21世纪高等院校教材

信息与计算科学专业教材系列

线性系统理论

程兆林 马树萍 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

信息与计算科学专业教材系列

线性系统理论

程兆林　马树萍　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从线性系统的能控性、能观性两个基本概念出发,讨论线性系统的综合与线性最优控制问题.主要内容包括线性定常系统的状态空间描述及运动分析,线性定常系统的能控性,状态反馈与闭环极点配置,线性定常系统的能观性,传递函数及实现问题,状态观测器,线性二次型最优控制与系统输入输出解耦问题,不确定线性系统的鲁棒二次镇定等.每章末配有习题.附录中包括矩阵理论、线性常系数微分方程理论、线性常系数差分方程的相关内容简介.

本书可供信息与计算科学专业、自动控制专业高年级本科生和研究生作为教材,也可作为从事工程控制、自动化及控制理论研究的科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论/程兆林,马树萍编著. —北京:科学出版社,2006
(21世纪高等院校教材·信息与计算科学专业教材系列)
ISBN 7-03-017141-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①程… ②马… Ⅲ.线性系统理论-高等学校-教材
Ⅳ.O231.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2006) 第035840号

责任编辑:姚莉丽/责任校对:张怡君
责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年6月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006年6月第一次印刷 印张:13 1/4
印数:1—3 000 字数:250 000

定价:19.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

线性系统理论是系统和控制科学领域的基础理论，它以线性系统为研究对象，经过过去几十年的发展，线性系统理论已经相当成熟和完善. 线性系统理论的重要性首先在于它的基础性，其中的概念、方法、处理问题的思路和所获得的结论，对于系统和控制理论的许多学科分支，诸如最优控制、鲁棒控制、非线性控制、随机控制、分布参数系统和离散事件动态系统等，都具有重要的和基本的作用，成为学习和研究这些学科的必不可少的基础知识. 目前，线性系统理论已成为国内外大学系统与控制科学方向各个专业的一门重要基础课程.

本书从线性系统的能控性、能观性两个基础概念出发讨论线性系统的状态反馈镇定，观测器设计及输出反馈镇定，能控性、能观性与传递函数的不可简约性的关系等. 这部分内容是现代控制理论的基础，也是现代控制理论和经典控制理论衔接最为紧密的部分.

本书共八章. 第 1 章介绍线性定常系统的状态空间描述，输入输出关系，以及连续系统的离散化. 第 2 章介绍线性定常系统的基础概念——能控性，包括能控性定义、判据、能控性分解及单输入–单输出系统能控规范型. 第 3 章介绍系统状态反馈镇定理论，这可看作为能控性理论在系统综合中的一个典型应用. 第 4 章介绍线性定常系统的另一个基础概念——能观性，包括能观性与能控性的对偶原理. 第 5 章介绍系统的能控性、能观性与传递函数的不可简约性的关系，包括系统的规范分解与最小实现理论初步. 第 6 章介绍状态观测器理论及基于观测器的输出反馈镇定，这也可看作为能观性理论在系统状态估计及反馈镇定中的一个典型应用. 第 7 章介绍系统输入输出解耦和线性二次型指标最优控制. 第 8 章介绍近二十年来得到快速发展的不确定线性系统的鲁棒二次镇定问题. 本书各章配有习题，它们是本书不可或缺的组成部分. 适当选做这些习题，可以帮助读者正确理解和灵活运用书中给出的概念、方法和结论. 此外，为帮助读者了解本书所涉及的矩阵理论，以及常微分方程与差分方程理论中的相关内容，书末附有附录简要介绍这些内容.

本书的前身是第一作者在山东大学数学与系统科学学院 (前数学系) 讲授“线性系统理论”课程的教学笔记和讲义，二十年来取得了较好的教学效果. 本书的编写，包括全书各章、习题及附录，由第二作者执笔完成. 全书的统稿和审定由二位作者共同完成.

本书可供高等院校理工科系统与控制科学方向各个专业高年级本科生和低年级研究生相关课程作为教材和参考书使用，亦可供控制理论与控制工程、自动化及

相关信息科学领域的科技工作者作为参考书使用.

作者感谢山东大学教材出版基金委员会, 山东大学数学与系统科学学院学术委员会及院领导的鼎力支持, 感谢科学出版社为本书的编辑和出版所做的努力.

限于水平, 书中不妥之处, 敬请读者指正.

