与2002年最新教材同步

高一数学 试验本（下）

主编 周祥昌

创新联想

同步导学

丛书主编 周仲钺 孙彪

龍門書局

创新联想同步导学

高一数学试验本

（下）

主　编　周祥昌

编　者　马俊华　唐一良

　　　　钱　铭　周祥昌

龍門書局

2002

版权所有　翻印必究

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010)64034160　13501151303(打假办)

创新联想同步导学

高一数学试验本(下)

周祥昌　主编

责任编辑　王　巍

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

北京人卫印刷厂 印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

2002年1月第一版　开本 890×1240 A5

2002年1月第一次印刷　印张 6 1/2

印数 1—25 000　字数 235 000

ISBN 7 80160 386 9/G·377

定　价：7.50元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

第四章 三角函数

三角函数是中学数学的重要内容之一,它的基础主要是几何中的相似形和圆,研究方法主要是代数的,因此三角函数的研究,已经初步把代数和几何联系起来了.高等数学、物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科,都常常用到三角函数及其性质,因此这些内容既是解决生产实际问题的工具,又是学习高等数学的基础.

要点精析与知识迁移

重点难点透视

本章教材重点是:

1. 三角函数的概念;
2. 用同角三角函数间的关系式和诱导公式求任意角的三角函数值;
3. 正弦函数图象的作法与性质;
4. 两角和的余弦、正弦公式,它们是推导本章各类公式的基础;
5. 反三角函数的概念、最简单的三角方程的解集.

本章教材难点是:

1. 弧度制和周期函数概念;
2. 综合运用公式化简三角函数式和证明三角恒等式;
3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换;
4. 具有双重符号的半角公式符号的选择,以及综合运用倍角公式、半角公式进行化简、求值、证明三角恒等式等等;
5. 反三角函数的定义以及反三角函数定义域的选定;
6. 三角方程的增根与失根问题,以及三角方程因解法不同而得到的解集的不同表达形式的等效性问题.

知识点精析

一、任意角的三角函数

1. 角的概念的推广

由于生产实际的需要,把角从不大于周角的非负角推广到任意角,使角包括

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

正角、负角、零角.在平面内建立适当的平面直角坐标系后，将角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，可以根据角的终边在哪一个象限，把角划分为象限角和终边在坐标轴上的象间角，于是引入了第几象限角和终边相同的角的集合这样两个概念.最后由特殊到一般地归纳出“任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和”这一结论.

关于任意角的概念，应着重理解：

正角、负角是用来表示具有相反意义的旋转量的，其正、负的规定纯属习惯，就像正、负数规定一样.一般地，我们规定射线绕着端点逆时针方向旋转形成正角，顺时针方向旋转形成负角，如果一条射线没有作任何旋转，那么就说形成了一个零角.零角无正负之分.

关于象限角的概念，应着重理解：

(1) 讲某角是第几象限的角时，应注意以“角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合”为前提，否则就不能从终边的位置来判断某角属于第几象限.同时还应注意“角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何一个象限”.

(2) 注意第一象限角、锐角和小于 90° 的角的区别与联系.

第一象限角可以表示成：$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$，它包含锐角.

锐角可以表示成：$\{\alpha \mid 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$，它是第一象限角.

小于 90° 的角可以表示成：$\{\alpha \mid \alpha < 90^\circ\}$，它包含锐角.

关于与角 α 终边相同的角的一般形式 $\alpha + k\cdot 360^\circ$，应着重理解以下几点：

(1) $k\in \mathbf{Z}$；

(2) α 是任意角；

(3) 终边相同的角不一定相等，但相等的角的终边一定相同，终边相同的角有无限多个，它们相差 360° 的整数倍.

