高等院校公修数学课辅导丛书

线性代数学习指导

XIANXINGDAISHU XUEXIZHIDAO

《线性代数学习指导》编写组

郑州大学出版社

高等院校公

线性代数学习指导

XIANXINGDAISHU XUEXIZHIDAO

《线性代数学习指导》编写组

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/《线性代数学习指导》编写组.—郑州:郑州大学出版社,2004.10

ISBN 7-81048-828-7

Ⅰ.线…　Ⅱ.《线性代数学习指导》编写组　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 080703 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052

全国新华书店经销　　发行部电话:0371-6966070

郑州文华印务有限公司印制

开本:850 mm×1 168 mm　　1/32

印张:10.625

字数:265 千字

版次:2004 年 10 月第 1 版　　印次:2004 年 10 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-81048-828-7/G·74　　定价:14.80 元

内 容 提 要

本书是根据线性代数的基本要求，面向广大学生编写的一本辅导教材，与教材同步使用. 全书包括向量代数、行列式、矩阵、线性方程组、特征值、二次型、线性空间与线性变换等内容. 每章都基本列出了基本要求及重点、内容概要、典型例题分析、习题及其答案提示等内容.

本书可作为高等学校理工科各专业本科生线性代数课程的辅导用书，也可作为准备报考硕士研究生的考生考前强化训练的指导书.

前　言

线性代数是高等学校理工科各专业的一门重要的基础理论课,学生对该课程的掌握程度,不仅直接影响到后续课程的学习,而且对以后的工作也会产生重要的影响.学生通过学习该课程,应该理解线性代数的基本概念,掌握基本理论和方法,逐步提高自己的逻辑推理能力、抽象思维能力、运算能力和综合运用能力.

本书是根据线性代数课程的基本要求,面向广大学生编写的一本辅导教材,与教材同步使用.希望本书能帮助读者加深对线性代数基本内容的理解,掌握解题的方法、技巧,巩固教学内容,提高分析问题、解决问题的能力.

本书包括向量代数、行列式、矩阵、线性方程组、二次型、特征值、线性空间与线性变换等内容.每章都先给出本章的基本要求,总结该部分的主要内容,帮助读者对该章的内容进行复习、归纳;再精选了与本章内容相关的典型例题进行分析,用多种方法解题,提高读者的解题能力;最后,又补充了一些习题,学生可以通过做习题来巩固教学内容.

本书是根据作者多年的教学实践编写的.参加本书编写的有:陈铁生(第一章),王锦玲(第二章),赵可琴(第三章),罗来兴(第四章),邓俊强(第六章),王长群(第五、七章).最后由王长群统稿、定稿.

由于作者水平有限,书中可能会有错误和不足之处,敬请读者与同仁不吝赐教.

王长群

2004 年 9 月

目　录

第 0 章　预备知识

一、内容概要

(一) 数域

通常，我们用 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

设 P 为复数集 $\mathbf{C}$ 的子集，且 $0,1\in P$，如果 P 对加法、减法、乘法、除法(除数不为 0)都是封闭的，则称 P 为一个数域.

显然，有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域，而整数集、无理数集则不构成数域.

任意一个数域 P 都包含有理数域 $\mathbf{Q}$，因此有理数域 $\mathbf{Q}$ 是最小的数域.

(二) 几个常用记号

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n ;\quad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n ;$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{m}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) \\ &= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + \\ &\quad\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \\ &\quad\ \cdots + \\ &\quad\ (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn})\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

(三)数学归纳法

1. 第一归纳法

(1)验证 n 取第一个值 n_0 时(如 $n_0=0,1$ 或 2)命题成立;

(2)假定当 $n=k$ 时命题成立,证明当 $n=k+1$ 时命题成立;

(3)此命题对一切自然数 $n \geqslant n_0$ 均成立.

2. 第二归纳法

(1)验证 n 取第一个值 n_0 时(如 $n_0=0,1$ 或 2)命题成立;

(2)假定当 $n_0 \leqslant n \leqslant k$ 时命题成立,证明当 $n=k+1$ 时命题成立;

(3)此命题对一切自然数 $n \geqslant n_0$ 均成立.

二、典型例题分析

例 1 证明 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i}, a,b \in \mathbf{Q}\}$构成一个数域.

证明 因为 $1=1+0\mathrm{i}, 0=0+0\mathrm{i}$,所以 $0,1 \in \mathbf{Q}(\mathrm{i})$. 设 $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$,

$$(a+b\mathrm{i}) \pm (c+d\mathrm{i}) = (a \pm c) + (b \pm d)\mathrm{i} \in \mathbf{Q}(\mathrm{i});$$

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) = (ac-bd) + (ad+bc)\mathrm{i} \in \mathbf{Q}(\mathrm{i}).$$

又设 $a+b\mathrm{i} \neq 0$,即 a,b 不同时为 0,则 $a-b\mathrm{i} \neq 0$,

$$\frac{c+d\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}} = \frac{(c+d\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\mathrm{i} \in \mathbf{Q}(\mathrm{i}).$$

即 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$对加法、减法、乘法、除法都封闭,从而 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$为一个数域.

例 2 设 $\sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} k \right)$ 是 n 的多项式,将此多项式因式分解.

解 $$\sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} k \right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{2} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}(m^2+m)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}n\frac{(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

例3 证明：

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

证明 当 $n=1$ 时，左边、右边都等于 1，故原式成立.

假设 $n=k$ 时原式成立，即

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2},$$

则有

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2$$

$$=(-1)^{k-1}(k+1)\left[\frac{k}{2}-(k+1)\right]$$

$$=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

这说明当 $n=k+1$ 时原式也成立.

