



银领工程

高等职业教育技能型人才培养培训工程系列教材

经济与管理数学

—— 微积分与线性代数

雷田礼 主编

康永强 郑红 齐松茹 副主编



高等教育出版社

Higher Education Press

银领工程

高等职业教育技能型人才培养培训工程系列教材

经济与管理数学

——微积分与线性代数

雷田礼 主编

康永强 郑红 齐松茹 副主编

雷田礼 康永强 郑红

齐松茹 康晓红 杨圣宏 编

王培麟

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济与管理数学:微积分与线性代数/雷田礼主编.
—北京:高等教育出版社,2005.12
ISBN 7-04-018102-9

I. 经... II. 雷... III. ①微积分-高等学校:
技术学校-教学参考资料②线性代数-高等学校:
技术学校-教学参考资料 IV. ①O172②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第137054号

策划编辑 罗德春 责任编辑 舒敬江 封面设计 张楠 责任绘图 郝林
版式设计 王艳红 责任校对 张颖 责任印制 孔源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
总 机	010-58581000	网上订购	http://www.landaco.com http://www.landaco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	北京市卫顺印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2005年12月第1版
印 张	10.25	印 次	2005年12月第1次印刷
字 数	220 000	定 价	15.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18102-00

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自2001年10月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要“以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路”，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能人才。这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是“银领”。从而为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变。与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。对此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了“银领工程”丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的“银领”人才的这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于固化并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。我们的这一想法和做法也得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪专门为首批“银领工程”丛书提笔作序。

我社出版的高等职业教育各专业领域技能型紧缺人才培养培训工程系列教材也将陆续纳入“银领工程”丛书系列。

“银领工程”丛书适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校开办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社

2004年9月

序 言

在深圳经济特区建立 25 周年之际,我欣喜地给高职院校数学教学改革的又一新作——《经济与管理数学》作序。这是因为数学教学的改革对于培养高技术人才和高技能人才来说,不仅是非常需要的,也是非常紧迫的。我国的高等职业院校无论是学校数还是在生人数,都已经是全国高等院校名副其实的“半边天”了。但是,建立一整套与我国高职教育相适应的教学模式,以及推进包括数学在内的理论课的教学改革任务是相当繁重的。

纵观作为高职院校数学课的改革历程,大致分为两个阶段:第一阶段为“压缩模块型”,即将传统的数学内容删去繁琐的数学论证,压缩成若干模块,以供有关专业选用;第二阶段为“举证应用型”,即对传统的数学知识进行整合,添加数学知识应用部分加以举证的内容。高职院校教学改革的整体推进,引起了人们对高职院校数学课程教学改革的进一步思索。人们不禁要问,删去了繁琐的数学论证后,留下的内容主要是数学概念和计算。在计算机软件如此发达的今天,高职院校的学生有无必要花费如此多的时间去演练数学计算?人们还要问:将数学应用的内容举证式地引进高职数学课程,是否真正做到了数学与专业知识的结合?

我们一直这样认为:现代化建设需要各种类型、各种层次的人才,而各种类型、各种层次的人才当然需要由各种类型、各种层次的大学去培养。培养既具有一定专业理论知识,又具有较强的实践操作能力的高技术、高技能人才已成为当前蓬勃发展的高职教育的重大历史使命和不可替代的教育目标。因此,高职院校的数学教学也一定能找到符合这类大学人才培养目标的教学模式。我们就是在上述战略思考和实际教学经验总结的基础上,为高职院校经济、管理类专业编写了一本新型的数学教材——《经济与管理数学》。它具有如下几个特点:

一、用“模块案例一体化”的方法,从经济案例中引出数学概念和方法,将数学知识模块与经济案例充分融合,有效地缩短了数学与专业知识的距离,使学生对抽象的数学知识的背景理解更深刻,应用更有效;

二、引入了先进的数学软件,使学生计算手段现代化。虽然学生进行数学计算的时间少了,但由于能用数学软件进行计算,能更有效地解决经济与管理实践中的复杂计算问题;

