College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

概率论及试验统计学习指导与解题指南

肖枝洪　朱倩军　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

概率论及试验统计
学习指导与解题指南

大学数学学习辅导丛书

概率论及试验统计
学习指导与解题指南

肖枝洪　朱倩军　主编

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材《概率论及试验统计(第二版)》(余家林、朱倩军主编)的配套辅导教材。内容主要是对主教材的教学及学习进行指导,包括内容提要、教与学的建议、例题分析(包括部分考研题解)、释疑解惑与详细的习题解答,还有综合复习题及解答。本书问题陈述透彻,解题思路清晰,难度适中,可以帮助学生理解概念,掌握解题方法,增强学生的学习自信心,培养学生的学习能力。

本书由华中农业大学、河南农业大学及湖南农业大学合编,既可以作为农林、水产、食品、生物等专业的教学与学习辅导书,也可以作为考研复习的辅导资料。

图书在版编目(CIP)数据

概率论及试验统计学习指导与解题指南/肖枝洪,朱倩军主编. —北京:高等教育出版社,2006.7
ISBN 7-04-018687-X

Ⅰ.概… Ⅱ.①肖…②朱… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②实验统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第057761号

策划编辑 李蕊 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张楠 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 张岚 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网址**	http://www.hep.edu.cn
总机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印刷	北京地质印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开本	787×960 1/16	**版次**	2006年7月第1版
印张	15.75	**印次**	2006年7月第1次印刷
字数	290 000	**定价**	16.90元

物料号 18687-00

前　言

《概率论及试验统计(第二版)》是普通高等教育"十五"国家级规划教材。概率论及试验统计是一门应用性很强的学科,也是一门较难学习的课程。为帮助各类大学生比较顺利地进行学习、比较牢固地掌握教材中的基本概念、基本理论与基本的解题方法,并兼顾考研的需要,我们在总结多年来教学实践的经验教训与教学研究成果的基础上,编写了这本学习指导与解题指南。

本书由华中农业大学、河南农业大学与湖南农业大学合编。书中的例题既突出了所必须掌握的知识点,也尽量做到与实际应用相结合,而且解题思路清楚,分析透彻。同时指明了每节内容的基本概念、内容提要,以便帮助同学们明确概念、抓住重点、理顺思路。还注意到一些细微之处,以便帮助同学们弄清在学习中遇到的一些似是而非的问题。

另外,我们还给出了《概率论及试验统计(第二版)》中的全部习题的解答,能帮助同学们解决一些疑难问题,增强同学们学习的自信心;同时还选取了若干考研试题、具有一定代表性的例题及综合复习题,以便开阔同学们的眼界,为将来更加深入地学习打下基础。在出版之前,我们在华中农业大学进行了两轮试用,使用了的学生和老师提出了很多宝贵的建议,并认为本书有很大的参考价值。本书与教材有一定的独立性,其内容以及编排形式自成体系,也可作为其他相关的教科书的辅导书。

但在此我们要着重说明一点:同学们上课一定要认真听讲,按照指导书的要求,研读教材,搞清楚概念,仔细分析例题,独立作业,然后,再看我们的解题指南,找出自己的解题方法与习题解答的差异。否则,将不是我们所期望的。

本书由华中农业大学肖枝洪、朱倩军任主编,河南农业大学曹殿立、湖南农业大学陈立波任副主编,华中农业大学汪晓银、叶人珍、丁鹿伟、任兴龙等各位老师参加了编写及试教工作。

高等教育出版社、华中农业大学、河南农业大学及湖南农业大学在此书的编写过程中始终给予关心与帮助,特别是华中农业大学余家林教授,在此我们深表谢意!

由于编者水平有限,同学们在使用此书的过程中发现谬误时敬请指正。

编　者

2005 年于华中农业大学

目 录

第一章 随机事件的概率

§1.1 随机试验与随机事件

一、内容提要

1. 随机试验

如果一个试验具有下列特性，就称这个试验为随机试验(记为 E)：

(1) 可以在相同条件下重复地进行；

(2) 试验前，虽然知道一切可能的结果，却无法预知具体哪一个结果将出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间 Ω，其中的元素(即每一个结果)称为样本点.

