XIANXINGDAISHUSIXIANGFANGFAYUXUEXIZHIDA

线性代数
思想方法与学习指导

主　编　赵　晶
副主编　郭晓时
尚学海
万诗敏

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线性代数
思想方法与学习指导

主　编　赵　晶
副主编　郭晓时　尚学海　万诗敏
编　者　(以姓氏笔画为序)
闫晓红　肖盛宁　张　华

天津大学出版社

内容提要

本书按同济大学数学系编写的《线性代数》教材的内容及顺序同步阐述，全书共分六章，每章有五个部分，即基本要求概述及主要术语，基本内容剖析，典型例题分析，自测题，自测题答案与提示，并配有两套综合练习题与两套考研试题及其详解.

本书的特点是从线性代数的基本思想方法入手按教学基本要求突出知识的重点与难点，给出了各章知识在课程中的作用与地位，分析各章内容的相互关系，并对各章内容进行剖析.典型例题分析注重强调知识点的具体应用、解题的思想方法，指出学生易忽略、混淆甚至错误的地方.本书剖析理论的精髓，内容深入浅出，例题翔实并配有分析及多种解法，可作为在校大学生及考研学生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数思想方法与学习指导/赵晶主编.—天津：
天津大学出版社，2006.8
ISBN 7-5618-2327-4

Ⅰ.线...　Ⅱ.赵...　Ⅲ.线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 095017 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网　　址　www.tjup.com
电　　话　营销部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷　昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　148mm×210mm
印　　张　8
字　　数　230 千
版　　次　2006 年 8 月第 1 版
印　　次　2006 年 8 月第 1 次
印　　数　1－4 000
定　　价　13.00 元

前　　言

《线性代数》是我国理工科院校各专业普遍开设的一门重要基础课，随着计算机技术的快速发展，线性代数在理论和应用的层面上越来越显示其重要作用；它也是学习力学、运筹学、计算数学、离散数学等后续课程的必备基础．由于该课程具有较强的抽象性、逻辑性，使得大学一二年级学生在学习线性代数课程中遇到了许多困惑．概念多、术语多、符号多、结论多、定理多、运算多……加之概念与概念之间，概念与术语之间，概念及术语与符号之间，概念与结论之间，定理与定理之间的相互交叉、相互渗透及由理论分析得出的相关运算之繁复等等，使得教师在 30 至 40 个学时的时间教授好这门课程，学生在相应的时间内学好这门课程都产生相当的困难．

线性代数是讨论离散型变量的一门基础数学理论课，它不同于微积分(一般)讨论连续型变量及概率与数理统计讨论随机变量的课程特点，使得初学者极不适应其探究方法及由此产生的理论体系．甚至有的学生学完该课程也没有掌握其基本思想精髓及方法．

为了提高线性代数课程的教学质量，帮助学生掌握并达到线性代数课程的教学基本要求，编者积多年的教学实践，结合学生在学习中容易产生的错误有针对性地剖析课程涉及的重点、难点，使学生更好地全面理解线性代数的理论体系与思想方法及解题规律．

为此目的编者根据教育部高教司颁发的工科本科线性代数教学基本要求，按照同济大学数学系编写的线性代数第四版(高等教育出版社)的教材内容顺序编写本书，以便读者使用．本书共分六章，每章包括以下内容：

一、基本要求概述及主要术语

二、基本内容剖析

三、典型例题分析

四、自测题

五、自测题答案与提示

全书最后附综合练习题及解答两套,考研试题及解答两套.

对于超出教学基本要求的章节内容加"*"号,学生可以选读.本书是面向在校本科生及研究生的复习指导书.

由于编者水平有限,疏漏难免,敬请读者指正.

在本书编写过程中蒙数学教研室领导及诸多老师的大力支持与帮助,在此一并致谢.

编者

2006年6月

目　录

第一章　行列式 ……………………………………………… (1)
第二章　矩阵及其运算 ……………………………………… (45)
第三章　矩阵的初等变换与线性方程组 …………………… (82)
第四章　向量组的线性相关性 ……………………………… (111)
第五章　相似矩阵及二次型 ………………………………… (167)
第六章　线性空间与线性变换 ……………………………… (202)
综合练习题(一) …………………………………………… (220)
综合练习题(二) …………………………………………… (222)
综合练习题(一)解答 ……………………………………… (225)
综合练习题(二)解答 ……………………………………… (230)
研究生考题(一) …………………………………………… (235)
研究生考题(二) …………………………………………… (236)
研究生考题(一)解答 ……………………………………… (237)
研究生考题(二)解答 ……………………………………… (242)

第一章　行列式

一、基本要求概述及主要术语

1. 基本要求概述

①会用对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式.