三、提高了学生分析问题、解决问题的能力。由于摒弃了传统的对数学知识系统进行的盘点式教学方法,采用了以经济与管理前沿的案例驱动,融合数学知识的方法,使学生加深了对数学概念与方法的理解,提高了用数学知识分析和处理实际问题的能力。又由于学生学会了用数学软件进行计算,提高了学生解决复杂实际问题的能力。

人类数学的发展史告诉我们,任何数学概念的形成和方法的提出,首先是从生动丰富的实践活动中,通过抽象和提炼才形成的,然后再用理论化的数学概念和数学方法来指导实践和服务于

实践。本教材就是基于数学发展的这一基本流程和认识论的基本特征,从具体到抽象,再从抽象到具体。这种教学思路非常符合目前高等职业技术教育重实践、重动手能力培养人才的特点。鉴于该教材鲜明的教学改革特色,可以说,它是高职院校数学教学改革进入新阶段的一种有益的尝试;它是为用现代化知识改造传统知识,建立新的教学体系做出的一种努力;它为基础课教学从举证式地为专业知识服务转变为主动与专业知识融合提供了一种样例。

我真诚地期盼全国有更多的数学教育工作者,以锐意改革的特别之为,以不断创新的精神之为,来创造更富有实效、更加具有生命力的数学教育的新模式。愿我国高职教育教学改革园地中绚丽的花朵,能够开放得更加鲜艳!

深圳职业技术学院 俞仲文

前 言

近年来,年轻的中国高等职业教育以其鲜明的特色,在适应现代社会人才多样化需求,实施高等教育大众化等方面,做出了重大的贡献。同时,由于其鲜明的职业特征,其课程体系及教学内容与传统大学教育相比有着许多的不同。为了达到高职教学的培养目标、适应高职学生的特点,我们在多年不断的改革和探索的基础之上,针对高职高专学生编写了《经济管理数学》一书(共分两册,第一册为微积分与线性代数部分,第二册为概率论与数理统计部分),作为经济管理数学课程立体化教材中的主教材。

本教材力求体现如下特点:

第一,全书在科学性的基础之上力争跳出传统数学理论体系的约束,以经济管理案例驱动数学内容,贯彻“与专业结合,必需、够用为度”之原则,争取较好实现数学模块与专业案例的对接。体现了“模块案例一体化”的教学特色,缩短了数学课程与后续专业课之间的距离。

第二,为了实现高职院校应用型人才的培养目标,本教材力求按“以能力培养为中心”的原则组织编写。所有数学内容都力争以经济管理生活中的实际案例为背景展开,从实际案例的解答中引入数学概念,最后再将数学思想和方法应用到实际案例中去。并通过大量的经济案例强化学生应用数学知识解决实际问题的能力,充分体现了以“能力为中心”的培养目标。

第三,我们认为,数学教学应以“思想传授为主,计算和证明为辅”。学生只有真正理解和掌握了数学思想,才能在解决实际问题中融会贯通、左右逢源,才能有所创新。例如,我们在微积分部分突出了极限的思想、变化率的思想 and 积分的思想(以及微元法)等教学内容,通过实际案例引入这些数学概念后,还通过案例反复强化学生对这些数学思想和概念的理解。争取培养学生解决实际问题的数学思维习惯。

第四,在突出数学思想的同时,结合高职高专学生的实际情况,本教材弱化了复杂及技巧性较高的数学计算内容,节约了相当的篇幅。但另一方面则引入了语言简洁、交互性较好、易于掌握的 MATLAB 数学软件知识,希望学生掌握这一门功能强大的数学计算工具,并能用它去处理较为复杂的数学计算内容。

第五,根据开放教育的特点,本书将建成立体化教材。除了主教材,还配备可修改的教学课件、自主学习的网络课程、考试系统、案例素材库及实验手册,以及全书的习题详解。给教师教学和学生自学提供了强有力的帮助。

在主教材编写特色上,我们在每章首都列出了学生应掌握的学习目标,在 MATLAB 命令语句上都给出了详细解释,易于学生自学。同时案例丰富,力求贴近实际,有利于激发学生的学习兴趣。