2. 弧度制

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，记作 1 弧度或 1rad，“弧度”二字或“rad”通常略去不写，而只写出这个角所对应的弧度数.与角度制一样，弧度制是度量角的一种单位制.用角度制和弧度制来度量零角，单位不同，但是数量相同，都是 0；用角度制和弧度制度量任一非零角，单位不同，数量也不同.两种度量制列表比较如下：

	弧度制	角度制
度量单位	弧度(10 进制)	度(60 进制,$1^\circ=60'$,$1'=60''$)
单位规定	等于半径长的圆弧所对的圆心角叫 1 弧度的角	周角的$\frac{1}{360}$叫做 1 度的角
换算关系	π 弧度$=180^\circ$,1 弧度$=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57^\circ18'$,$1^\circ=\frac{\pi}{180}$弧度$\approx0.01745$ 弧度	

关于弧度制,还应理解以下几点:

(1) 无论用角度制还是弧度制,都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立一种一一对应的关系.不要认为只有弧度制才能将角与实数一一对应.但用弧度制表示角,较容易找出与角对应的实数(即这个角的弧度数).同时,弧度制下的弧长公式 $l=|\alpha|\cdot r$,扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$,比角度制下对应的公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$,$S=\frac{n\pi r^2}{360}$更为简单.

(2) 用公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$求圆心角时,应强调其结果是圆心角的弧度数的绝对值,在物理学中计算角速度时经常要用到它,应予掌握.同时还应掌握其两种变形式子 $l=|\alpha|r$ 及 $r=\frac{l}{|\alpha|}$($|\alpha|\neq0$),这些公式各有各的用途.

(3) 特别指出的是:

①用“弧度”为单位度量角时,“弧度”两字可以省略不写,例如:sin1 是指 sin(1 弧度).但用“度”为单位度量角时,“度”(即“°”)不能省去.

②用“弧度”为单位度量角时,常常把弧度数写成多少 π 的形式,如无特别要求,不必把 π 写成小数,例如 $45^\circ=\frac{\pi}{4}$弧度,不必写成 $45^\circ\approx0.785$ 弧度.

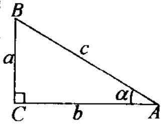
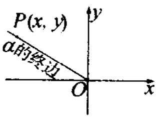
③写出与角 α 终边相同的角时,要根据角 α 的单位来决定后一项的单位,也就是说,两项所采用的单位必须一致,防止出现$\frac{\pi}{3}+k\cdot360^\circ$或 $60^\circ+2k\pi$ 一类的写法.

3. 任意角的三角函数

任意角的三角函数是以实数(角的弧度数)为自变量,以比值为函数值的函数,即

实数$\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$角(其弧度数等于这个实数)$\xrightarrow{\text{映射}}$三角函数值(实数)

锐角、任意角的三角函数的比较:

	定义		定义域	符号
锐角三角函数		$\sin\alpha=\frac{a}{c}$ $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ $\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	全为正
任意角的三角函数		$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	**R**	一二象限为正,三四象限为负
		$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	**R**	一四象限为正,二三象限为负
		$\tan\alpha=\frac{y}{x}$	$\{\alpha\mid\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$	一三象限为正,二四象限为负

任意角的三角函数的定义是三角函数有关知识的基础,从定义出发来研究函数性质是该节的主要思维方法.

(1) 定义域是函数的三要素之一,研究三角函数的定义域可从定义出发,抓住分母为零时比值无意义这一关键.

(2) 根据三角函数的定义可知,任意角的三角函数又可以用与单位圆有关的某些特定的有向线段的数值来表示,我们称这些线段为三角函数线.关于三角函数线,还应注意:它是有向线段,在用字母表示时,要注意分清它们的方向,分清起点和终点,书写顺序不能颠倒.其规律如下:凡含原点的线段,均以原点为起点;不含原点的线段,均以此线段与坐标轴的公共点为起点.

(3) 根据三角函数的定义可知,三角函数值的符号由角的终边上的点的坐标的符号惟一确定.当角的终边在 x 轴上方时,终边上点的纵坐标为正,故正弦为正;当角的终边在 x 轴下方时,终边上的点的纵坐标为负,故正弦为负,可概括为“上正下负”.类似地,余弦的符号可概括为“右正左负”,而正切的符号为“一、三为正,二、四为负”.

