考研辅导丛书

电磁场与电磁波教学指导书 第4版

杨显清　王　园　赵家升

高等教育出版社

考研辅导丛书

电磁场与电磁波
（第4版）
教学指导书

杨显清　王　园　赵家升

高等教育出版社

内容提要

《电磁场与电磁波》(第 3 版)自 1999 年出版以来,受到读者的欢迎,师生普遍认为这是一本非常适合教学的教材。随着电子通信技术的发展,电磁场与电磁波的教学需求随之产生变化,与此相应,编者在编写《电磁场与电磁波》(第 4 版)时,在教学内容和体系结构上做了较大调整,主要体现在:(1) 以三大实验定律和两个基本假说为基础,归纳总结出麦克斯韦方程,然后讨论静态场、时变场以及电磁波的传播与辐射特性。既能与物理电磁学有机衔接,又避免简单重复。(2) 减少静态场部分内容,加强电磁波内容,以满足电子信息类专业的需要。(3) 精选例题和习题,类型多样化。

为便于师生使用第 4 版教材,编者编写了这本配套教学指导书,该书被列入高等教育百门精品课程教材建设计划。

与主教材一致,本书共分 8 章,具体内容为:矢量分析、电磁场的基本规律、静态电磁场及其边值问题的解、时变电磁场、均匀平面波在无界空间中的传播、均匀平面波的反射与透射、导行电磁波、电磁辐射。每章均由三部分组成:基本内容概述,教学基本要求及重点、难点讨论,习题解答。

本书可供普通高等学校电子信息、通信工程、信息工程等专业作为“电磁场与电磁波”课程的教学指导书使用,也可作为硕士研究生入学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波(第 4 版)教学指导书/杨显清,王园,赵家升. —北京:高等教育出版社,2006. 5
ISBN 7-04-018469-9

Ⅰ. 电… Ⅱ. ①杨… ②王… ③赵… Ⅲ. ①电磁场-高等学校-教学参考资料 ②电磁波-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 025768 号

策划编辑 刘激扬 **责任编辑** 李葛平 **封面设计** 李卫青 **责任绘图** 朱 静
版式设计 胡志萍 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京人卫印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2006 年 5 月第 1 版
印 张	16.5	**印 次**	2006 年 5 月第 1 次印刷
字 数	300 000	**定 价**	20.90 元

物料号 18469-00

前　言

本书是与“全国高等教育百门精品课程教材建设计划”的精品项目《电磁场与电磁波》(第4版)(谢处方教授和饶克谨教授编著,杨显清、王园、赵家升修订,高等教育出版社2006年1月出版)配套的教学指导书,希望能帮助使用该教材的教师理解和掌握各章的教学基本要求,处理好教学中的重点与难点。也希望能帮助学生正确理解和掌握“电磁场与电磁波”的基本概念、规律和方法,提高分析问题和解决问题的能力。

全书共分8章:矢量分析、电磁场的基本规律、静态电磁场及其边值问题的解、时变电磁场、均匀平面波在无界空间中的传播、均匀平面波的反射与透射、导行电磁波、电磁辐射。每章均由以下三部分组成:

一、基本内容概述

对每章的内容做简要归纳,给出重要的公式和结论。

二、教学基本要求及重点、难点讨论

根据课程教学大纲要求,提出每章应该理解和掌握的内容以及一般理解的内容,并对一些重点、难点进行分析讨论。

三、习题解答

“电磁场与电磁波”课程的特点是:物理概念抽象、数学推导繁复,历来被认为是一门教师难教、学生难学的课程。在学习过程中,解题是重要的环节之一,也是学习该课程的难点。通过解题,能巩固和加深对基本概念与基本规律的理解,掌握分析和计算方法,培养应用基本理论解决实际问题的能力。希望读者首先进行认真的分析思考,独立自主地解题,然后再参阅习题解答,以期获得应有的收效。

本书第1、4、5、6章由杨显清执笔,第2、3章由赵家升执笔,第7、8章由王园执笔。全书由杨显清审核并统稿。

本教学指导书总结了编者多年来从事“电磁场与电磁波”课程教学的体会,也吸取了电子科技大学“电磁场与波”课程组同仁的经验,还参阅了近年来国内外的相关教材和参考书,受到了不少启发。对为本书的编写和出版给予了支持和帮助的人士,编者在此一并致以衷心谢意。