本套书(《微积分与线性代数》和《概率统计》)由雷田礼任主编,负责统一编写思想;由康永强、郑红和齐松茹任副主编。参加编写的人员还有康晓红、杨圣宏、王培麟。全书由雷田礼和杨圣宏统稿,刘志勇和李朝忠进行了文字、图表校定工作,郑红、李朝忠和伍春燕对习题进行了审定。

特别感谢深圳职业技术学院院长俞仲文教授对本书的编写提出的重要的指导性意见;另外,在本教材的编写过程中,顺德职业技术学院康永强副主编、番禺职业技术学院的编者王培麟、深圳信息职业技术学院的张玉成副教授在本书的编写过程中都提出过建设性意见。在此一并致谢。

本教材适合经济、管理类的高职高专学生使用。

由于本书涉及面较广,加上我们水平有限、经验不足且时间仓促,书中不当之处在所难免,恳请读者批评指正,我们将在再版时加以更正。

另:本书习题详解 Word 文档,可通过邮箱 door22h@sina.cn 向作者索取。

编 者

2005 年 8 月

于深圳职业技术学院

目 录

第一章 经济函数与极限	1	§ 3.5 积分思想的再认识——微元法	70
§ 1.1 函数概念及初等函数	1	§ 3.6 利用 MATLAB 计算积分	74
§ 1.2 常用经济函数	4	习题三	76
§ 1.3 极限与连续	7	第四章 矩阵与行列式	78
§ 1.4 MATLAB 基础及其在极限计算与 连续中的应用	17	§ 4.1 矩阵的概念	78
习题一	26	§ 4.2 矩阵的运算	81
第二章 导数及其经济应用	28	§ 4.3 方阵的行列式	88
§ 2.1 导数的概念	28	§ 4.4 逆矩阵	95
§ 2.2 导数在经济方面的应用(1) ——边际分析	32	§ 4.5 矩阵的初等变换	98
§ 2.3 导数在经济方面的应用(2) ——最优化问题	35	§ 4.6 用 MATLAB 计算矩阵 和解线性方程组	102
§ 2.4 导数在经济方面的应用(3) ——弹性分析	43	习题四	108
§ 2.5 函数的微分	47	第五章 线性经济模型简介	110
§ 2.6 MATLAB 在导数中的应用	48	§ 5.1 投入产出数学模型	110
习题二	51	§ 5.2 用 MATLAB 求解投入产出 数学模型	123
第三章 积分及其经济应用	55	§ 5.3 线性规划数学模型	127
§ 3.1 定积分的概念	55	§ 5.4 用 MATLAB 求解线性规划 数学模型	132
§ 3.2 函数的原函数与不定积分	60	习题五	138
§ 3.3 换元积分法与分部积分法介绍	64	习题答案	142
§ 3.4 微积分基本公式	66	参考书目	149

第一章 经济函数与极限

目 标

1. 掌握函数概念及常用经济函数.
2. 理解极限思想,并会计算简单的极限.
3. 掌握 MATLAB 基础知识.
4. 会利用 MATLAB 软件求解极限问题.

函数是研究经济现象的重要工具,是经济与管理数学的重要概念之一.有必要进一步学习函数的概念及有关内容,学习经济学中的常用函数,并对函数极限的概念作详细介绍.在本章中我们还将学习一些 MATLAB 软件的基础知识.

§ 1.1 函数概念及初等函数

1.1.1 函数概念

在对经济现象进行观察时,常会遇到两种不同的量:一种量在研究过程中保持不变,称为常量;另一种量在研究过程中是不断变化的,可以取不同的值,称为变量.例如在一段时间内,银行的利率是保持不变的,可以看成常量;而股票的价格则是每天都在发生变化,可以用变量来表示.常量通常用字母 a, b, c, k 等表示;变量用字母 x, y, z, t 等表示.

在同一研究过程中的几个变量常是相互关联的,某些变量之间可能存在着对应关系.

案例 1.1 某种商品的价格为常数 p (元/件),则销售量 Q (件)与收益 R (元)之间存在着对应关系

$$R = pQ.$$

当销售量 Q 取定某一数值时,收益 R 也对应着一个确定的数值.收益 R 随销售量 Q 的变化而变化.这种对应关系称之为函数.下面给出函数的确切定义:

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y ,如果对于变量 x 在允许取值范围内的每一个值,变量 y 按照某种对应规则,有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x),$$

其中 x 为自变量, y 为因变量. x 的取值范围叫函数的定义域, y 的取值范围叫函数的值域.