(4) 根据三角函数的定义可知,终边相同的角的同一三角函数值相等.从而得到公式一:

$\sin(\alpha+k\cdot360^\circ)=\sin\alpha$,

$\cos(\alpha+k\cdot360^\circ)=\cos\alpha$,

$\tan(\alpha+k\cdot360^\circ)=\tan\alpha$,

其中 $k\in\mathbf{Z}$,利用公式一,可以把求任意角的三角函数值,转化为求 0° 到 360° 角的三角函数值,体现了数学中的化归思想.当任意角的三角函数值可以转化到 0° 到 90° 的角的三角函数时,就可以用数学用表求出其结果了,当然,随着计算器

和电脑的普及，对任意角的三角函数值，均可以通过计算器与电脑直接求得其结果.

有关任意角的三角函数补充说明如下：

①$\sin\alpha$ 不是 sin 与 α 的乘积，而是一个整体，它表示角 α 的正弦值，其他的也一样；

②sin, cos, tan, cot, sec, csc 分别是英语中单词 sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant 的缩写；

③sin, cos, tan, cot, sec, csc 中的第一个字母都不能大写，如 sin 不要写成 Sin；

④有的书上（包括以往的教材中）把 tan 写成 tg，把 cot 写成 ctg，现行课本遵照我国国家标准《量和单位》中的规定，统一使用前者（电子计算机和计算器上也使用前者）；

⑤$\sin^2\alpha$ 是 $(\sin\alpha)^2$ 的简写，读作"$\sin\alpha$ 的平方"，不能将 $\sin^2\alpha$ 写成 $\sin\alpha^2$，前者是 α 的正弦值的平方，后者是 α 的平方的正弦值，两者截然不同；

⑥终边在坐标轴上的角的三角函数值如下表所示：

	x 轴非负半轴	y 轴非负半轴	x 轴非正半轴	y 轴非正半轴
$\sin\alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在

⑦从三角函数的定义可知，$\sin\alpha$ 与 $\csc\alpha$，$\cos\alpha$ 与 $\sec\alpha$，$\tan\alpha$ 与 $\cot\alpha$ 互为倒数关系，因而有关 $\cot\alpha$，$\sec\alpha$，$\csc\alpha$ 的有关性质不难由此解出，所以在学习时掌握 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 至关重要.

4. 同角三角函数的基本关系

同一个角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割之间主要有以下关系：

平方关系　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha, 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$；

商数关系　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

倒数关系　$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1, \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1, \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.

这八个关系式都可以通过任意角的三角函数的定义推证，充分显示了数学中定义的重要性，深刻理解并掌握任意角的三角函数的定义是学好本章内容的基础.

同角三角函数之间的关系有如下应用：

(1) 已知某任意角的一个三角函数值，求此角的其余三角函数值.

解决这类问题要注意已知角所在的象限，从而出现一组解或两组解的情况，往往有以下三类：

①已知某一个角的某一个三角函数值，而且角所在的象限已经被指定，其结果只有一组解；

②已知某一个角的某一个三角函数值，但是角所在的象限没有给出，其结果一般有两组解；

③已知的一个三角函数值是用字母表示的，且角所在的象限没有被指定，那么该角的终边可能在四个象限，一般可不必分四个象限讨论，可以把四个象限的角的三角函数分成两组（每组为两个象限）去求，所以形式上，结果一般仍有两组解. 当然不可忘记考虑角的终边落在坐标轴上的情形.

(2) 化简三角函数式

化简三角函数式实际上是一种不知答案的恒等变形，就是要将原三角函数形化为最简形式. 最简形式一般指：

第一，函数的种类最少，次数最低，尽可能化为积的形式；

第二，尽可能求值（如果能求值的话）；

第三，尽可能使分母不带有三角函数符号；

第四，根号内的三角函数尽可能开出来，使分母不含根式.

(3) 证明三角恒等式

证明三角恒等式常用以下证法：

①从等式的一边开始证到等于另外一边，一般由繁到简，顺理成章，可以从左边证到右边，也可以从右边证到左边；

②证明左、右两边都等于同一个式子，或证明左边减去右边的差等于 0，或证左边除以右边所得结果为 1；

③综合法，从已知条件出发，变形证得需要证明的等式；

④分析法，将结论转化为与它等价的命题，然后证明这个等价命题，或者说明它显然成立. 如证明：

$$\frac{\cos\alpha\csc\alpha-\sin\alpha\sec\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\csc\alpha-\sec\alpha.$$

证明：要证原等式成立

只要证：$\cos\alpha\csc\alpha-\sin\alpha\sec\alpha=(\csc\alpha-\sec\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)$，

只要证：$\cos\alpha\csc\alpha-\sin\alpha\sec\alpha=\csc\alpha\cos\alpha-1+1-\sin\alpha\sec\alpha$，

上式显然成立，所以原等式成立.

