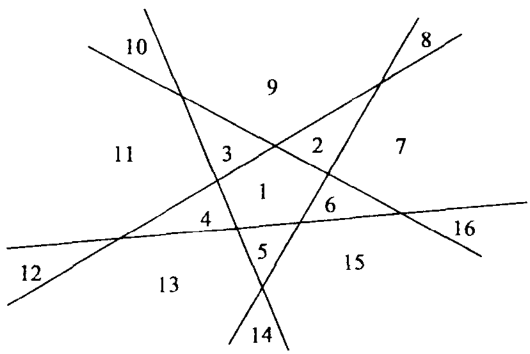
$n = 4$ 时,$S_4 = 11$;

$n = 5$ 时,$S_5 = 16$.

由此可见,每增加一条边,最多在原来的基础上增加 $n$ 块,即




$n=4$ 时，平面被划分的情况示意图




$n=5$ 时，平面被划分的情况示意图

$S_n = 2+2+3+4+5+\cdots+n = \frac{n^2+n+2}{2}$

我们可以采用数学归纳法证明上述公式.

当 $n=1$ 时，$S_1 = \frac{1^2+1+2}{2} = 2$ 成立.

若假设 $n=k$ 时成立，即 $S_k = \frac{k^2+k+2}{2}$，则当 $n=k+1$ 时，考虑增加的线与原有的线均不相交，有

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k^2+k+2+2k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}, \end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时公式也成立，证毕.

**例 1.6** $n$ 个平面最多能把空间划分为多少个子空间？

**解答**：$n=1$ 时，最多划分为 2 个子空间.

$n=2$ 时，最多划分为 4 个子空间.

$n=3$ 时，最多可划分为 8 个子空间.

$n=4$ 时，最多可划分为 15 个子空间.

每增加一个平面，最多在原来的基础上增加的子空间数为

$$S_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ \dfrac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

最多可划分的子空间数为

$$S_n=2+2+4+7+\cdots+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}$$
$$=\frac{2n^3+10n+12}{12},n=1,2,\cdots.$$

## 习 题 解 答

1. 求证任何奇数的平方减 1 必是 8 的倍数.

**证明**：令奇数为 $M=2n+1$，利用数学归纳法，

当 $n=1$ 时，$(2n+1)^2-1=9-1=8$，可以被 8 整除，成立；

令 $n=k$ 时成立，即$[(2k+1)^2-1]$能被 8 整除，

则当 $n=k+1$ 时，
$$[(2(k+1)+1)^2-1]=[(2k+3)^2-1]$$
$$=4k^2+12k+8$$
$$=(2k+1)^2-1+8(k+1)$$
$$=[(2k+1)^2-1]+8(k+1).$$

故任何奇数的平方减 1 必是 8 的倍数.

2. 若 $b/\!/a$，$a>0$，则 $a$ 与 $b$ 的最大公约数为 $a$，即$(a,b)=a$.

**证明**：因为 $b/\!/a$，所以 $b=ka$，$k$ 为整数，$a>0$，

于是$(b,a)=(ka,a)$，显然 $ka$ 与 $a$ 的最大公约数为 $a$，

即$(a,b)=a$.

3. 若 $a>0$，则$((a,b),b)=(a,b)$.

**证明**：设$(a,b)=d$，则 $b=kd$，$k$ 为整数，

于是 $b$ 与 $d$ 的最大公约数为$(b,d)=(kd,d)=d=(a,b)$，

即$((a,b),b)=(a,b)$.

4. 对于下列 $a$ 和 $b$ 的值，计算$(a,b)$，并用 $sa+tb$ 的形式表示.

(1) $a=14$，$b=35$.

(2) $a=7\ 864$, $b=4\ 148$.

(3) $a=3\ 141$; $b=1\ 592$.

**解答**:(1) 显然,本题是利用定理 1.7 确定 $s$ 与 $t$ 的值(习题 4(1)解答表).

习题 4(1)解答表

| $a$ | $b$ | $q_i$ | $r_i$ | 递推公式 |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 35 | 2 | 7 | $r_1=7=b-2a$ |
| 14 | 7 | 2 | 0 | |

求得 $s=-2, t=1$,即 $7=35-14\times 2$,

也即 $(a,b)=7=b-2a$.