在表示变量取值范围时,最常用的概念是区间(包括开区间、闭区间、半开半闭区间),另一个是邻域.通常我们称 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$)为点 x_0 的 δ -邻域.它实际上是以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间.

在中学数学研究过函数的基本性态,包括单调性、奇偶性、周期性、有界性等,这里不再详述.

1.1.2 基本初等函数、复合函数、初等函数

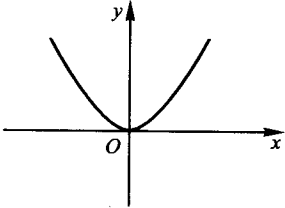
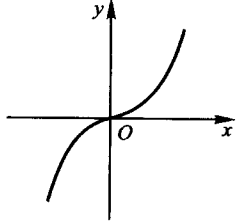
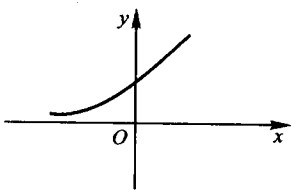
一、基本初等函数

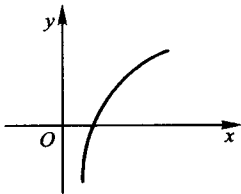
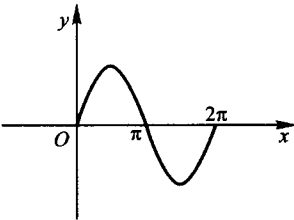
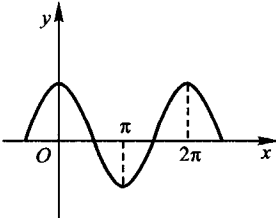
我们将下面五类函数,称为基本初等函数:

- (1) 幂函数: x^α (α 为实常数);
- (2) 指数函数: a^x ($a > 0, a \neq 1$); 特别, e^x .
- (3) 对数函数: $\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$); 特别, $\ln x$.
- (4) 三角函数: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$.
- (5) 反三角函数: $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

常用基本初等函数图形及性质(表 1-1)

表 1-1

函 数	图 形	基本性质
$y = x^2$		偶函数,关于 y 轴对称.
$y = x^3$		奇函数,关于原点对称.
$y = e^x$		单增,过点(0,1).

函 数	图 形	基本性质
$y = \ln x$		单增, 过点(1,0).
$y = \sin x$		以 2π 为周期, 奇函数; $\sin n\pi = 0$ (n 为整数).
$y = \cos x$		以 2π 为周期, 偶函数; $\cos n\pi = (-1)^n$ (n 为整数).

二、复合函数

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 如果 $\varphi(x)$ 的值域包含在 $y=f(u)$ 的定义域内, 则 y 是 x 的函数, 记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

我们称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**. 其中 u 称为**中间变量**.

对于复合函数, 不但要知道复合的过程, 也要掌握复合函数的分解.

案例 1.2 分解下列复合函数

(1) $y = e^{-x^2+1}$;

(2) $y = \ln^2(1-x^2)$.

解 (1) 函数 $y = e^{-x^2+1}$ 可分解为 $y = e^u, u = -x^2 + 1$;

(2) 函数 $y = \ln^2(1-x^2)$ 可分解为 $y = u^2, u = \ln v, v = 1-x^2$.

三、初等函数

注 由基本初等函数经过有限次四则运算或复合运算得到的能用一个式子表示的函数, 称

为初等函数.

例如 $y = x + \sqrt{1 - \sin x}$, $y = e^{-x^2+1}$, $y = \frac{x+1}{\sin x^2}$ 都是初等函数.

1.1.3 分段函数

在经济问题中,变量间的关系有时需要用几个式子来表示,这类函数称为分段函数.