值得说明的是，以上的种种证法都离不开三角函数的变换. 在变换过程中，把正切、余切、正割、余割函数都化为正弦和余弦函数，即“化切为弦”，往往有利于发

现等式两边的关系或使式子简化.但在证明过程中也要细心观察,灵活运用,才能达到简便的目的.例如上题若不采用分析法而直接化弦去证,解法较繁.

在运用同角三角函数的基本关系解题时,还应注意:

①这八个公式都是同角关系,通常 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta\neq1$,而 $\sin^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1$ 成立;

②这八个公式都是恒等式,其中 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 中的 α 可以任意取值,其余七个公式则要求 α 的取值使等式两边都有意义,对今后所说的恒等式都应该这样理解,解题时,如无特别说明,一般都把关系式看成是有意义的;

③要熟悉公式的各种变形,例如 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可以变形为 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$,$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ 等等;

④用平方关系开平方时,要根据这个角所在的象限来确定根号前的符号.

5. 正弦、余弦的诱导公式

根据诱导公式一:$\sin(\alpha+k\cdot360^\circ)=\sin\alpha$,$\cos(\alpha+k\cdot360^\circ)=\cos\alpha$,可以将任意角的三角函数化到 $0^\circ\sim360^\circ$ 间的角 α 的三角函数,但 α 还可能不是锐角,这就要设法将 $90^\circ\sim360^\circ$ 间的角的三角函数化到 $0^\circ\sim90^\circ$ 内角的三角函数,而公式二,公式三,公式四,公式五就是专门解决这一问题的.

公式二

$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(180^\circ+\alpha)=\tan\alpha$

$\cot(180^\circ+\alpha)=\cot\alpha$

公式三

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

公式四

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$

公式五

$\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(360^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(360^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$

公式二与公式三的推导,关键是 α 与 $180^\circ+\alpha$ 的终边互为反向延长线,α 与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称,从而由 α 终边上点 $P(x,y)$ 知相应对称点 $P_1(-x,-y)$,$P_2(x,-y)$,分别在 $180^\circ+\alpha$ 与 $-\alpha$ 的终边上.根据三角函数的定义即有公式二和公式三,而公式四、公式五利用公式二、公式三以及角 α 的任意性不难推导出来.当然这两组公式也可利用推导公式二的方法类似推导.

利用诱导公式,把任意角的三角函数转化为锐角的三角函数,一般可按下面的步骤进行:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$\boxed{\text{任意负角的三角函数}} \xrightarrow{\text{用公式一或三}} \boxed{\text{任意正角的三角函数}} \xrightarrow{\text{用公式一}}$$

$$\boxed{0^\circ\text{到}360^\circ\text{的角的三角函数}} \xrightarrow{\text{用公式二或四或五}} \boxed{\text{锐角三角函数}}$$

可以看出，这种转化的过程体现了数学中把未知问题化归为已知问题的化归思想.

关于这五组诱导公式的记忆，可概括如下：$\alpha+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，$-\alpha$，$180^\circ\pm\alpha$，$360^\circ-\alpha$ 的三角函数值等于 α 的同名函数值，前面加上一个把 α 看成是锐角时原来函数值的符号，简记为“函数名不变，符号看象限”.

