工 程 力 学

第一部分 理論力学

第三分册 动力学

（初 稿）

天津大学理論力学教研室編

高 等 教 育 出 版 社

本書是天津市广播函授大学用的“工程力学”教材的第一部分理論力学的第三分册——动力学。

本書共分四章，叙述动力学的基本定理及其应用。書中有不少例題，每章之末并附有習題。

本書除可供紅專大学及函授学校教学之用外，尚可供一般业余大学、半工半讀学校及干部自学作为教材。

工程力学第一部分理論力学

第三分册 动力学

（初 稿）

天津大學理論力学教研室編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

人民教育印刷厂印訂 新华書店發行

統一書号 15010·760 開本 850×1168 1/32 印張 1 4/16

字數 83,000 印數 3,001—8,000 定價(7) ¥0.17

1959年3月第1版 1959年6月北京第2次印刷

目　　录

第十四章　动力学的基本定律 ……………………………………………………129

§53．前言　§54．基本定律　§55．应用基本定律解决两大基本問題举例　習題十四

第十五章　动量定理 ……………………………………………………………134

§56．动量的概念和求法　§57．力的冲量　§58．質点的动量定理　§59．質点系的动量定理　§60．質点系質量中心运动定理　習題十五

第十六章　动量矩定理 …………………………………………………………142

§61．質点和質点系的动量矩　§62．質点的动量矩定理　§63．質点系的动量矩定理　§64．剛体繞定軸轉动的轉动方程式　§65．轉动慣量．平行軸定理　習題十六

第十七章　功与动能 ……………………………………………………………151

§66．一个力的功　§67．重力的功　§68．合力的功　§69．轉动力矩所作的功　§70．功率　§71．質点与質点系的动能　§72．質点的动能定理　§73．質点系的动能定理　習題十七

动 力 学

第十四章 动力学的基本定律

§53. 前言

現在，我們开始研究理論力学的第三部分——动力学。在靜力学中，我們曾研究过力系代換和力系平衡問題；在运动学中，我們从几何观点研究过一些簡單的机械运动現象，幷不考慮作用在运动物体上的力以及它的質量。很明显，我們还必須进一步研究作用在物体上的力与物体运动的关系，这就是动力学的基本任务。因而，动力学中有两大基本問題：(1)已知物体的运动，求作用在物体上的力；(2)已知物体所受的力，求物体的运动。应該指明，在解决第二个基本問題时，不仅需要知道力，同时还必須知道运动的初始条件，否則，是无法确定物体的运动的。

为了便于系統地研究动力学問題，我們将把实际的运动物体用理想模型来代替。根据实际情况和問題的性質，我們可以把实际物体分别視为質点、質点系或剛体。所謂質点，不是运动学中所談过的几何点，而是具有一定質量的点。如果运动物体的尺寸很小，或者它的尺寸和运动范圍比較起来是很小的，或者它的几何形状与所研究的問題无关时，都可以将此物体当作質点来研究。如炮彈的运动，行星运动等皆可視为質点。所謂質点系，就是彼此有一定联系的一群質点。应該注意，这些質点不能是完全孤立的，互不相关的。如用一根繩拴起来的两个物体，即可視为質点系。至于剛体，实际上是質点系的一种特殊情况——不变質点系，其概念与靜力学中所談过的相同。

动力学問題的研究，是以几个基本定律为依据的。应用这些定律

或由此推出一些建立力和运动的关系的定理，来解决前面提到的两大基本問題。下面我們就来研究質点动力学的基本定律。

§54. 基本定律

質点动力学的基本定律，是在实踐的基础上建立起来的。基本定律的建立工作，首先从意大利科学家伽利略开始，以后英国科学家牛頓在伽利略等許多科学家所得成果的基础上，对机械运动的規律，作了非常审愼而深入的研究。最后在 1686 年發表了动力学的基本定律。