案例 1.3 某运输公司规定货物的吨千米运费为:在 a 千米以内,每吨千米 k 元;超过 a 千米,超过部分每吨千米为 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运费 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意可列出分段函数如下

$$m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leq a, \\ ka + \frac{4}{5}k(s - a), & s > a. \end{cases}$$

运费与里程的函数关系就是分段函数,其定义域为 $(0, a] \cup (a, +\infty) = (0, +\infty)$.

案例 1.4 税法规定,对适用照顾税率的企业,当月(或季末)应纳税所得额适用税率按下列方法确定:计税所得额在 10 万元(不含)以上的,所得税率为 33%;计税所得额在 10 万元(含)以下,3 万元(不含)以上的,所得税率减为 27%;计税所得额在 3 万元(含)以下的,所得税率减为 18%. 试列出企业应纳税额与计税所得额间的函数关系.

解 设企业计税所得额为 x , 应纳税额为 y , 则其函数关系为

$$y = \begin{cases} 0.18x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 0.27x, & 3 < x \leq 10, \\ 0.33x, & x > 10. \end{cases}$$

很明显, y 与 x 间的函数关系为分段函数关系.

一般来说,分段函数不是初等函数.

§ 1.2 常用经济函数

1.2.1 需求函数

消费者对某种商品的需求由多种因素决定. 商品的价格是影响需求的主要因素,但还有许多其他因素,如消费者的收入的高低,其他代用品的价格等都会影响需求. 这里,我们不考虑价格以外的因素,只研究需求与价格的关系.

设 P 表示商品价格, Q 表示需求量,我们将需求量与商品价格之间的函数关系 $Q = f(P)$ 称为需求函数.

一般说来,商品价格低,需求量大;商品价格高,需求量小. 因此需求函数 $Q = f(P)$ 是单调减

函数.

因 $Q = f(P)$ 单调减少, 所以存在反函数 $P = f^{-1}(Q)$, 此反函数也称为需求函数.

常用的需求函数有如下类型:

线性函数 $Q = b - aP, a, b > 0;$

幂函数 $Q = kP^{-a}, a, k > 0;$

指数函数 $Q = ae^{-bP}, a, b > 0.$

1.2.2 供给函数

某种商品的供给量也是由多种因素决定的, 这里略去价格以外的其他因素, 只讨论供给与价格的关系.

设 P 表示商品价格, Q 表示供给量, 那么我们将 $Q = \varphi(P)$ 称为供给函数.

一般说来, 商品价格低, 生产者不愿生产, 供给少; 商品价格高, 供给多. 因此一般供给函数为单调增加函数. 因为 $Q = \varphi(P)$ 单调增加, 所以存在反函数 $P = \varphi^{-1}(Q)$, 也称为供给函数.

常用供给函数如下:

线性函数 $Q = aP - b, a, b > 0;$

幂函数 $Q = kP^a, a, k > 0;$

指数函数 $Q = ae^{bP}, a, b > 0.$

均衡价格 P_0 是市场上需求量与供给量相等时的价格, 此时需求量与供给量都为 Q_0 , 称为均衡商品量.

案例 1.5 设某商品的需求函数为 $Q = b - aP (a, b > 0)$, 供给函数为 $Q = cP - d (c, d > 0)$, 求均衡价格 P_0 .

解 在均衡价格 P_0 处, 需求量等于供给量, 即

$$b - aP_0 = cP_0 - d,$$

解得

$$P_0 = \frac{b + d}{a + c},$$

所以, 均衡价格 P_0 为 $\frac{b + d}{a + c}$.

1.2.3 成本函数

某产品的总成本是指生产一定数量的产品所需的费用(劳动力、原料、设备等)总额. 总成本可分成两类: 第一类是厂房、设备、运输工具等固定资产的折旧, 管理者的固定工资等. 这一类成本的特点是短期内不发生变化, 即不随商品量的变化而变化, 称为**固定成本**, 用 C_1 表示. 固定成本也即产量为 0 时的成本; 第二类成本是能源费用、原材料费用、劳动者的计件工资等. 这一类成本的特点是随商品产量的变化而变化, 称为**变动成本**, 用 $C_2(Q)$ 表示, 其中 Q 表示产量. 这两类成本的总和就是总成本, 用 $C(Q)$ 表示, 所以

$$C(Q) = C_1 + C_2(Q).$$

平均成本是生产一定量产品时,平均每单位产品的成本.平均成本函数为

$$\bar{C} = \bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2(Q)}{Q}.$$

案例 1.6 设某企业生产某种产品的固定成本为 10 万元,又每生产一件产品需增加成本 0.8 万元,求总成本函数及平均成本函数,并判断平均成本函数的单调性.