编　者

2006 年 3 月

目　录

第 1 章　线性定常系统的状态空间描述及运动分析

1.1　线性定常系统的传递函数描述

在讨论线性系统的状态空间描述前, 首先介绍一下传递函数描述. 在控制系统的分析与设计中, 第一步就是建立系统的数学模型, 对所研究的对象给予适当的数学描述, 用传递函数描述系统就是一种行之有效的办法.

传递函数描述的是系统的输入—输出关系, 用它描述系统时, 假定对系统结构的内部信息一无所知, 能够得到的只是系统的输入信息和输出信息. 这种情况下, 对我们来说, 系统的内部结构就像一个"黑箱"一样, 因此, 传递函数只能刻画系统的输入—输出特性, 它被称为系统的输入—输出描述和外部描述. 使用传递函数方法描述系统所用的数学工具主要是拉普拉斯 (Laplace) 变换. 因此, 它主要适用于描述线性定常系统.

1. 单变量情形回顾

已知由下列常系数微分方程描述的定常系统

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ =& b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

其中 $y(t)$ 叫做系统的输出, $u(t)$ 叫做系统的输入, t 为时间, $y^{(i)} = \dfrac{d^i y}{dt^i}, u^{(j)} = \dfrac{d^j u}{dt^j}, a_i, b_j$ 均为常数, $i = 0, 1, \cdots, n$, $j = 0, 1, \cdots, m, m \leqslant n$.

假定

$$\begin{aligned} y(0) = y^{(1)}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0, \\ u(0) = u^{(1)}(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

对 (1.1.1) 两边取拉普拉斯变换, 得

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s),$$

其中 $Y(s), U(s)$ 为 $y(t)$, $u(t)$ 的拉普拉斯变换, 则

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{1.1.3}$$

称为系统 (1.1.1) 的传递函数. 传递函数为 s 的真有理分式, 则称系统 (1.1.1) 为物理能实现的. 单输入—单输出系统的传递函数必为真有理分式.

多项式

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{1.1.4}$$

为系统 (1.1.1) 的特征多项式, 代数方程

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{1.1.5}$$

叫系统 (1.1.1) 的特征方程, 特征方程的根或者说特征方程的零点叫系统 (1.1.1) 的极点, 多项式

$$b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

的零点, 叫做 (1.1.1) 的零点. 若系统 (1.1.1) 有相同的零点和极点, 则称系统有零极点相消, 零极相消后剩下的系统的零点和极点分别为传递函数的零点和极点.

2. 传递函数矩阵

考察多输入—多输出的线性定常系统. 令输入变量组为 $\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$, 输出变量组为 $\{y_1, y_2, \cdots, y_q\}$, 且假定系统的初始变量为零. 用 $Y_i(s)$ 和 $U_j(s)$ 分别表示 y_i 和 u_j 的拉普拉斯变换, $g_{ij}(s)$ 表示系统的由第 j 个输入端到第 i 个输出端的传递函数, 其中 $i = 1, \cdots, q$, $j = 1, \cdots, p$, 则由系统的线性属性 (即满足叠加原理) 可以导出:

$$\begin{cases} Y_1(s) = g_{11}(s)U_1(s) + g_{12}(s)U_2(s) + \cdots + g_{1p}(s)U_p(s), \\ Y_2(s) = g_{21}(s)U_1(s) + g_{22}(s)U_2(s) + \cdots + g_{2p}(s)U_p(s), \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_q(s) = g_{q1}(s)U_1(s) + g_{q2}(s)U_2(s) + \cdots + g_{qp}(s)U_p(s), \end{cases} \tag{1.1.6}$$

其向量方程的形式则为

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1p}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(s) & g_{q2}(s) & \cdots & g_{qp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{bmatrix} = G(s)U(s). \tag{1.1.7}$$

我们称由上式所定义的 $G(s)$ 为系统的传递函数矩阵. 容易看出, $G(s)$ 为 $q \times p$ 的一个有理分式矩阵. 当 $G(s)$ 的元传递函数 $g_{ij}(s)(i = 1, \cdots, q, j = 1, \cdots, p)$ 除严格真还包含真有理分式时, 即它的一个或一些元传递函数中分母和分子多项式具有相等

的最高幂次时, 称 $G(s)$ 为真有理分式矩阵. 通常, 当且仅当 $G(s)$ 为真的或严格真的时, 它才是物理上可实现的. 作为一个判别准则, 当且仅当

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \text{零阵} \tag{1.1.8}$$

时, $G(s)$ 为严格真的;

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \text{非零常阵}, \tag{1.1.9}$$

传递函数矩阵为真的.