②掌握 n 阶行列式的定义,熟练掌握行列式的性质.

③知道代数余子式的定义及性质.

④会利用行列式的定义与性质及按行(列)展开定理计算行列式.

⑤知道克拉默法则及相关结论.

2. 主要术语

排列,逆序,逆序数,对换,相邻对换,奇排列,偶排列,n 阶行列式,行列式的元素,行标,列标,主对角线,副对角线,对角线法则,对角行列式,上(下)三角形行列式,转置行列式,余子式,代数余子式,行列式按行(列)展开,范德蒙德(Vandermonde)行列式,克拉默法则,非齐次线性方程组,齐次线性方程组,零解,非零解.

二、基本内容剖析

1. 排列及其逆序

(1) 全排列

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列). n 个不同元素的所有排列的种数用 P_n 表示,$P_n = n!$.

(2) 自然数排列

由 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的全排列称为自然数的 n 级排列

(亦简称排列),记作$(i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)$. 如 81352746 就是一个 8 级排列.

(3) 标准排列

按自然数由小到大的标准次序组成的排列称为标准排列. 如 12345678 即为 8 级标准排列.

(4) 逆序和逆序数

在一个排列$(i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)$中,若有两个数与标准排列次序不同,如 $i_s > i_t$,则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数,排列$(i_1 i_2 \cdots i_n)$的逆序数记作 $t = t(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

(5) 奇排列与偶排列

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

(6) 对换

将一个排列中某两个元素的位置互相交换其余元素不动,这种交换称为一个对换.

对换改变排列的奇偶性.

逆序数,奇偶排列,对换的概念是 n 阶行列式定义中用到的概念,应正确理解并掌握.在弄清概念的基础上,学生应着力学会求一个排列的逆序数的方法. 求一个排列的逆序数可采用一律“向前看”或一律“向后看”两种方法. 均与标准排列比较(见后面典型例题分析).

2.2 阶和 3 阶行列式的定义

(1) 2 阶行列式

定义 1 设有 4 个数排成二行二列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$,表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为上面数表所确定的 2 阶行列式,记作$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

(2) 3 阶行列式

定义 2　设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为上面数表所确定的 3 阶行列式.

3 阶行列式含 6 项(3! 项),每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号.

2 阶、3 阶行列式的定义可由对角线法则记忆. 需要注意的是对角线法则只适用于 2 阶,3 阶行列式,4 阶以上的行列式没有此法则.

3. n 阶行列式的定义

$$n\text{ 阶行列式 }D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中$(p_1p_2\cdots p_n)$为自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,求和符号 $\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 是对所有排列$(p_1p_2\cdots p_n)$求和.

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素,位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 叫做 D 的(i,j)元. 行列式 D 可简记作 $\det(a_{ij})$或 $\Delta(a_{ij})$.

n 阶行列式的定义是线性代数中的一个重要概念. 学习这个定义应着重理解以下几个问题.

①D 等于它的所有取自不同行、不同列(即两两“不共线”)的 n 个

元素乘积的代数和. $\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 是指对所有 n 级排列求和,而 n 级排列共有 $n!$ 种,所以 D 的展开式中共有 $n!$ 个乘积项.

②展开式中各项前的符号由列标构成的 n 级排列的奇偶性决定,偶排列取"+"号,奇排列取"-"号,根据排列的性质在 $n!$ 个 n 级排列中有$\frac{n!}{2}$个偶排列,$\frac{n!}{2}$个奇排列,因此 D 的展开式中的乘积项,一半带有正号,一半带有负号.

③对行列式定义 $D=\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中的各项,交换乘积中任两元素的次序,从而行标和列标排列同时做了相应的对换.这样,行标排列与列标排列的逆序之和并不改变奇偶性.经一次交换如此,经多次交换仍如此,由此可知 n 阶行列式的两个定义是等价的.

④这一定义与用对角线法则定义的 2 阶、3 阶行列式一致.

⑤特殊地当 $n=1$ 时一阶行列式 $|a|=a$,该记号不要与绝对值记号混淆.

⑥用定义求行列式的值很繁琐,后面通过研究行列式的性质会得到更方便的求法.

利用 n 阶行列式的定义,得如下结论.