第一定律 如質点不受任何力的作用，則此質点或者处于靜止，或者作等速直綫运动。

这个定律說明了質点在不受外力时，有保持运动状态不变的性質，这种性質称为慣性。所以第一定律也称为慣性定律。应該指出，慣性是和物質不可分割的物質本身的一种屬性，这种性質永远随物質的存在而存在。我們知道，靜止和运动是相对的，不建立参考坐标系就无法描述和研究質点的运动。事实上，基本定律并不是在任何坐标系中都是适用的，只有在基础坐标系中，該定律才成立。在我們研究的工程問題中，往往以固結在地球表面的坐标为基础坐标系。

第二定律 質点受力作用后，将产生加速度。这加速度的方向与力的方向相同，而这加速度的大小与質点的質量的乘积，則等于力的大小。

如以 $\bar{F}$ 表示質点所受的力，以 m 表示此質点的質量，以 $\bar{w}$ 表示質点由于力 $\bar{F}$ 的作用而产生的加速度，則上述第二定律可用下面向量等式表示之，即:

$$\bar{F}=m\bar{w}. \tag{1}$$

这个向量等式表示了質量、力以及由此力所产生的加速度三者之間的关系，这个式子称为动力学基本方程式。

关于力与加速度的概念，已經在前面講过了。下面，我們将研究一下关于質量的問題。

1) 質量 m 是一个数量，而且，对于某一已知質点来講，它是一个正値的常数。

2) 由公式(1)可知，当加速度 $\bar{w}$ 相同时，力的大小与質点的質量成正比。換句話說，要想使質点得到某一已知加速度，这也就是說，要想使質点的速度作同样的改变，則質点的質量越大，所应作用其上的力也越大。由此可見，質点的質量越大，則其对質点的速度的改变的阻碍也越大。因而，質点的質量，实質上是其慣性的度量。

3) 根据实驗，当物体由于其重量的作用而在眞空中自由落下时，亦即当物体仅受重力的作用而落下时，它将得到一个重力加速度(这重力加速度的大小，在地球各处并不相同，它与当地的地理緯度、距海平面的高度以及其他物理因素有关。在工程上，我們通常把它看作一个常数，并令它等于 9.81 公尺/秒^2)。如以 P 表示質点的重量，以 m 表示其質量，以 g 表示重力加速度，則根据公式(1)，可得：

$$P=mg, \tag{2}$$

因而

$$m=\frac{P}{g}. \tag{3}$$

由此可知，質点的質量等于其重量除以地面上該处的重力加速度。

应該指出，根据上述，由于地面上各处重力加速度并不相同，故同一質点的重量并不是一个常数，它随所处的地位的不同而不同；但其質量却永远保持不变。

4) 在工程單位制中，力的單位公斤、長度的單位公尺与时間的單位秒是三个基本單位，而質量的單位則为导出單位。在公式(1)中，如令 $F=1$ 公斤，$w=1$ 公尺/秒^2，則此时 $m=1$ 工程單位質量。因此，在工程單位制中，一个工程單位質量乃指这样一个質量，这个質量受 1 公斤的力作用时，能够引起 1 公尺/秒^2 的加速度。而其單位，則为

$$m=\frac{\text{力}}{\text{加速度}}=\frac{\text{公斤}}{\text{公尺/秒}^2}=\frac{\text{公斤}\cdot\text{秒}^2}{\text{公尺}}.$$

第三定律 两个質点的相互作用力总是大小相等、作用綫相同而

方向相反。

这和静力学公理 4 的內容是一样的，不过比它更丰富一些。这个定律不仅說明了物体之間的作用永远是相互作用，自然界的力永远是成对产生，而且还可結合第二定律，給出了比較質量大小的一种方法，卽两物体的質量之比与它們加速度的大小成反比，卽:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{w_2}{w_1}. \tag{4}$$

第四定律 如在質点上同时作用几个力，則此質点的加速度等于在这些力分別作用时該点所得加速度的几何和。卽

$$\bar{w}=\bar{w}_1+\bar{w}_2+\cdots+\bar{w}_n. \tag{5}$$

这就是力的作用互不相关定律。如果把加速度公式(5)中的各項以該質点的質量 m 乘之，再根据第二定律将 $m\bar{w}$ 写成 $\bar{F}$，則可得到:

$$\bar{R}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\cdots+\bar{F}_n=\Sigma\bar{F}. \tag{6}$$