本书中存在的错误和不足之处,敬请读者不吝指正。

编　者

2005年10月

于电子科技大学

目　　录

第1章 矢量分析

1.1 基本内容概述

矢量分析是研究电磁场在空间分布和变化规律的基本数学工具之一。本章着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律。

1.1.1 矢量代数

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的点积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 是一个标量,定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{1.1}$$

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的叉积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是一个矢量,定义为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}AB\sin\theta \tag{1.2}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的点积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 称为标量三重积,它具有如下运算性质

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.3}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的叉积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 称为矢量三重积,它具有如下运算性质:

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.4}$$

1.1.2 三种常用的正交坐标系

1. 直角坐标系(x,y,z)

直角坐标系中的三个相互正交的坐标单位矢量为 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$,遵循右手螺旋法则:

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{1.5}$$

长度元

$$\mathrm{d}l_x = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}l_y = \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}l_z = \mathrm{d}z \tag{1.6}$$

面积元

$$dS_x = dydz,\ dS_y = dxdz,\ dS_z = dxdy \tag{1.7}$$

体积元

$$dV = dxdydz \tag{1.8}$$

2. 圆柱坐标系(ρ,ϕ,z)

圆柱坐标系中的三个相互正交的坐标单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\phi$ 和 $\boldsymbol{e}_z$,遵循右手螺旋法则:

$$\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_\rho,\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\phi \tag{1.9}$$

长度元

$$dl_\rho = d\rho,\ dl_\phi = \rho d\phi,\ dl_z = dz \tag{1.10}$$

面积元

$$dS_\rho = \rho d\phi dz,\ dS_\phi = d\rho dz,\ dS_z = \rho d\rho d\phi \tag{1.11}$$

体积元

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \tag{1.12}$$

3. 球坐标系(r,θ,ϕ)

球坐标系中的三个相互正交的坐标单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$,遵循右手螺旋法则:

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\phi,\ \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_r,\ \boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \tag{1.13}$$

长度元

$$dl_r = dr,\ dl_\theta = rd\theta,\ dl_\phi = r\sin\theta d\phi \tag{1.14}$$

面积元

$$dS_r = r^2\sin\theta d\theta d\phi,\ dS_\theta = r\sin\theta drd\phi,\ dS_\phi = rdrd\theta \tag{1.15}$$

体积元

$$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{1.16}$$

4. 坐标单位矢量之间的变换

$\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\phi$、$\boldsymbol{e}_z$ 与 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 之间的变换关系见表 1.1。

表 1.1

	$\boldsymbol{e}_x$	$\boldsymbol{e}_y$	$\boldsymbol{e}_z$
$\boldsymbol{e}_\rho$	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0
$\boldsymbol{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\boldsymbol{e}_z$	0	0	1

$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\phi$ 与 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\phi$、$\boldsymbol{e}_z$ 之间的变换关系见表 1.2。

表 1.2

	$\boldsymbol{e}_\rho$	$\boldsymbol{e}_\phi$	$\boldsymbol{e}_z$
$\boldsymbol{e}_r$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\boldsymbol{e}_\theta$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
$\boldsymbol{e}_\phi$	0	1	0

$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\phi$ 与 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 之间的变换关系见表 1.3。

表 1.3

	$\boldsymbol{e}_x$	$\boldsymbol{e}_y$	$\boldsymbol{e}_z$
$\boldsymbol{e}_r$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\boldsymbol{e}_\theta$	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\boldsymbol{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0

1.1.3 标量场的梯度

1. 标量场的等值面

标量场可用一个标量函数来描述

$$u = u(\boldsymbol{r}) \tag{1.17}$$

标量场的等值面方程为

$$u(\boldsymbol{r}) = C \quad (C\text{ 为常数}) \tag{1.18}$$

2. 标量场的方向导数

在直角坐标系中方向导数的计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.19}$$

式中，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦。

3. 标量场的梯度

标量场的梯度 ∇u 是一个矢量，在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.20}$$

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial u}{\rho\partial \phi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.21}$$