解 由题意知固定成本 $C_1 = 10$ 万元,变动成本 $C_2(Q) = 0.8Q$,所以总成本函数为

$$C(Q) = C_1 + C_2(Q) = 10 + 0.8Q,$$

平均成本函数

$$\bar{C} = \bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{10}{Q} + 0.8.$$

显然,这平均成本函数是单调递减的.也就是说随着产量的增加,平均成本越来越小.

1.2.4 收益函数

总收益是生产者销售一定量产品所得到的全部收入.

设 P 为商品价格, Q 为商品量, R 为总收益, \bar{R} 为平均收益,需求函数 $P = P(Q)$,则总收益函数

$$R = R(Q) = Q \cdot P(Q).$$

平均收益

$$\bar{R} = \bar{R}(Q) = \frac{R(Q)}{Q} = \frac{Q \cdot P(Q)}{Q} = P(Q).$$

案例 1.7 设某产品的价格 P (元/台)与销售量 Q (台)的关系为 $P = 10 - \frac{Q}{5}$,求销售量为 30 台时的总收益和平均收益.

解 总收益 $R(Q) = Q \cdot P(Q) = 10Q - \frac{Q^2}{5}, R(30) = 120,$

平均收益 $\bar{R}(Q) = P(Q) = 10 - \frac{Q}{5}, \bar{R}(30) = 4.$

所以销售量为 30 台时的总收益和平均收益分别为 120 元和 4 元.

1.2.5 利润函数

在产量和销量一致时,利润 L 是产量 Q 的函数.利润函数等于收益函数与成本函数之差,即

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

案例 1.8 某工厂生产某种产品,固定成本 20 000 元,每生产一单位产品,成本增加 100 元.已知产品的最大销售量为 400 单位,总收益 R 是年产量 Q 的函数

$$R = R(Q) = \begin{cases} 400Q - \frac{1}{2}Q^2, & 0 \leq Q \leq 400, \\ 80\,000, & Q > 400, \end{cases}$$

求利润函数.

解 总成本函数为

$$C = C(Q) = 20\,000 + 100Q,$$

则利润函数为

$$\begin{aligned} L = L(Q) &= R(Q) - C(Q) \\ &= \begin{cases} 300Q - \frac{Q^2}{2} - 20\,000, & 0 \leq Q \leq 400, \\ 60\,000 - 100Q, & Q > 400. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2.6 库存函数

某工厂生产某型号产品,年产量为 a 台,分若干批进行生产,每批生产准备费为 b 元. 设每批产品先存库,后均匀投入市场,且上一批用完后立即生产出下一批,即平均库存量为批量的一半. 已知每年每件产品库存费为 c 元. 显然,生产批量大则库存费高;生产批量少则批数增多,因此准备费高. 为了确定最优批量,试求出一年中库存费与生产准备费之和与批量的函数关系.

解 设批量为 x 台,库存费与生产准备费之和为 $P(x)$ 元.

因年产量为 a 台,所以每年生产的批数为 $\frac{a}{x}$,则生产准备费为 $b \cdot \frac{a}{x}$ 元.

因库存量为 $\frac{x}{2}$ 台,故库存费为 $c \cdot \frac{x}{2}$ 元,因此可得

$$P(x) = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2}x.$$

经济生活中还有许多其他的经济函数,在此不再一一叙述.

§ 1.3 极限与连续

1.3.1 极限概念与运算

极限思想是数学史上一颗璀璨的明珠,它是整个微积分的基础,有着重要的应用. 先通过下面案例分析来体会极限思想在解决实际问题中的重要作用.