这样，我們又一次得到了力的合成法則。由此可知，曾在靜力学中研究过的解决力系代換問題的各种办法，在动力学中仍然是正确而可用的。

§55. 应用基本定律解决两大基本問題举例

按質点和質点系分别举例如下。

圖 178

例 33 小球M的質量为 m，以長为 l 之繩系于固定点 O，在光滑水平面內作等速圓周运动(圖 178)。已知其速度为 v，試求軟繩作用在小球M上的拉力。

解 由运动学知道作等速圓周运动的小球 M，其切向加速度为零，法向加速度为 $w_n=\frac{v^2}{R}$，故其全加速度 $w=w_n$。

根据第二定律 $mw=F$；故所求之力的大小为

$$F=mw=mw_n=\frac{mv^2}{R},$$

其方向与加速度同向，永远沿軟繩并指向固定点 O。

例 34 有两物塊各重 P_1 和 P_2，系于一根不可伸長的細繩的两端，并将此繩繞过一个半徑为R的定滑車(圖 179)。如果滑車軸的摩擦和滑車的質量可以忽略不計，并且 $P_1>P_2$，試求重 P_1 的物塊的加速度和繩的拉力。

解 应該注意 第二定律不能直接用于整个質点系，只能用于系內的每个質点上，对于这两个質点組成的系可以根据第二定律列出两个方程式：

$$P_1-T_1=\frac{P_1}{g}w. \qquad \text{(i)}$$

当 P_1 物塊加速下降时，P_2 物塊必然加速上升，即 P_2 的加速度方向向上，并且两者的大小相等：

$$T_2-P_2=\frac{P_2}{g}w. \qquad \text{(ii)}$$

上二式中，与加速度方向相同的力为正；反之为負。另外，由于不計滑車及繩之質量及軸的摩擦，所以

$$T_1=T_2. \qquad \text{(iii)}$$

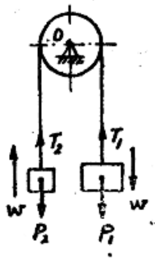

圖 179

联立解(i)、(ii)、(iii)式，可得：

$$w=\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}g; \quad T=\frac{2P_1P_2}{P_1+P_2}.$$

習題十四

1. 一电梯将 40 公斤重的貨物升高，此貨物系放在电梯內之台秤上。設最初台秤上的讀数为 41 公斤，而最末讀数为 38 公斤，求最初和最末时电梯(亦即貨物)之加速度。設 $g=10$ 公尺/秒²。

答：最初 $w=0.25$ 公尺/秒²，向上；
最末 $w=0.5$ 公尺/秒²，向下。

2. 解放牌汽車連載重共重 $Q=5400$ 公斤，以 $v=10$ 公尺/秒之速度駛过拱桥。此桥中点处之曲率半徑为 $\rho=50$ 公尺。試求汽車經过中点时对桥之压力。

答：4298 公斤。

3. 重 1 公斤之物塊 M 系于 30 公分長之綫上，綫之另一端系于固定点 D。重物在水平面內作圓周运动，成一錐擺形状，且綫与鉛垂綫成 60° 角（圖 180）。求重物之速度 v 与綫之張力 T。

答：$v=210$ 公分/秒，$T=2$ 公斤。

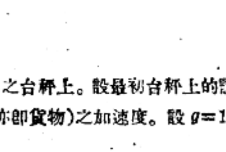

圖 180

4. 一重为 6000 公斤的好卡車，用繩拖一重量与它相同的坏卡車，在水平馬路上行駛，設摩擦系数为 0.18。問要使卡車(1)匀速前进；(2) 以 $w=0.1$ 公尺/秒² 的加速度前进，求卡車的牽引力和繩的張力。