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial u}{r\sin\theta\partial\phi} \tag{1.22}$$

1.1.4 矢量场的散度

1. 矢量场的矢量线

矢量场可用一个矢量函数来描述

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_x F_x(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{e}_y F_y(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{e}_z F_z(\boldsymbol{r}) \tag{1.23}$$

矢量场的矢量线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_x(\boldsymbol{r})} = \frac{\mathrm{d}y}{F_y(\boldsymbol{r})} = \frac{\mathrm{d}z}{F_z(\boldsymbol{r})} \tag{1.24}$$

2. 矢量场的通量

矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 穿出闭合面 S 的通量为

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S \tag{1.25}$$

3. 矢量场的散度

矢量场的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 是一个标量,在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.26}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.27}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} \tag{1.28}$$

4. 散度定理

矢量场的散度在体积 V 上的体积分等于矢量场在限定该体积的闭合曲面 S 上的面积分,即

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.29}$$

散度定理是矢量场中的体积分与闭合曲面积分之间的一个变换关系,在电磁理论中非常有用。

1.1.5 矢量场的旋度

1. 矢量场的环流

矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 沿闭合路径 C 的环流为

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.30}$$

2. 矢量场的旋度

矢量场的旋度$\nabla \times \boldsymbol{F}$是一个矢量，在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1.31}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} \tag{1.32}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix} \tag{1.33}$$

3. 斯托克斯定理

矢量场的旋度在曲面S上的面积分等于矢量场沿限定该曲面的闭合路径C的线积分，即

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.34}$$

斯托克斯定理是矢量场中的面积分与围线积分之间的一个变换关系，在电磁理论中也很有用。

1.1.6 无旋场与无散场

1. 无旋场

标量场的梯度有一个重要性质，就是它的旋度恒等于0，即

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0 \tag{1.35}$$

一个旋度处处为0的矢量场$\boldsymbol{F}$称为无旋场，可以把它表示为一个标量场的梯度，即如果$\nabla \times \boldsymbol{F} \equiv 0$，则存在标量函数$u$，使得

$$\boldsymbol{F} = -\nabla u \tag{1.36}$$

2. 无散场

矢量场的旋度有一个重要性质，就是旋度的散度恒等于0，即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{1.37}$$

一个散度处处为0的矢量场 $\boldsymbol{F}$ 称为无散场，可以把它表示为另一矢量场的旋度，即如果 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} \equiv 0$，则存在矢量函数 $\boldsymbol{A}$，使得

$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.38}$$

1.1.7 拉普拉斯运算与格林定理

1. 拉普拉斯运算 $\nabla^2 u$

在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中，$\nabla^2 u$ 的表达式分别为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.39}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.40}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \tag{1.41}$$

2. 格林定理

格林第一定理（格林第一恒等式）

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1.42}$$

格林第二定理（格林第二恒等式）

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) \mathrm{d}V = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \tag{1.43}$$

1.1.8 亥姆霍兹定理

矢量场的散度和旋度都是表示矢量场的性质的量度，一个矢量场所具有的性质可由它的散度和旋度来说明。可以证明：在有限的区域 V 内，任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件（即限定区域 V 的闭合面 S 上的矢量场的分布）惟一地确定，且可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla u(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{1.44}$$

1.2 教学基本要求及重点、难点讨论

1.2.1 教学基本要求

理解标量场与矢量场的概念，了解标量场的等值面和矢量场的矢量线的

概念。

直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是三种常用的坐标系，应熟练掌握。

矢量场的散度和旋度、标量场的梯度是矢量分析中最基本的概念，应深刻理解，掌握散度、旋度和梯度的计算公式和方法。

散度定理和斯托克斯定理是矢量分析中的两个重要定理，应熟练掌握和应用。

理解亥姆霍兹定理的重要意义。

1.2.2 重点、难点讨论

(1) 矢量场的散度和旋度用于描述矢量场的不同性质，它们的主要区别在于：

① 一个矢量场的旋度是一个矢量函数，而一个矢量场的散度是一个标量函数；

② 旋度描述的是矢量场中各点的场量与涡旋源的关系，而散度描述的是矢量场中各点的场量与通量源的关系；

③ 如果矢量场所在的空间中$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，则这种场中不可能存在旋涡源，因而称之为无旋场(或保守场)；如果矢量场所在的空间中$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，则这种场中不可能存在通量源，因而称之为无源场(或管形场)；