3. 随机事件

由某些可能的结果组成的集合称为 E 的随机事件，通常用 $A,B,C,\cdots$ 表示. 样本空间的每个子集对应着一个事件；而把样本空间 Ω 的单点集对应的事件称为**基本事件**；由若干基本事件复合而成的事件称为**复合事件**；随机事件中必然出现的事件称为**必然事件**(与样本空间 Ω 对应)；随机事件中不可能出现的事件称为**不可能事件**(与 $\varnothing$ 对应)；在一次试验中若事件 A 中的某一个样本点出现，则称这次试验中事件 A 发生.

4. 随机事件的关系

(1) 包含与相等　$A\subset B$：若事件 A 发生$\Rightarrow$事件 B 发生，即事件 A 中的样本点包含于事件 B 中，则称 A 为 B 的子事件. $A=B$：若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$. 显然，对任意 A 有：$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2) 事件的并(和)　$A\cup B$：A 与 B 至少有一个发生；$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生；$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$：$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生.

(3) 事件的交(积)　$A\cap B$：A 与 B 同时发生；$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$：$A_1,A_2,\cdots,A_n$

同时发生;$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$:$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生.

(4) 事件的差 $A-B$:仅当 A 发生而 B 不发生.

注:若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 不相容(互斥),即 A,B 不可能同时发生. 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 对立(即 A,B 必有一个发生,且仅有一个发生),记为 $A=\overline{B}$或 $A=\Omega-B$.

5. 随机事件的运算

(1) 交换律　$A\cap B=B\cap A$;$A\cup B=B\cup A$.

(2) 结合律　$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

(4) 德摩根对偶公式　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$; $\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$.

注:因为每个事件对应着 Ω 的一个子集,所以事件的关系与运算同集合的关系与运算相当.

二、教与学的建议

1. 基本概念

随机试验,样本空间,样本点,随机事件(基本事件,复合事件,必然事件,不可能事件),事件的包含与相等,事件的并(和),事件的交(积),事件的差(补),互不相容(互斥)事件,对立事件.

2. 重点和难点

(1) 理解随机试验、样本空间和事件的定义与性质;

(2) 掌握随机事件的关系与运算.

3. 注意事项

将随机事件理解为样本空间的一个子集,则随机事件的关系及运算完全类似于集合的关系及运算,在分析随机事件的关系及运算时,利用集合的“文氏图”能直观方便地写出结果;注意对立事件、互斥事件、必然事件、不可能事件等概念的比较.

三、释疑解惑

1. 问:随机事件的“积”、“和”与数的“积”、“和”之间有何联系与区别?

答:它们都满足交换律、结合律和分配律,但它们的运算并不一致,如:

$$A\cup\cdots\cup A=A,A\cap\cdots\cap A=A;A\cup(BC)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

$$A \neq A - B \cup B = A\overline{B} \cup B = A \cup B.$$

如果混淆了二者的异同,就会出错.

2. 问:对立事件与互斥事件有何联系与区别?

答:(1) 互斥事件:指两个或多个事件互不相容,即不能同时发生. 其和不一定为必然事件.

对立事件:指两个事件的发生非此即彼,即有一个发生,必有另一个不发生. 其和为必然事件.

(2) 两事件对立⇒两事件互斥,即对立是互斥的特殊情形.

3. 问:如何将一个复杂的事件用已知的简单事件来表示?

答:(1) 要熟练掌握事件间的关系与运算.

(2) 要对具体问题与已知的简单事件的联系进行仔细分析,辨别出究竟是简单事件的积、和、差的关系还是多个关系的组合,再选择相应的运算来解题.

4. 例题分析

例 1 一批产品中有合格品和废品,从中有放回地抽取三个产品. 设 A_i 表示事件"第 i 次抽得废品",试用 A_i 的运算表示下列各个事件:

① 第一次、第二次中至少有一次抽到废品;② 只有第一次抽到废品;

③ 三次都抽到废品;④ 至少有一次抽到合格品;⑤ 只有两次抽到废品.

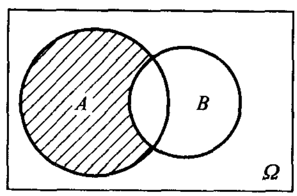
解 ①$A_1 \cup A_2$;②$A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ 或 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;③$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 或 $A_1A_2A_3$;

④$\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$或$\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$;⑤ $A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$.