1.2 线性定常系统的状态空间描述

1. 状态和状态空间

系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念的基础上的. 状态和状态空间本身, 并不是一个新的概念, 长期以来在质点和刚体动力学中得到了广泛的应用. 随着将它们引入到系统和控制理论中来, 并使之适应于描述系统的动态过程, 这两个概念才有了更为一般性的含义.

定义 1.1 动力学系统的状态定义为完全的表征系统时间域行为的一个最小内部变量组. 组成这个变量组的变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 称为系统的状态变量, 其中 $t \geqslant t_0$, t_0 为初始时刻. 由状态变量构成的列向量

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant t_0 \tag{1.2.1}$$

称为系统的状态向量, 简称为状态. 状态空间则定义为状态向量取值的一个向量空间.

为了正确理解状态和状态空间的含义, 对其定义作如下几点解释:

(1) 状态变量组可完全的表征系统行为的属性. 只要给定这组变量 $x_1(t)$, $x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在初始时刻 t_0 的值, 以及输入变量 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t)$ 在 $t \geqslant t_0$ 各瞬时的值, 则系统中任何一个变量在 $t \geqslant t_0$ 时的运动行为也就随之完全的确定了.

(2) 状态变量组的最小性. 状态变量组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是为完全表征系统行为所必需的系统向量的最少个数, 减少变量数将破坏表征的完全性, 而增加变量数将是完全表征系统行为所不需要的.

(3) 状态变量组在数学上的特征. 状态变量组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 构成系统变量中线性无关的一个极大变量组. 考虑到状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 只能取

为实数值, 因此状态空间是建立在实数域上的向量空间, 其维数即为 n. 对于确定的某个时刻, 状态表示为状态空间中的一个点; 而状态随时间的变化过程, 则构成了状态空间中的一条轨迹.

(4) 状态变量组包含了系统的物理特征. 当组成状态的变量个数 n 为有穷正整数时, 相应的系统为有穷维系统, 且称 n 为系统的阶次; 当 n 为无穷大时, 相应的系统则为无穷维系统. 一切集中参数系统都属于有穷维系统, 一切分布参数系统则属于无穷维系统.

(5) 状态变量组选取上的不唯一性. 由于系统中变量的个数一般大于 n, 而其中仅有 n 个线性无关的, 因此决定了状态变量组在选取上的不唯一性.

定理 1.1　系统任意选取的两个状态变量组之间为线性非奇异的关系.

证明　设 x 和 $\bar{x}$ 为任意选取的两个状态变量,

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{x}=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}, \tag{1.2.2}$$

则根据状态的定义可知, $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 为线性无关, 因此可将 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的每一个变量表为 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 的线性组合, 且表示唯一,

$$\begin{cases} x_1=p_{11}\bar{x}_1+\cdots+p_{1n}\bar{x}_n, \\ \qquad\cdots\cdots \\ x_n=p_{n1}\bar{x}_1+\cdots+p_{nn}\bar{x}_n. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

引入系数矩阵, 令

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.2.4}$$

则 (1.2.3) 还可表示为

$$x=P\bar{x}. \tag{1.2.5}$$

同理, 由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 也为线性无关, 因此又有

$$\bar{x}=Qx, \tag{1.2.6}$$

从而由 (1.2.5), (1.2.6) 可导出:

$$PQ=QP=I. \tag{1.2.7}$$

表明 P 和 Q 互为逆, 也即任意选取的两个状态 x 和 $\bar{x}$ 为线性非奇异变换. 定理结论得证.

2. 动态系统的状态空间描述

在引入了状态和状态空间概念的基础上, 就可来建立动力学系统的状态空间描述. 从结构的角度, 一个动力学系统可用图 1.1 所示的方框图来表示, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是表征系统行为的状态变量组, $u_1, u_2, \cdots, u_p$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_q$ 分别为系统的输入变量组和输出变量组.