案例 1.9 中国古代数学家庄周(约公元前 369—公元前 286 年)在《庄子·天下篇》中引述惠施的话:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”这句话的意思是指一尺的木棒,第一天取它的一半,即 $1/2$ 尺;第二天再取剩下的一半,即 $1/4$ 尺;第三天再取第二天剩下的一半,即 $1/8$ 尺……

我们可以一天天地取下去,而木棒是永远也取不完的.我们将每天剩余的木棒长度写出来就是:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

n 可以无穷无尽地取值,但当 n 很大时, $\frac{1}{2^n}$ 很小;当 n 无限增大时, $\frac{1}{2^n}$ 无限接近于 0,我们称当

$n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{2^n}$ 的极限为 0. 记为:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

“ ∞ ”称为无穷大量,表示绝对值无限增大的量.在 x 轴正向上的无穷大量称为正无穷大量,记为“ $+\infty$ ”;在 x 轴负向上的无穷大量称为负无穷大量,记为“ $-\infty$ ”. $n \rightarrow +\infty$ 表示变量 n 取自然数,在 x 轴正向上无限增大的变化趋势.

案例 1.10 圆周长的计算.

以前学习过正多边形周长的计算.现在通过圆内接正多边形的周长来计算圆周长.

如图 1-1,观察圆内接正多边形的周长与圆周长的关系.内接正四边形的周长记为 L_4 ,内接正六边形的周长记为 L_6 , \dots ,内接正 n 边形的周长记为 L_n $\dots\dots$,随着圆内接正多边形边数的无限增加,多边形的周长无限接近圆的周长.当多边形的边数无限增加,即 $n \rightarrow +\infty$ 时,多边形周长的

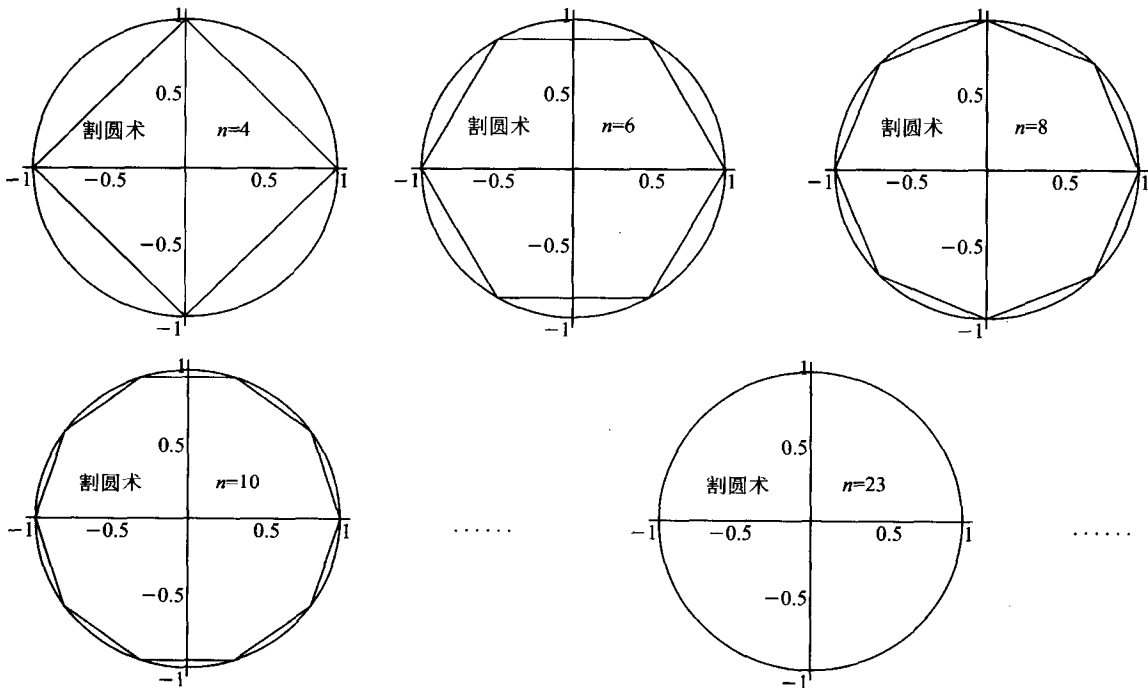


图 1-1 内接多边形与圆周长的关系