二、两角和与差的三角函数

1. 两角和与差的正弦、余弦、正切

(1) 利用单位圆和两点间的距离公式导出余弦的和角公式 $C_{\alpha+\beta}$，由于 α、β 为任意角，因此可按以下的顺序推导其余的公式：$C_{\alpha+\beta}\to C_{\alpha-\beta}\to S_{\alpha+\beta}\to S_{\alpha-\beta}\to T_{\alpha+\beta}\to T_{\alpha-\beta}$. 它们之间的内在联系如下：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix}S_{\alpha+\beta}\\ C_{\alpha+\beta}\end{matrix}} \arrow[r, "\text{以}-\beta\text{代}\beta"] \arrow[d, "\text{相除}"] & \boxed{\begin{matrix}S_{\alpha-\beta}\\ C_{\alpha-\beta}\end{matrix}} \arrow[d, "\text{相除}"] \\
\boxed{T_{\alpha+\beta}} \arrow[r, "\text{以}-\beta\text{代}\beta"] & \boxed{T_{\alpha-\beta}}
\end{tikzcd}$$

具体公式如下：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，　　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta$，　　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，　　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

课本中运用两角差的余弦公式把前面学过的公式 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ 推广到适用于任意角 α. 在推导过程中出现的把 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 换成 α，比较容易混淆. 事实上，把公式 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ 左边的 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 换成 α，那么右边的 α 自然要换成 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，从而得到 $\cos\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$，这一代换过程可以这样来理解.

因为公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \quad ①$$

中的 α 为任意角,所以在此公式中用$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替α,便得

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

即

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \quad ②$$

当然还可以在①式中令 $\alpha'=\frac{\pi}{2}-\alpha$,则 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha'$,于是由①式得 $\cos\alpha'=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha'\right)$,其中 α'为任意角,再把 α'换成α 即可.

利用①②,课本中两角差的正弦公式除了用在两角和的正弦公式中把 $-\beta$ 来代β 之外,也可用如下方法来推导:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

课本上利用了两角和的正弦与余弦公式推导了两角和的正切公式.在推导过程中有两个假设条件:①是 $\cos(\alpha+\beta)\neq0$;②是 $\cos\alpha\cos\beta\neq0$.如果 $\cos(\alpha+\beta)=0$,则 $\alpha+\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$;如果 $\cos\alpha\cos\beta=0$,则 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.而公式推导过程中必须有这两个假设条件才能得到两角和的正切公式,所以两角和的正切公式在 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$\alpha+\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$时才成立,否则不成立.也就是说,当 $\tan\alpha$,$\tan\beta$ 或 $\tan(\alpha+\beta)$的值不存在时,不能使用此公式.

理解、记忆、运用两角和与差的正弦、余弦、正切公式时,应注意以下几点:

①弄清角、函数的排列顺序及式中每一项的符号,特别是弄准余弦、正切的和(差)公式;

②牢记公式并能熟练地将左右两边互化;例如化简 $\sin20^\circ\cos50^\circ-\sin70^\circ\cdot\cos40^\circ$,能迅速辨认此式等于 $\sin20^\circ\cos50^\circ-\cos20^\circ\sin50^\circ=\sin(20^\circ-50^\circ)=-\frac{1}{2}$;

③当 α,β 中有一个角为$\frac{\pi}{2}$的整数倍时,利用诱导公式较为简便;

④灵活运用和(差)角公式,例如化简 $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$ 时,不要将 $\cos(\alpha+\beta)$,$\sin(\alpha+\beta)$展开,而应就整个式子直接运用公式化为 $\cos[(\alpha+\beta)-\beta]=\cos\alpha$;

⑤和(差)角公式可看成诱导公式的推广,诱导公式可看做和(差)角公式的特

例;例如 $\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cos\alpha-\sin\pi\sin\alpha=(-1)\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha$.

2. 二倍角的正弦、余弦、正切

在正弦、余弦、正切的和角公式中,令两角相等,就得到对应的倍角公式.由此可知,倍角公式是和角公式的特例.

具体公式如下:

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

公式 $S_{2\alpha}$, $C_{2\alpha}$ 中,角 α 可以为任意角;但公式 $T_{2\alpha}$ 只有当 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\alpha\neq\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 时才成立,否则不成立(因为当 $\alpha=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$ 时,$\tan\alpha$ 的值不存在;当 $\alpha=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$ 时,$\tan2\alpha$ 的值不存在).而当 $\alpha=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$ 时,虽然 $\tan\alpha$ 的值不存在,但 $\tan2\alpha$ 的值是存在的,这时求 $\tan2\alpha$ 的值可利用诱导公式,即

$$\tan2\alpha=\tan2\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\tan(\pi+2k\pi)=\tan\pi=0.$$

要深刻理解和掌握二倍角的正弦、余弦、正切,须注意以下几点:

①是要把握它们的结构特征,如 $\sin2\alpha$ 与 $\cos2\alpha$ 都具升幂功能,同时其变形后又具有因式分解的功能.对于二倍角的余弦公式 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 及 $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$,这样对二倍角的余弦就有三个公式,在具体运用时,要根据具体题目的要求来加以选择.据此公式进一步可以得到降幂公式 $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$.