5. 在圖 181 所示的起重装置上，B 为一鼓輪，A 为一滑車，負載的重量 $G=3$ 吨。如果不計机械損耗，試求使 G 以加速度 $a=1$ 公尺/秒² 上升时所需加于鼓輪 B 軸上的轉矩。如果負載上升的速度 $v=0.5$ 公尺/秒，鼓輪的轉速該是多少？鼓輪 B 的直徑 $d=75$ 公分。

答：轉矩 $M=620$ 公斤·公尺；

轉速 $n=25.4$ 轉/分。

6. 試求圖 182 所示鼓輪的轉矩，如果它正以加速度 $a=1$ 公尺/秒^2 把重量 $G_1=1$ 吨沿斜面往上拉。鼓輪本身的質量不計。鼓輪的直徑各为 $d_1=0.8$ 公尺，$d_2=0.6$ 公尺。重量 $G_2=0.6$ 吨。重量 G_1 与斜面間的摩擦系数 $\mu=0.2$，斜面的傾斜角 $\alpha=60^\circ$，不計机械損耗。

答：轉矩 $M=295$ 公斤·公尺。

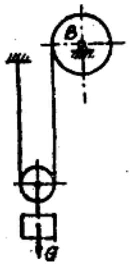

圖 181

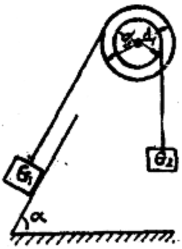

圖 182

第十五章　动量定理

§56. 动量的概念和求法

在上一章里，我們闡述了基本定律的內容并举例說明了解决动力学問題的方法。在以后几章里，我們将根据基本定律推导出一些普遍定理，卽动量定理、动量矩定理和动能定理，并用它来解决質点或質点系的动力学問題。

在运动学中，我們曾以位置、速度和加速度来說明点的运动状态，如果在动力学中仍是如此，必然是不够完全的，因为动力学不仅是研究运动現象，而且要从力和运动的关系上研究运动，要考虑力和运动物体的質量。实际上，質量很小的、却以很高速度运动着的子彈，具有很高的穿透能力；同时，象大家所知道那样，海輪相撞是件非常危險的事情，

尽管相撞时的速度不大，然而由于輪船的質量很大，也会造成極大的損失。由此可知，我們可用質点的質量和速度的乘积来作为質点运动的度量，并称其为質点的动量。很明显，質点动量 mv 仍是向量，其方向和速度相同，大小等于質量与速度的絕对値的乘积。在工程單位制中，动量的單位是

$$mv=\frac{公斤\cdot秒^2}{公尺}\times\frac{公尺}{秒}=公斤\cdot秒.$$

应該注意，由于速度是某瞬时的瞬时速度的簡称，所以談到动量，应理解为該瞬时的动量。

欲求質点在某瞬时的动量，可以直接依据上述定义求其大小和方向，同时我們也常常遇到求动量投影的問題。动量在某軸上的投影，等于質量与速度在該軸上投影的乘积，如：$[m\bar{v}]_x=mv_x$，$[m\bar{v}]_y=mv_y$。在已知速度投影的情况下，可以分别求出动量在坐标軸上的投影，然后再求动量向量的大小与方向。

至于某質点系在某瞬时的动量，就是系內各質点的动量按平行四边形規則求和所得的合向量。因而，質系的动量就等于 $\Sigma m\bar{v}$，其在平面直角坐标軸上的投影分别为 Σmv_x 和 Σmv_y。对于有限数目的質点所組成的系，就用这种直接求和的方法来求系的动量。

§57. 力的冲量

两物体相互作用，其結果是引起运动状态的改变，在力学中把这种作用称作力，这是在静力学中我們所熟知的。然而，物体运动状态的改变不仅与力有关，同时也和这个力作用时間的長短有关，力作用的时間愈長，速度的改变也就愈大，換句話說，物体运动状态的改变与力成正比，同时也与力作用的时間成正比。这样，我們又可得出表示物体机械作用的一个物理量——力的冲量。所謂冲量，就是力和力作用的时間的乘积。因为力是向量，与时間間隔相乘后仍是向量，其方向与力的方向相同。力的冲量，以 $\bar{S}$ 表示之。如果力是常力，則冲量为：

$$\bar{S}=\bar{F}(t-t_0), \tag{7}$$

其投影为:

$$\left.\begin{aligned} S_x=F_x(t-t_0)\\ S_y=F_y(t-t_0)\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