④ 在旋度公式(1.31)中，矢量场$\boldsymbol{F}$的场分量F_x、F_y、F_z分别只对与其垂直方向的坐标变量求偏导数，所以矢量场的旋度描述的是场分量在与其垂直的方向上的变化规律；而在散度公式(1.26)中，矢量场$\boldsymbol{F}$的场分量F_x、F_y、F_z分别只对x、y、z求偏导数，所以矢量场的散度描述的是场分量沿着各自方向上的变化规律。

(2) 亥姆霍兹定理总结了矢量场的基本性质，矢量场由它的散度和旋度惟一地确定，矢量的散度和矢量的旋度各对应矢量场的一种源。所以，分析矢量场总是从研究它的散度和旋度着手，散度方程和旋度方程组成了矢量场的基本方程(微分形式)。也可以从矢量场沿闭合面的通量和沿闭合路径的环流着手，得到基本方程的积分形式。

(3) 一个标量场的性质可由它的梯度来描述，即$u(\boldsymbol{r})=\int\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+C$。标量场的梯度具有如下性质：

① 标量场$u(\boldsymbol{r})$的梯度是一个矢量场，并且$\nabla\times\nabla u\equiv0$；

② 标量场$u(\boldsymbol{r})$中，在给定点沿任意方向$\boldsymbol{e}_l$的方向导数等于梯度在该方向上的投影，即

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\boldsymbol{e}_l\cdot\nabla u$$

③ 标量场 $u(\boldsymbol{r})$ 中每一点的梯度垂直于过该点的等值面，且指向 $u(\boldsymbol{r})$ 增加的方向。

1.3 习题解答

1.1 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3$$

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_x 5 - \boldsymbol{e}_z 2$$

求：(1) $\boldsymbol{e}_A$；(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(4) θ_{AB}；(5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量；(6) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；(7) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；(8) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

解 (1) $\boldsymbol{e}_A = \dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \dfrac{\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \boldsymbol{e}_x \dfrac{1}{\sqrt{14}} + \boldsymbol{e}_y \dfrac{2}{\sqrt{14}} - \boldsymbol{e}_z \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3) - (-\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z)|$

$\qquad = |\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 6 - \boldsymbol{e}_z 4| = \sqrt{53}$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3)\cdot(-\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z) = -11$

(4) 由 $\cos\theta_{AB} = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{14}\times\sqrt{17}} = -\dfrac{11}{\sqrt{238}}$，得

$$\theta_{AB} = \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{238}}\right) = 135.5^\circ$$

(5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量

$$A_B = |\boldsymbol{A}|\cos\theta_{AB} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}$$

(6) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_x 4 - \boldsymbol{e}_y 13 - \boldsymbol{e}_z 10$

(7) 由于 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x 8 + \boldsymbol{e}_y 5 + \boldsymbol{e}_z 20$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_x 10 - \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z 4$$

所以 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y2-\boldsymbol{e}_z3)\cdot(\boldsymbol{e}_x8+\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z20)=-42$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-\boldsymbol{e}_x10-\boldsymbol{e}_y1-\boldsymbol{e}_z4)\cdot(\boldsymbol{e}_x5-\boldsymbol{e}_z2)=-42$$

(8) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -10 & -1 & -4\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y40+\boldsymbol{e}_z5$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x55-\boldsymbol{e}_y44-\boldsymbol{e}_z11$$

1.2 三角形的三个顶点为 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$。

(1) 判断$\triangle P_1P_2P_3$ 是否为一直角三角形；

(2) 求三角形的面积。

解 (1) 三个顶点 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z2,\ \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_x4+\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z3,\ \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{e}_x6+\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z5$$

则 $\boldsymbol{R}_{12}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{R}_{23}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z8,$

$$\boldsymbol{R}_{31}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z7$$

由此可见

$$\boldsymbol{R}_{12}\cdot\boldsymbol{R}_{23}=(\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_z)\cdot(\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z8)=0$$