②是要注意倍角的相对性,例如将 4α 作为 2α 的 2 倍,将 α 作为 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的 2 倍,将 $\dfrac{\alpha}{2}$ 作为 $\dfrac{\alpha}{4}$ 的 2 倍,将 3α 作为 $\dfrac{3\alpha}{2}$ 的 2 倍,将 $\dfrac{\alpha}{3}$ 作为 $\dfrac{\alpha}{6}$ 的 2 倍等等情况,也就是说,使用倍角公式时只要两个角成 2 倍关系即可.

③是余切、正割、余割的倍角公式都是利用同角三角函数关系式转化处理.

④是对公式的正向使用同学们感到非常自然、熟悉,但对公式的逆向使用则感到困难,例如:$\sin3\alpha\cos3\alpha=\dfrac{1}{2}\sin6\alpha$, $4\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}=2\left(2\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}\right)=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{2\tan40^\circ}{1-\tan^240^\circ}=\tan80^\circ$, $\cos^22\alpha-\sin^22\alpha=\cos4\alpha$.

⑤是要注意公式的变形,如 $\cos\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$ 在求积时的应用.

下面是一些常见公式及其中一些公式的推导:

半角公式:$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$,$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$,

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

和差化积公式:$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$

$$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

积化和差公式:$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

半角公式的推导是直接从倍角公式 $\cos2\alpha$ 中作 $\alpha\to\frac{\alpha}{2}$ 代换后再解出 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 与 $\cos\frac{\alpha}{2}$,再用 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ 得出,对其有理表达式则可做如下推导:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

三、三角函数的图象和性质

1. 正弦函数、余弦函数的图象和性质

作正弦函数和余弦函数图象通常有以下两种作法:

“几何法”,即利用单位圆中正弦线的平移方法画 $y=\sin x$ 的图象的方法,其核心是等分圆周及等分区间$[0,2\pi]$和正弦线的平移.其次是利用终边相同角的正弦值相等推知 $y=\sin x$ 在区间$[2k\pi,(2k+2)\pi]$,$(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$上的图象与 $y=\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上图象形状完全一样,从而通过左右平移得 $y=\sin x,x\in\mathbf{R}$ 的图象.此方法得到的图象比较精确,但也比较繁琐.

同样可采用几何法及余弦线作出 $y=\cos x, x\in\mathbf{R}$ 的图象，但较复杂. 注意到 $y=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，则可利用图象平移，即将正弦曲线 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位长度得到余弦曲线.

“五点法”，利用“五点法”作 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$或作 $y=\cos x, x\in[0,2\pi]$内的图象，关键是搞清楚这五点是曲线在$[0,2\pi]$上的两个极值点和三个拐点（曲线凹凸性改变的点），或者是三个极值点与两个拐点.“五点法”是作简图的常用方法.

正弦函数和余弦函数的主要性质：

(1) 定义域，正（余）弦函数的定义域均为 $\mathbf{R}$；

(2) 值域及有界性

值域均为$[-1,1]$，对于任意的 x，总有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是有界函数. 函数 $y=\sin x$ 在 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ 时取得最大值 $y=1$；在 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ 时取得最小值 $y=-1$. 函数 $y=\cos x$ 在 $x=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时取得最大值 $y=1$；在 $x=2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$ 时取得最小值 $y=-1$.

(3) 单调性

正弦函数与余弦函数在其整个定义域内不是单调函数，但存在单调区间.

函数 $y=\sin x$ 的单调增区间是：$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right], k\in\mathbf{Z}$；单调减区间是：$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, 2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi\right], k\in\mathbf{Z}$；

函数 $y=\cos x$ 的单调增区间是：$[2k\pi-\pi, 2k\pi], k\in\mathbf{Z}$；单调减区间是：$[2k\pi, 2k\pi+\pi], k\in\mathbf{Z}$.