如果力是变力，則其冲量应以定积分的形式表示之:

$$\bar{S}=\int_0^t \bar{F}\cdot dt. \tag{9}$$

不难看出，冲量的單位是：力×时間＝公斤·秒。

§58. 質点的动量定理

設質点 M 的質量为 m，在常力 $\bar{F}$ 的作用下运动，則根据第二定律得：$m\bar{w}=\bar{F}$。但在大小方向都不改变的力作用下，質点的加速度 $\bar{w}$ 亦为常量，所以

$$\bar{w}=\frac{\bar{v}-\bar{v}_0}{t-t_0}.$$

将上式代入第二定律，得

$$m\left(\frac{\bar{v}-\bar{v}_0}{t-t_0}\right)=\bar{F}$$

或

$$m\bar{v}-m\bar{v}_0=\bar{F}(t-t_0). \tag{10}$$

这就是在常力作用下質点的动量定理。即在某时間間隔 Δt 内質点动量的改变等于作用在質点上力的冲量。

公式(10)是动量定理的向量式，其投影式是:

$$\left.\begin{aligned} mv_x-mv_{0x}=F_x(t-t_0);\\ mv_y-mv_{0y}=F_y(t-t_0).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

又如質点在变力作用下运动，則动量定理有如下的形式:

$$m\bar{v}-m\bar{v}_0=\int_0^t \bar{F}\cdot dt \tag{12}$$

或

$$\left.\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= \int_0^t F_x \cdot dt; \\ mv_y - mv_{0y} &= \int_0^t F_y \cdot dt, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

即質点动量的改变等于变力在 Δt 时間間隔内的总冲量。

在特殊情况下，如果力 $\bar{F}$ 为零，則 $m\bar{v}-m\bar{v}_0=0$，即 $m\bar{v}=m\bar{v}_0$。此时，該質点的动量(或其速度)不随时間改变，質点作慣性运动。

例 35 一木塊重 P 公斤，置于一不光滑的斜面上，这斜面的斜角 α 大于木塊与斜面之間的摩擦角，故木塊下滑(圖 188)。設木塊与斜面之間的滑动摩擦系数为 k，并設木塊由静止开始下滑，試求 t 秒末木塊的速度。

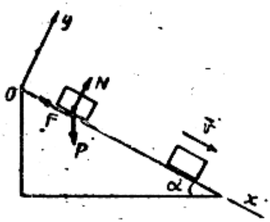

圖 188

解 因木塊的运动为沿斜面的平动，故可看作一个質点。取坐标軸如圖示。又因力是常力，可根据公式(11)列出下列两个方程式：

$$\frac{P}{g}v-0=(P\sin\alpha-F)t; \tag{i}$$

$$0=(N-P\cos\alpha)t. \tag{ii}$$

式(ii)中等式左边为零，是由于速度在 y 軸上的投影为零而得。故：

$$N-P\cos\alpha=0,\quad 即\quad N=P\cos\alpha.$$

根据庫侖定律知 $$F=kN=k\cdot P\cos\alpha,$$

代入(i)式，可以得到：

$$\frac{P}{g}v=(P\sin\alpha-kP\cos\alpha)t,$$

故 $$v=\frac{g}{P}(P\sin\alpha-kP\cos\alpha)t=(\sin\alpha-k\cos\alpha)g\cdot t.$$

由此可見，此木塊的运动是等变速直綫运动。

§59. 質点系的动量定理

設有由 n 个質点所組成的質点系，系内每个質点上所受的力可分为两类：一类为系外物体对它作用的力——外力，其合力以 $\bar{F}_e$ 表示；另一类是系内各質点間相互作用的力——内力，其合力以 $\bar{F}_i$ 表示。根据