故$\triangle P_1P_2P_3$ 为一直角三角形。

(2) 三角形的面积

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{R}_{12}\times\boldsymbol{R}_{23}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{R}_{12}|\times|\boldsymbol{R}_{23}|=\frac{1}{2}\sqrt{17}\times\sqrt{69}=17.13$$

1.3 求 $P'(-3,1,4)$点到 $P(2,-2,3)$点的距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 的方向。

解 $\boldsymbol{r}_{P'}=-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z4,\quad \boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z3$

则 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{P'P}=\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_{P'}=\boldsymbol{e}_x5-\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z$

且 $\boldsymbol{R}_{P'P}$与 x、y、z 轴的夹角分别为

$$\phi_x=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)=32.31°$$

$$\phi_y=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}\right)=120.47°$$

$$\phi_z=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{35}}\right)=99.73°$$

1.4 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z6$,求它们之间的夹角和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量。

解
$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{29}$$
$$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{4^2+5^2+6^2}=\sqrt{77}$$
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4)\cdot(\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z6)=-31$$
故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为
$$\theta_{AB}=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|}\right)=\arccos\left(\frac{-31}{\sqrt{29}\times\sqrt{77}}\right)=131°$$
$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量为
$$A_B=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{-31}{\sqrt{77}}=-3.532$$

1.5 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y4+\boldsymbol{e}_z$,求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 上的分量。

解
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 2 & 3 & -4\\ -6 & -4 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_x13+\boldsymbol{e}_y22+\boldsymbol{e}_z10$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-\boldsymbol{e}_x13+\boldsymbol{e}_y22+\boldsymbol{e}_z10)\cdot(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=-25$$
$$|\boldsymbol{C}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$$
所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上的分量为
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_C=\frac{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|}=-\frac{25}{\sqrt{3}}=-14.43$$

1.6 证明:如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

证 由 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,则有 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$,即
$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$
由于 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$,于是得到
$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$
故
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

1.7 如果给定一个未知矢量与一个已知矢量的标量积和矢量积,那么便可以确定该未知矢量。设 $\boldsymbol{A}$ 为一已知矢量,$p=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ 而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$,$p$ 和 $\boldsymbol{P}$ 已知,试求 $\boldsymbol{X}$。

解 由 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$,有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=p\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$$

故得
$$\boldsymbol{X}=\frac{p\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$

1.8 在圆柱坐标系中，一点的位置由$\left(4,\frac{2\pi}{3},3\right)$定出，求该点在：(1) 直角坐标系中的坐标；(2) 球坐标系中的坐标。

解 (1) 在直角坐标系中

$$x=4\cos(2\pi/3)=-2,\ y=4\sin(2\pi/3)=2\sqrt{3},\ z=3$$

故该点的直角坐标为$(-2,2\sqrt{3},3)$。

(2) 在球坐标系中

$$r=\sqrt{4^2+3^2}=5,\ \theta=\arctan(4/3)=53.1^\circ,\ \phi=2\pi/3\ \text{rad}=120^\circ$$

故该点的球坐标为$(5,53.1^\circ,120^\circ)$。

1.9 用球坐标表示的场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}$。

(1) 求在直角坐标系中$(-3,4,-5)$点处的$|\boldsymbol{E}|$和E_x；

(2) 求在直角坐标系中$(-3,4,-5)$点处$\boldsymbol{E}$与矢量$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z$构成的夹角。

解 (1) 在直角坐标系中$(-3,4,-5)$点处，$r=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$，故

$$|\boldsymbol{E}|=\left|\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}\right|=\frac{1}{2}$$

又在直角坐标系中$(-3,4,-5)$点处，$\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y4-\boldsymbol{e}_z5$，所以

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}=\frac{25}{r^3}\boldsymbol{r}=\frac{-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y4-\boldsymbol{e}_z5}{10\sqrt{2}}$$

故

$$E_x=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{E}=\frac{-3}{10\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{20}$$

(2)
$$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$$

在直角坐标系中$(-3,4,-5)$点处

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y4-\boldsymbol{e}_z5}{10\sqrt{2}}\cdot(\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z)=-\frac{19}{10\sqrt{2}}$$

故$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}$构成的夹角为