①对角行列式等于它的主对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

未写出的元素均为 0,以后亦如此.

②上(下)三角行列式的值等于它的主对角元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{11} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

③副对角线下(上)边的元素全为 0 的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & & \iddots & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4.行列式的性质

性质 1　行列式与其转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

性质 2　互换行列式的两行(或两列)行列式变号.

推论　若行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3　行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外边来,或者说用数 k 乘行列式某行(列)的所有元素,等于用 k 乘行列式.

第 i 行(列)乘以 k,记作 $r_i \times k(c_i \times k)$.

第 i 行(列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k(c_i \div k)$.

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素均为两数之和,如第 i 列元素均是“两数之和”

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

,则 D 等于下列两个行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注 一般 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$.

性质 6 将行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

例如,以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 $c_i + kc_j$)有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_i + kc_j}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,记作 $r_i + kr_j$.

注 区别运算 $r_i + r_j$ 与 $r_j + r_i$,不能将记号 $r_i + kr_j$ 写作 $kr_j + r_i$(对 $c_i + kc_j$ 同样如此).

5. 余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下来的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$,

称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

6. 子式及其代数余子式

在 n 阶行列式中,任选 k 行 k 列($1 \leqslant k \leqslant n-1$)其交叉位置上的 k^2 个元素(不改变相对位置)组成的 k 阶行列式称为原行列式的一个 k 阶

子式，而余下的行列所组成的 $n-k$ 阶行列式称为该 k 阶子式的余子式.

记某个 k 阶子式在原来行列式中的所有行数与列数的和为 t，则 $(-1)^t$ 乘以该 k 阶子式的余子式称为该 k 阶子式的代数余子式.

7.行列式按行(列)展开

(1) 按一行(列)展开

① 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为 0，则这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

注　对列也成立.

② 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

③ 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

②，③可简记为：$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j,\\0, & i\neq j,\end{cases}$ 或 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$

(2) 按某 k 行(列)展开(拉普拉斯定理)

n 阶行列式等于某 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 个行(列)中的所有 k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和.

行列式的性质及行列式的展开定理是计算行列式和讨论行列式一般理论的重要基础，且在第二章矩阵理论中也有着重要的应用，所以对行列式的性质及展开法则一定要理解熟记并会用.行列式的计算在本章是个重点，而按定义计算一般的 n 阶行列式几乎是不可能的事，所以要学会用性质及展开定理计算行列式或证明相关的结论.

行列式的计算基本方法主要有两种.

方法一　消元. 将行列式化为上、下三角行列式或其他更简便的

较易计算的行列式. 这可通过充分利用行列式的性质来实现.

方法二 降阶. 这可通过利用行列式的展开定理,将高阶行列式化成低阶行列式来计算. 特别在行列式中零元素较多时,可将行列式降阶化简.

在具体应用中往往消元与降阶结合运用,如果将行列式按某行(列)展开,则常常先将该行(列)中较多的元素化成零后再展开. 在使用降阶法时,还常常用到数学归纳法和递推法(具体做法见典型例题分析).

行列式的计算在本章既是重点又是难点,特别是高阶行列式及元素中含有字母的行列式的计算. 因此在计算前要注意分析行列式的特点,根据其特点采用适当的计算方法. 注意体会、学习总结例题中的计算方法,并通过大量的练习熟练掌握综合运用消元法和降阶法计算行列式的基本技巧,并注意一题多解. 逐步养成认真观察、分析讨论问题,充分利用所学知识,并能将知识转化为能力.

8. 克拉默法则

①含有 n 个未知元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{A}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时称方程组(A)为非齐次线性方程组.

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零时,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{B}$$

称方程组(B)为齐次线性方程组.

②克拉默法则:

若线性方程组(A)的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$,

则方程组(A)有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_j=\dfrac{D_j}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$.

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

③若非齐次线性方程组(A)无解或有两个(或两个以上)不同的解,则它的系数行列式必为零.

④若齐次线性方程组(B)的系数行列式 $D\neq 0$,则它只有唯一解,即零解;若齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.这说明系数行列式 $D=0$ 是齐次方程组有非零解的必要条件,在第三章中将证明这条件也是充分的.