質点的动量定理，可以写出系內某一質点的动量方程式：

$$m\bar{v}-m\bar{v}_0=\bar{F}_e(t-t_0)+\bar{F}_i(t-t_0),$$

式中 $\bar{F}_e(t-t_0)$为外力的冲量；$\bar{F}_i(t-t_0)$ 为內力的冲量。

对系內每个質点都可以根据質点动量定理写出上式，然后再逐項相加，則得：

$$\Sigma m\bar{v}-\Sigma m\bar{v}_0=\Sigma\bar{F}_e(t-t_0)+\Sigma\bar{F}_i(t-t_0). \tag{14}$$

由于系內質点相互作用的內力永远是等量反向，所以內力的合力是零，內力的总冲量也等于零。卽 $\Sigma\bar{F}_i(t-t_0)=0$。因此：

$$\Sigma m\bar{v}-\Sigma m\bar{v}_0=\Sigma[\bar{F}_e(t-t_0)]. \tag{15}$$

公式(15)，是以向量形式表示的質点系动量定理，卽：質点系的动量在某一时間間隔內的改变，等于作用在这系上的所有外力在同一时間間隔內冲量之和。

上述向量等式，也可以寫成为投影式：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma mv_x-\Sigma mv_{0x}&=\Sigma[F_{ex}(t-t_0)];\\ \Sigma mv_y-\Sigma mv_{0y}&=\Sigma[F_{ey}(t-t_0)].\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

在特殊情况下，如外力的合力等于零，則 $\Sigma[\bar{F}_e(t-t_0)]=0$，由此得：

$$\Sigma m\bar{v}-\Sigma m\bar{v}_0=0 \text{ 或 } \Sigma m\bar{v}=\Sigma m\bar{v}_0=\text{常数}。$$

因而，当作用于系上的外力的合力等于零时，則此質点系的动量保持不变。

同理，如果外力在某一軸上的投影之和等于零，則系的动量在同一軸上的投影保持为常数。

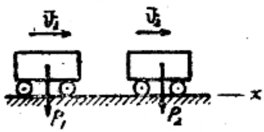

圖 184

例 36 两个質量分别为 m_1 与 m_2 的車廂借慣性而沿直綫水平軌道移动。車廂的速度分別为 v_1 与 v_2(圖 184)，且 $v_1>v_2$。假定車廂的碰撞为非彈性的，求在碰撞后車廂的公共速度 u。

解 在本例中的外力为：車廂的重量 P_1，P_2 与軌道的垂直反作用力。略去軌道与車輪間的摩擦力。又因碰撞时互相作用的压力对于系來說是內力。因此在任何时候，所有这些外力在 x 軸上的投影均等于零，而这一質系的动量在 x 軸上的投影也

就保持为常数，即在碰撞后仍应保持与碰撞前的动量相等，故得：

$$(m_1v_1+m_2v_2)=(m_1+m_2)u,$$

由此得：

$$u=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}.$$

§60. 質点系質量中心运动定理

設有 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 等質点所組成的質点系，其中各个質点的質量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，这些質点在平面直角坐标系（基础坐标系）中的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，则由下列公式所决定的几何点 c 称为該質点系的質量中心，或称慣性中心：

$$\left.\begin{aligned} x_c&=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\Sigma(mx)}{\Sigma m};\\ y_c&=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\Sigma(my)}{\Sigma m},\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

式中 Σm 是質点系的总質量，令 $M=\Sigma m$，則

$$Mx_c=\Sigma mx;$$

$$My_c=\Sigma my.$$

将上式两边对时間 t 求导数，則得：

$$M\frac{dx_c}{dt}=\frac{d}{dt}(\Sigma mx)=\Sigma\frac{d}{dt}(mx)=\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right);$$

$$M\frac{dy_c}{dt}=\frac{d}{dt}(\Sigma my)=\Sigma\frac{d}{dt}(my)=\Sigma\left(m\frac{dy}{dt}\right),$$