根据数学归纳法，对一切自然数 n 原式均成立.

例4 证明：数域 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{Q}\}$ 不包含除 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ 以外的其他数域.

证明 由于任意数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$，所以 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ 的一个真子域.

又设 P 为包含在 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ 中的一个数域，且 $P\neq\mathbf{Q}$，则 $\mathbf{Q}\subset P$. 从而存在 $a,b\in\mathbf{Q},b\neq0$ 使 $a+b\mathrm{i}\in P$，但 $a+b\mathrm{i}\in\mathbf{Q}$. 于是

$$(a+b\mathrm{i}-a)b^{-1}=\mathrm{i}\in P,$$

从而 $P=\mathbf{Q}(\mathrm{i})$.

第一章　向量代数、空间中直线与平面

【基本要求】

了解空间直角坐标系、向量的概念;理解向量的线性运算及其运算律;掌握向量的数量积、向量积、混合积的定义、几何意义和性质;理解两个向量共线和三个向量共面的充要条件;熟练掌握向量的坐标运算,会用向量的坐标计算向量的线性运算,向量的数量积、向量积、混合积等;理解平面的法向量、平面的方程、平面的点法式方程,会判断空间中两个平面的位置关系,求点到平面的距离;理解直线的方向向量、直线的点向式方程,用直线的方向向量判断空间中两条直线的位置关系、空间中一条直线和一个平面的位置关系,会求点到直线的距离、异面直线间的距离.

本章重点是:向量的线性运算、数量积、向量积、混合积及其应用;直线、平面的方程.

第一部分　向量代数

一、内容概要

(一)空间直角坐标系

1. 两点间距离公式

设点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，则这两点间的距离可以表示为

$$d=\left|P_1P_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2. 定比分点公式

设 $P(x,y,z)$ 是 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 连线上的一点，并且 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_1}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

特别地，当 P 为 P_1，P_2 连线的中点时，有中点公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

（二）向量的概念

1. 向量（矢量）

既有大小又有方向的量称为向量. 常用 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$ 表示向量. 其中 A 点称为起点，B 点称为终点，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度称为向量的模，记为 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 或 $\left|\vec{a}\right|$.

模为 1 的向量称为单位向量. 长度为 0 的向量称为零向量，记为 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$. 只有零向量方向不定.

2. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $\{O;x,y,z\}$ 中，设 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分别是起点在原点 O，方向分别指向 x 轴，y 轴，z 轴正向的单位向量. $P(x,y,z)$ 为空间任意一点，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以表示为

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

上式称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表达式，也可以表示为 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.

分别称 $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ 为向量$\overrightarrow{OP}$在 x 轴, y 轴, z 轴上的分量. 分别称 x, y, z 为向量$\overrightarrow{OP}$在 x 轴, y 轴, z 轴上的投影. $\overrightarrow{OP}$的模可以表示为

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设向量$\vec{a}=\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$和 x 轴, y 轴, z 轴正方向的夹角分别为 α,β,γ, 则 α,β,γ 称为$\vec{a}$的方向角, 其余弦值 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为$\vec{a}$的方向余弦:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

方向余弦满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

与向量$\vec{a}$同方向的单位向量可以表示为$\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$, 记为$\vec{a}^0$.

(三)向量的运算

设

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}=(x_1,y_1,z_1),$$

$$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}=(x_2,y_2,z_2),$$

则有以下运算公式.

1. 加法与减法

(1)加法:

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

(2)减法：

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2).$$

2. 数乘

$$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \quad (\lambda \text{ 是常数}).$$

数 λ 与向量$\vec{a}$的数乘表示一个与$\vec{a}$平行的向量，其模为$\vec{a}$模的$|\lambda|$倍. 当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\vec{a}$ 与$\vec{a}$同方向；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\vec{a}$ 与$\vec{a}$反方向.

向量的加、减和数乘运算统称为向量的线性运算.

3. 数量积(内积)

$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积$\vec{a}\cdot\vec{b}$是一个数量，它的值为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

其中 $<\vec{a},\vec{b}>$ 为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角($0\leqslant<\vec{a},\vec{b}>\leqslant\pi$)，$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$.

运算律如下：

(1)交换律：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

(2)分配律：

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

(3)与数乘向量有结合律：

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\vec{b}=\vec{a}(\lambda\vec{b}).$$

4. 向量积(矢量积，外积)

向量积$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$为一个向量，$\vec{c}$满足：

①$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin<\vec{a},\vec{b}>$；

②$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$，即$\vec{c}$垂直于$\vec{a}$，$\vec{b}$所在的平面；

③$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$构成右手系（图 1－1）.

设$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

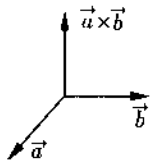

图 1－1

运算律如下：

（1）反交换律：

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

（2）与数乘向量有结合律：

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b}).$$

（3）分配律：

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

5. 混合积

设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为三个向量，先作向量积$\vec{a}\times\vec{b}$，再与第三个向量$\vec{c}$作数量积，则$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$是一个数量，称为$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的混合积，记为$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$，即$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

设$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$，则

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$的几何意义:绝对值$\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积.

运算律如下:

(1)具有轮换对称性,即

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b});$$

(2)$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$.

(四)向量间的关系(表1-1)

表1-1　向量间的关系

关系	向量表示	向量坐标表示
$\vec{a},\vec{b}$间夹角φ	$\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos\varphi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
$\vec{a}$与$\vec{b}$平行	$\vec{a}\times\vec{b}=0$	$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面	$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$

二、典型例题分析

例1　单项选择题.