⑤克拉默法则除去解决了线性方程组(A)解的存在性、唯一性外,还用行列式给出了求解公式,但必须注意应用克拉默法则有两个条件:一是方程组的系数能构成 n 阶行列式,二是系数行列式不为零. 由于受这些条件的限制以及计算高阶行列式的困难,使得克拉默法则主要用于理论问题及较简单方程组的求解. 但它是以后讨论的方程的个数与未知数的个数不相同情况的基础,它又可看成行列式理论的应用. 学生必须牢固掌握.

9. 范德蒙德行列式

n 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式为

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

三、典型例题分析

1.排列与逆序

例1 求排列 362514 的逆序数,并指出该排列是奇排列还是偶排列.

分析 求一个排列的逆序数可采用一律"向前看"或一律"向后看"两种方法.均与标准排列比较.

解法一 若采用"向后看"的方法,数字 3 排在首位,前面没有比它大的数,故逆序数为 0,

数字 6 前面没有比它大的数,故逆序数为 0,

数字 2 前面比 2 大的数字有两个 3,6,故逆序数为 2,

数字 5 前面比 5 大的数字有一个 6,故逆序数为 1,

数字 1 前面比 1 大的数字有四个 3,6,2,5,故逆序数为 4,

数字 4 前面比 4 大的数字有两个 6,5,故逆序数为 2,

于是此排列的逆序数 $t=0+0+2+1+4+2=9$.

解法二 若采用"向后看"的方法,

数字 3 后面有两个比 3 小的数 2,1,故逆序数为 2,

数字 6 后面有四个比 6 小的数 2,5,1,4,故逆序数为 4,

数字 2 后面有一个比 2 小的数 1,故逆序数为 1,

数字 5 后面有两个 5 小的数 1,4,故逆序数为 2,

数字 1 后面没有比它小的数,故逆序数为 0,

数字 4 后面没有数字,故逆序数亦为 0,

于是此排列的逆序数 $t=2+4+1+2+0+0=9$,又因为逆序数为 9 是奇数,故该排列是一个奇排列.

例2 在 1~8 的自然数排列中选择 i 与 j 使排列 $25i14j86$ 成为奇排列或偶排列.

分析 由排列的定义,i,j 只能在 3 与 7 中选择,故只要看 i、j 选 3 与 7 时排列是否为偶排列即可.

解 这是一个 8 级排列,其中 i 与 j 可选的数字为 3 或 7. 若选 $i=$

3,$j=7$ 则排列 25314786 的逆序数 $t=0+0+1+3+1+0+0+2=7$,此时为奇排列;若选 $i=7,j=3$ 可看成前一排列经一次元素的对换得到的,故此时为偶排列.

例 3　求排列 $2k,1,2k-1,2,2k-2,3,\cdots,k+1,k$ 的逆序数,并确定奇偶性.

解　1 前面有一个比它大的数,故 1 的逆序数为 1,

2 前面有 2 个比它大的数,故 2 的逆序数为 2,

3 前面有 3 个比它大的数,故 3 的逆序数为 3,

……

k 前面有 k 个比它大的数,故 k 的逆序数为 k,

$2k-1$ 前面有 1 个比它大的数,故 $2k-1$ 的逆序数为 1,

$2k-2$ 前面有 2 个比它大的数,故 $2k-2$ 的逆序数为 2,

……

$k+1$ 前面有 $k-1$ 个比它大的数,故 $k+1$ 的逆序数为 $k-1$,

所以原排列的逆序数为

$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+1+2+\cdots+(k-1)=(k-1)k+k=k^2$,且原排列的奇偶性与 k 的奇偶性相同.

例 4　写出 4 阶行列式 $D_4=\det(a_{ij})$ 展开式中含有因子 $a_{23}a_{42}$ 且带负号的所有项.

解　这样的项应为 $a_{1j_1}a_{23}a_{3j_3}a_{42}$,其中行标已成自然排列,而列标组成 4 级排列 (j_13j_32),故 j_1,j_3 只能分别取 1、4 或 4、1,即 j_13j_32 只能是 1342 或 4312,对应的逆序数 t 分别为 $0+0+0+2=2$ 或 $0+1+2+2=5$,由于 $(-1)^2=1,(-1)^5=-1$,因此满足条件的排列只能是 4312,即所求的项为 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

注　本题主要利用了 4 阶行列式展开式中一般项为 $(-1)^{t(j_1,j_2,j_3,j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,这里 $j_2=3,j_4=2$,故 (j_1,j_3) 只能是 1、4 的排列,再根据所求项带负号,定出 (j_1,j_3) 只能取 $(4,1)$.

2.行列式的计算与证明

(1) 利用行列式的定义