或

$$\left.\begin{aligned} Mv_{cx}&=\Sigma mv_x;\\ Mv_{cy}&=\Sigma mv_y.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

再对公式(18)的等号两边对時間 t 求一次导数，則得：

$$M\frac{dv_{cx}}{dt}=\frac{d}{dt}\Sigma mv_x=\Sigma m\frac{dv_x}{dt},$$

即 $$Mw_{cx}=\Sigma mw_x=\Sigma F_x=\Sigma F_{ex}+\Sigma F_{ix}=\Sigma F_{ex}\quad(\because \Sigma\vec{F}_i=0),$$

同理 $$Mw_{cy}=\Sigma mw_y=\Sigma F_y=\Sigma F_{ey}+\Sigma F_{iy}=\Sigma F_{ey},$$

或

$$\left.\begin{aligned} Mw_{cx}&=\Sigma F_{ex};\\ Mw_{cy}&=\Sigma F_{ey}.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

上式可写成为向量等式:

$$M\overline{w}_c=\Sigma\overline{F}_e. \tag{20}$$

公式(20)表示質点系質心运动定理。将它与第二定律比較一下，不难得出如下結論:質点系的总質量与質心的加速度的乘积，等于質点系所受外力之和。換言之，質点系質量中心的运动有如一个質点的运动一样，这質点具有該系的总質量，且受該系所有外力的作用。

从上述定理可以知道，質点系內各質点間相互作用的內力，对質心的运动沒有任何影响，而且在質点系不受外力时，該系的質心恒作慣性运动，或者靜止，或作等速直綫运动。

因此，如巳知質点系上作用的外力，就不难求得該系質心运动的規律；反之，如巳知質心运动規律，就能够确定作用于質点系上的外力。現举例說明其应用。

例 37 一根均質細杆，長为 $2l$，重为 P，繞固定軸 O 而轉动(圖 185)。設其轉到圖示的位置时，其角速度为 ω，其角加速度为 ε。試求此时固定軸 O 对此杆的反作用力。

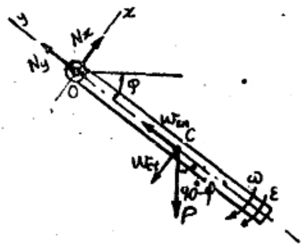

圖 185

解 因此杆是均質杆，故其重心(亦即其質心) C 在此杆的中点。并且，根据运动学可知，此时質心的切向加速度与法向加速度的大小应为

$$w_{ct}=l\varepsilon \text{ 与 } w_{cn}=l\omega^2,$$

而其方向，則如圖所示。

至于此时細杆所受的外力，則为杆的重力 P 以及固定軸 O 对此杆的反作用力；后者的大小与方向均为未知。选坐标軸如圖，并設上述固定軸的反作用力沿两坐标軸的分力分別为 N_x 与 N_y，則根据質心运动定理，可得

$$Mw_{cx}=\Sigma F_{ex};$$

$$\frac{P}{g}(-l\varepsilon)=N_x-P\sin(90^\circ-\varphi); \tag{i}$$

$$Mw_{cy}=\Sigma F_{ey};$$

$$\frac{P}{g}l\omega^2=N_y-P\cos(90^\circ-\varphi). \tag{ii}$$

由(i)得 $$N_x=P\sin(90^\circ-\varphi)-\frac{P}{g}l\varepsilon=P\left(\cos\varphi-\frac{l\varepsilon}{g}\right);$$

由(ii)得 $N_y = P\cos(90^\circ-\varphi)+\frac{P}{g}l\omega^2 = P\left(\sin\varphi+\frac{l\omega^2}{g}\right)$.