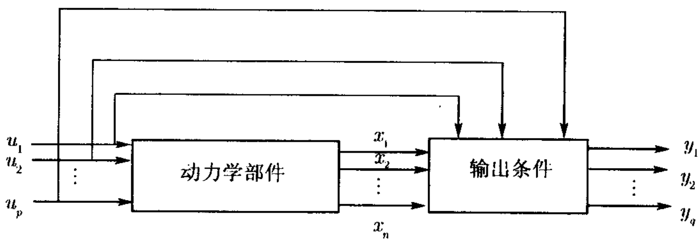

图 1.1 动力学系统结构示意图

和输入—输出描述不同, 状态空间描述中把系统动态过程的描述考虑为一个更为细致的过程, 输入引起系统状态的变化, 而状态和输入则决定了输出的变化.

输入引起状态的变化是一个运动的过程, 数学上必须采用微分方程或差分方程来表征, 并且称这个数学方程为系统的状态方程. 就连续动态过程而言, 考虑最为一般的情况, 则其状态方程为如下的一个一阶非线性时变微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p, t), \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p, t), \end{cases} \quad t \geqslant t_0. \tag{1.2.8}$$

进而, 在引入向量表示的基础上, 还可将状态方程简洁地表示为向量方程的形式:

$$\dot{x} = g(x, u, t), \quad t \geqslant t_0, \tag{1.2.9}$$

其中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}. \tag{1.2.10}$$

状态和输入决定输出的变化是一个变量间的转换过程, 描述这种转换过程的数学表达式为变换方程, 并且称之为系统的输出方程或量测方程. 最为一般情况下, 一个连续的动力学系统的输出方程具有以下的形式:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p, t), \\ \cdots\cdots \\ y_q = g_q(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p, t), \end{cases} \tag{1.2.11}$$

表示为向量方程的形式为

$$y = g(x, u, t), \tag{1.2.12}$$

其中

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x, u, t) \\ g_2(x, u, t) \\ \vdots \\ g_q(x, u, t) \end{bmatrix}. \tag{1.2.13}$$

系统的状态空间描述由状态方程和输出方程组成. 由于采用向量方程的形式, 当状态变量、输入变量和输出变量的数目增加时, 并不增加状态空间描述在表达形式上的复杂性.

讨论离散动态过程的状态空间的描述. 离散动态过程的一个重要特点是, 系统的各个变量都被处理成为只在离散时刻取值, 其状态空间描述只反映离散时刻的变量组间的因果关系和转换关系. 用 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 来表示离散的时刻, 则离散时间系统 (简称离散系统) 的状态方程和输出方程的最一般形式为

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \\ y(k) = g(x(k), u(k), k), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.2.14}$$

通常, 可采用两条可能的途径来组成系统的状态空间描述: 一是分析途径, 适用于结构和参数已知的系统; 二是辨识的途径, 适用于结构和参数难于搞清楚的系统.

3. 线性定常系统的状态空间描述

限于考虑线性定常系统的连续动态过程. 此时, 在系统的状态方程和输出方程中, 向量函数 $f(x, u, t)$ 和 $g(x, u, t)$ 将都具有线性的关系, 且不显含时间 t, 从而线性定常系统的状态空间描述的表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{1.2.15}$$

其中 $x(t)$ 为 n 维状态向量, n 为系统的阶, $u(t)$ 为 p 维控制输入向量, $y(t)$ 为 q 维输出向量, A 为 $n\times n$ 系统矩阵, B 为 $n\times p$ 输入矩阵, C 为 $q\times n$ 输出矩阵, D 为 $q\times p$ 前馈矩阵, 统称为系统的系数矩阵, 均为实常阵.

线性定常系统也叫做线性时不变系统, 完全由系数矩阵决定, 简记为 (A,B,C,D).

对于线性定常系统 (1.2.15), 我们分别称系统矩阵 A 的特征值、特征向量、若尔当标准型、特征方程、特征多项式为系统 (1.2.15) 的特征值、特征向量、若尔当标准型、特征方程、特征多项式, 系统的特征值也称作系统的极点.

若 $p=1$, 则系统 (1.2.15) 为单输入线性定常系统; 若 $q=1$, 系统 (1.2.15) 为单输出线性定常系统; 若 $p=q=1$, 系统 (1.2.15) 为单输入—单输出系统, 或单变量系统.

考虑线性定常离散系统的状态空间描述, 其一般形式为

$$\begin{cases} x(k+1)=Gx(k)+Hu(k), \\ \quad\; y(k)=Cx(k)+Du(k), \end{cases} \quad k=0,1,2,\cdots, \tag{1.2.16}$$

其中 $x(k)$ 为 n 维状态向量, $u(k)$ 为 p 维输入向量, $y(k)$ 为 q 维输出向量, G,H,C,D 分别为 $n\times n$, $n\times p$, $q\times n$, $q\times p$ 阶实常系数矩阵, 简记为 (G,H,C,D).