(2) 同理可计算得(习题 4(2)解答表):

习题 4(2)解答表

| $a$ | $b$ | $q_i$ | $r_i$ | 递推公式 |
|---|---|---|---|---|
| 7 864 | 4 148 | 1 | 3 716 | $r_1=3\ 716=a-b$ |
| 4 148 | 3 716 | 1 | 432 | $r_2=432=-a-2\times b$ |
| 3 716 | 432 | 8 | 260 | $r_3=260=9a-17b$ |
| 432 | 260 | 1 | 172 | $r_4=172=-10a+19b$ |
| 260 | 172 | 1 | 88 | $r_5=88=19a-36a$ |
| 172 | 88 | 1 | 84 | $r_6=84=-29a+55b$ |
| 88 | 84 | 1 | 4 | $r_7=4=48a-91b$ |
| 84 | 4 | 21 | 0 | |

求得 $s=48, t=-91, r_7=(a,b)=4$,即 $4=48\times 7\ 864-91\times 4\ 148$,

也即 $(a,b)=48a-91b$.

(3)同理可计算得(习题 4(3)解答表):

习题 4(3)解答表

| $a$ | $b$ | $q_i$ | $r_i$ | 递推公式 |
|---|---|---|---|---|
| 3 141 | 1 592 | 1 | 1 549 | $r_1=1\ 549=a-b$ |
| 1 592 | 1 549 | 1 | 43 | $r_2=43=-a+2\cdot b$ |
| 1 549 | 43 | 36 | 1 | $r_3=1=37a-73b$ |
| 43 | 1 | 43 | 0 | |

求得 $s=37, t=-73$，即 $1=37\times 3\,141-73\times 1\,592$，

也即 $(a,b)=37a-73b$.

5. 证明：若对于某个 $m$ 有 $(3^m+1)/\!/10$，则对所有 $n>0$，则 $(3^{m+4n}+1)$ 可被 10 整除.

**证明**：用数学归纳法证.

当 $n=1$ 时，$(3^m+1)/\!/10$ 成立.

令 $n=k$ 时，$(3^{m+4k}+1)/\!/10$ 成立.

则当 $n=k+1$ 时，
$$\begin{aligned}3^{m+4k+4}+1&=3^4\times 3^{m+4k}+1\\&=81\times 3^{m+4k}+81-80\\&=81\times(3^{m+4k}+1)-80.\end{aligned}$$

显然可以被 10 整除. 证毕.

6. 求 2 345 及 3 456 两个数的素数分解式.

**解答**：$2\,345=5^1\times 7^1\times 67$，

$3\,456=2^7\times 3^3$

7. 证明：设 $n>0$，则 $n(n+1)$ 决不会是一个平方数.

**证明**：假设 $n(n+1)$ 是一个平方数，即 $s=\sqrt{n(n+1)}$，且 $s\in I$，

存在整数 $k$，使 $s=k$，那么 $n<\sqrt{n(n+1)}=k<n+1$，即 $n<k<n+1$，这显然是不可能的，所以 $n(n+1)$ 决不是一个平方数.

8. 设 $n=5!+1$，证明 $n+1, n+2, n+3, n+4$ 均为合数.

**证明**：$n=5!+1=121$. 显然

$n+1=122$ 有因数 2；

$n+2=123$ 有因数 3；

$n+3=124$ 有因数 2；

$n+4=125$ 有因数 5.

故 $n+1, n+2, n+3, n+4$ 均为合数.

9. 若 $k\equiv 1 \pmod 4$，问 $6k+5$ 模 4 同余几？

**解答**：因为 $k\equiv 1 \pmod 4$，即 $k=4q+1$，则 $6k=24q+6$.

所以 $6k+5=24q+6+5=24q+11=24q+8+3$.

故 $6k+5\equiv 3 \pmod 4$，也即 $6k+5$ 模 4 同余 3.

10. 证明：每个大于 3 的素数模 6 或同余 1，或同余 5.

**证明**：题目本身说明大于 3 的素数模 6，不可能同余 2，或 3，或 4.

假设 $m$ 是素数，并假设可以同余 2，即 $m=2 \pmod 6$，则 $m=6k+2=2(3k+1)$，

这与 $m$ 是素数矛盾，所以 $m$ 不可能同余 2.

同理 $m=3 \pmod 6=3(2k+1)$ 与 $m=4 \pmod 6=2(3k+2)$ 均与 $m$ 是素数矛盾，

故每个大于 3 的素数模 6 或同余 1，或同余 5.