今固定軸O处的反作用力沿x軸与y軸上的二分力旣已求得，则总的反作用力的大小与方向，就不难用静力学中求合力的方法将其求出。

習題十五

1．汽車以72公里/小时之速度在平直道上行駛。問車輪对于路面的摩擦系数k应为多大，方能使汽車在制动后6秒鐘停止？設車輪在制动后立即停止轉动。

答：$k=0.34$。

2．重100公斤之物体以与水平成30°角的100公斤力拉之使向右滑动。問此物体自靜止开始5秒后，其速度为若干？設物体与地面間之动摩擦系数$k=0.2$。

答：$v=37.6$公尺/秒。

3．有一顆5公斤重的炮彈，从大炮里以$v=800$公尺/秒的速度射出。假定炮彈在炮膛里运动的时間是0.01秒，在这期間作用于炮彈的力F大小不变，試求这个力F的大小。如果大炮自重是$P=2000$公斤，試求开炮时大炮所得的速度v_1。設炮身处于水平位置。

答：$F=40800$公斤；$v_1=2$公尺/秒；与炮彈方向相反。

4．人重60公斤，站在一条重100公斤的靜止的船上，这时人距岸15公尺。試求人在船上向岸行走4公尺后与岸之距离S(水之阻力略去不計)。

答：$S=12.5$公尺。

5．圖186示一电动机，定子重$P=50$公斤，轉子重$Q=2$公斤，轉子的重心与旋轉軸之間有一偏心距离$e=0.2$公分。轉子当其正常工作时可認为是等角速度旋轉，其数值为$n=$ $=3000$轉/分。求底坐的鉛垂方向的反作用力的最大值。

答：$N_1=92.4$公斤。

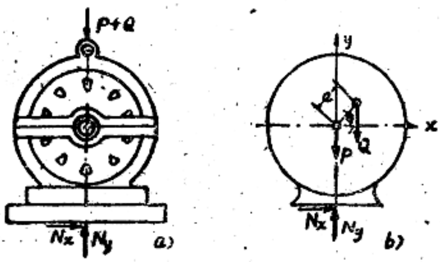

圖 186

第十六章 动量矩定理

§61. 質点和質点系的动量矩

設一質点 M 的質量为 m, 在力 $\bar{F}$ 作用下，沿某一平面曲綫运动(圖187)。在圖示位置时，其速度为 $\bar{v}$。在此平面內任取一点 o, 并設 o 点到动量 $m\bar{v}$ 的垂直距离为 h, 則此質点动量的大小与垂直距离 h 的乘积，并取适当的正負号，称为这質点的动量对 o 点之矩。如以 $m_0(m\bar{v})$ 表示这个动量矩，則：

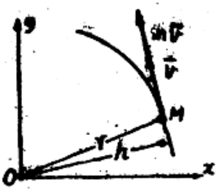

圖 187

$$m_0(m\bar{v}) = \pm mv \cdot h.$$

上式中正負号的选擇仍和力矩相同，規定逆时針轉向为正，順时針轉向为負。动量矩的單位是：

$$m_0(m\bar{v}) = m \cdot v \cdot h = \frac{\text{公斤}\cdot\text{秒}^2}{\text{公尺}} \times \frac{\text{公尺}}{\text{秒}} \times \text{公尺} = \text{公斤}\cdot\text{公尺}\cdot\text{秒}。$$

至于質点系的动量矩，只要求系中每一个質点对 o 点的动量矩然后再求其代数和卽得。如以 G_o 表示質点系对 o 点的动量矩，則

$$G_0 = \Sigma m_0(m\bar{v}) = \Sigma(m \cdot v \cdot h).$$

圖 187 中質点的动量对 o 点之矩，实际上也是对于通过 o 点而与 xoy 坐标面垂直的 z 軸之矩。这一点，我們在根据动量矩定理推导繞定軸轉动剛体的轉动方程式时將会遇到。

§62. 質点的动量矩定理

設質点 M 的質量为 m, 在力 $\bar{F}$ 的作用下沿某一平面曲綫軌迹运动。在某一瞬时，質点位于軌迹上的 M 点，其速度为 $\bar{v}$, 动量为 $m\bar{v}$, 如圖 188。今在其运动平面內任取一点 o 为原点，并选定坐标軸如圖示。