1.3 输入输出描述导出状态空间描述

考虑单输入—单输出线性定常系统. 表征系统动态过程的输入—输出描述, 时域为

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1u^{(1)}+b_0u, \tag{1.3.1}$$

等价的频域描述, 即传递函数

$$g(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}, \tag{1.3.2}$$

其中 $y^{(i)}$, $u^{(i)}$ 分别表示 y, u 的第 i 阶导数, $Y(s)$, $U(s)$ 为 $y(t)$, $u(t)$ 的拉普拉斯变换, $m\leqslant n$.

对于由 (1.3.1) 或 (1.3.2) 描述的系统, 可以引进状态变量 x, 将其写成状态空间描述形式

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+bu, \\ y=cx+du, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

其中, x 为 n 维状态变量, A,b,c,d 分别为 $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$, 1×1 的常矩阵.

将 (1.3.1) 或 (1.3.2) 写成 (1.3.3) 的形式, 称为实现问题, 第 5 章作专门介绍. 实现不具有唯一性. 下面给出 (1.3.1) 或 (1.3.2) 的几种状态空间描述形式.

(1) 当 $m<n$ 时, 有如下结论.

定理 1.2　给定单输入—单输出线性定常系统的输入输出描述 (1.3.1) 或 (1.3.2), 当 $m<n$ 时, 其对应的一个状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \tag{1.3.4}$$

$$y=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}x.$$

证明　由时域 (1.3.1) 来证明, 引进中间变量 z, 令

$$\begin{aligned} u&=z^{(n)}+a_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+a_1z^{(1)}+a_0z, \\ y&=b_mz^{(m)}+\cdots+b_1z^{(1)}+b_0z. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

显然 u,y 与 (1.3.1) 有相同的输入输出关系 $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$, 令

$$x_1=z,\quad x_2=\dot{z},\ \cdots,\ x_n=z^{(n-1)},$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=x_2, \\ \dot{x}_2&=x_3, \\ &\cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1}&=x_n, \\ \dot{x}_n&=-a_{n-1}x_n-\cdots-a_1x_2-a_0x_1+u, \\ y&=b_0x_1+b_1x_2+\cdots+b_mx_{m+1}. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

令 $x=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^{\mathrm{T}}$, 即有 (1.3.4) 成立.

(2) 当 $m=n$ 时, (1.3.1) 或 (1.3.2) 的状态空间描述求法. 先求极限

$$\lim_{s\to\infty}g(s)=d, \tag{1.3.7}$$

然后令

$$g_1(s)=g(s)-d \tag{1.3.8}$$

为严格真, 直接按 (1.3.4) 的形式写出 A,b,c 即可.

(3) 当 $m=0$ 时, 此时输入输出关系为

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_0u. \tag{1.3.9}$$

令

$$x_1=y,\quad x_2=y^{(1)},\quad \cdots,\quad x_n=y^{(n-1)}, \tag{1.3.10}$$

则由 (1.3.9) 推得:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=x_3,\\ &\cdots\cdots\\ \dot{x}_{n-1}&=x_n,\\ \dot{x}_n&=y^{(n)}=-a_{n-1}y^{(n-1)}-\cdots-a_1y^{(1)}-a_0y+b_0u,\\ y&=x_1.\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

记 $x=[x_1\ \cdots\ x_n]^{\mathrm{T}}$, 从而 (1.3.9) 有状态空间描述形式

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\begin{bmatrix}0&1&&\\ \vdots&&\ddots&\\ 0&&&1\\ -a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b_0\end{bmatrix}u,\\ y&=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\end{bmatrix}x.\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

1.4 由状态空间描述导出的传递函数矩阵

对于多输入—多输出线性定常系统, 传递函数矩阵是表征系统输入输出特性的最基本的形式. 本节从系统的状态空间描述出发, 来导出系统的传递函数矩阵, 也就是从另一个角度, 来揭示状态空间描述和输入输出描述间的关系.

1. 传递函数矩阵的 (A,B,C,D) 表示的基本关系式

定理 1.3 对应于状态空间描述

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu, & x(0)=0,\\ y=Cx+Du\end{cases} \tag{1.4.1}$$

的传递函数矩阵为

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D. \tag{1.4.2}$$