但不能说成正弦函数 $y=\sin x$ 在第一象限或第四象限是增函数，在第二象限或第三象限是减函数，例如：$x_1=\dfrac{\pi}{3}, x_2=\dfrac{13}{6}\pi$，显然$\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{13\pi}{6}$且均为第一象限角，但 $\sin\dfrac{\pi}{3}<\sin\dfrac{13}{6}\pi$ 不能成立. 同样不能将余弦函数 $y=\cos x$ 说成是三、四象限的增函数.

(4) 奇偶性

$y=\sin x$ 在定义域内是奇函数，即有 $\sin(-x)=-\sin x$，图象关于原点对称.

$y=\cos x$ 在定义域内是偶函数，即有 $\cos(-x)=\cos x$，图象关于 y 轴对称.

(5) 周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域集合为 D，若存在常数 $T\neq 0$，使得对任意的 $x\in D$ 且 $x+T\in D$ 时，都有 $f(x+T)=f(x)$成立，则称 $y=f(x)$为 D 上的周期函数，非零常数 T 叫做这个函数的周期.

周期函数的定义可以描述为：函数对于自变量的一切值每增加或减少一个定值，函数就要重复出现，这个函数就叫做周期函数.

关于函数的周期，有如下几点说明：

①对于周期函数，只要掌握了它在一个周期的性质，就可以掌握函数在整个定义域内的性质.

②定义中的 $f(x+T)=f(x)$ 是反映函数周期性的本质条件，对于选定的非零常数 T，x 应具有任意性. 例如当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$ 成立，不能说 $\frac{2\pi}{3}$ 是函数 $y=\sin x$ 的周期，因为当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\neq\sin\frac{\pi}{3}$.

③由周期函数的定义可知，若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T, 3T, \cdots$ 及 $-2T, -3T, \cdots$ 都是 $f(x)$ 的周期. 一般地，nT ($n\in\mathbf{Z}$ 且 $n\neq0$) 也是这个函数的周期. 对于一个周期函数来说，如果在所有的周期中存在一个最小的正数，就把这个正数叫做最小正周期. 今后若不做特别说明，本书中提到的函数的周期都是指最小正周期.

④由诱导公式可知，对定义域内任何 x 的值，都有 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ ($k\in\mathbf{Z}$)，$\cos(x+2k\pi)=\cos x$ ($k\in\mathbf{Z}$)，所以 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是周期函数，$2k\pi$ 是它们的周期，而且 2π 是它们的最小正周期.

⑤由周期函数的定义可知，周期函数的一个必要不充分条件就是它的定义域至少一方无界. 例如 $y=\sin x$，$x\in[-2\pi, 10\pi]$ 就不是周期函数. 再如 $y=\sin x$，$x\in[0,+\infty)$ 是只有正周期的周期函数.

⑥周期函数的几何意义即是其每相邻两个周期内的图象重复出现.

2. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象可以利用“五点法”作图，这里主要讨论怎样从函数 $y=\sin x$ 的图象经过不同的图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，可以从以下几个方面来展开.

①函数 $y=A\sin x$，$x\in\mathbf{R}$（其中 $A>0$ 且 $A\neq1$）的图象，可以看做是把正弦曲线上所有点的横坐标不变，而纵坐标伸长（$A>1$ 时）或缩短（$0<A<1$ 时）到原来的 A 倍而得到的，这种变化是由振幅 A 引起的，通常称之为振幅变换.

②函数 $y=\sin\omega x$，$x\in\mathbf{R}$（其中 $\omega>0$ 且 $\omega\neq1$）的图象，可以看做是把正弦曲线上所有点的纵坐标不变，而横坐标缩短（$\omega>1$ 时）或伸长（$0<\omega<1$ 时）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍而得到的，这种变化是由 ω 引起的，通常称之为周期变化.

③函数 $y=\sin(x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$（其中 $\varphi\neq0$）的图象，可以看做是用下面的方法得到的，把正弦曲线上所有的点向左（$\varphi>0$ 时）或向右（$\varphi<0$ 时）平行移动 $|\varphi|$ 个

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com