例 2 设随机事件 A,B,C 满足 $C \supset AB$,$\overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$,证明 $AC = C\overline{B} \cup AB$.

证 由于$\overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$, 所以 $C \subset A \cup B$,从而 $C\overline{B} \subset (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B}$,$CA\overline{B} = C\overline{B} \cap A\overline{B} = C\overline{B}$;由 $C \supset AB$ 知 $ACB = C \cap AB = AB$. 因此,$AC = AC(B \cup \overline{B}) = AC\overline{B} \cup ACB = C\overline{B} \cup AB$.

例 3 设 A,B 为任意两个事件,则下列关系成立的是(　　).



(A) $A \cup B - B = A$;　　(B) $A \cup B - B \supset A$;

(C) $A \cup B - B \subset A$;　　(D) $(A \cup B) \cup B = A$.

解 选(C). 通过右边文氏图观察得到.

说明:① 随机事件的运算可借助于文氏图;

② 证明集合之间的关系应注意:

$$A\overline{B} = \varnothing \Leftrightarrow B \supset A \Leftrightarrow AB = A \Leftrightarrow A \cup B = B; A - B = A - AB.$$

四、习题答案

1. 例 1.1 中, 上抛的两枚硬币如果不分甲与乙, 则样本空间 $\Omega =$ ______.

解 用"H"表示"正面朝上",用"T"表示"反面朝上". 因不需区分甲、乙硬

币，故

$$\Omega=\{<H,H>,<H,T>,<T,T>\}.$$

2. 例 1.2 中，丢掷的两粒骰子如果不分“某一粒”与“另一粒”，只观察朝上的点数，则样本空间 $\Omega=$ ________.

解 用 i,j 分别表示两骰子朝上的点数，因不区分两粒骰子，故

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\},$$

即 $\Omega=\{(i,j)\mid i\leqslant j,i,j=1,2,3,4,5,6\}$.

3. 三粒同一批号的水稻种子做发芽试验，① 观察发芽种子的粒数，② 观察种子甲、乙、丙发芽或不发芽，发芽记作 F，不发芽记作 $\overline{F}$，试写出随机试验①与②的样本空间.

解 ① $\Omega=\{0,1,2,3\}$.

② $\Omega=\{FFF,FF\overline{F},F\overline{F}F,\overline{F}FF,F\overline{F}\overline{F},\overline{F}F\overline{F},\overline{F}\overline{F}F,\overline{F}\overline{F}\overline{F}\}$

注 区分甲、乙、丙.

4. 袋中装有三粒弹子，一红一绿一白，① 从中任取一粒放在桌上，再任取一粒；② 从中任取一粒，看过颜色后，将它放回袋中，再任取一粒。试根据取出的两粒弹子的颜色，不考虑先后，写出随机试验①与②的样本空间.

解 ① 因不考虑先后且取后不放回，故 $\Omega=\{$1 红 1 绿，1 红 1 白，1 绿 1 白$\}$；

② 因不考虑先后且取后放回，故 $\Omega=\{$2 红，2 绿，2 白，1 红 1 绿，1 红 1 白，1 绿 1 白$\}$.

5. 某棉麦连作地区，因受气候条件的影响，棉花、小麦都可能减产，如果记 $A=\{$棉花减产$\}$，$B=\{$小麦减产$\}$，试用 A,B 表示事件：① 棉花、小麦都减产；② 棉花减产，小麦不减产；③ 棉花、小麦至少有一样减产；④ 棉花、小麦至少有一样不减产.

解 ① AB；② $A\overline{B}$；③ $A\cup B$；④ $\overline{A}\cup\overline{B}$.

6. 调查甲、乙、丙收看某电视剧的情况，如果记 $A=\{$甲收看$\}$，$B=\{$乙收看$\}$，$C=\{$丙收看$\}$，试用 A,B,C 表示事件：① 甲收看，乙收看，丙未收看；② 甲、乙、丙之中有一人未收看；③ 甲、乙、丙之中有两人未收看；④ 甲、乙、丙至少有一人未收看.

解 ① $AB\overline{C}$；② $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$；③ $\overline{A}\overline{B}C+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}$；④ $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

7. 试说明下列事件两两之间是否有包含、相容、不相容或对立关系；

① $A\cup B\cup C$；② ABC；③ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；④ $\overline{ABC}$.

解 ① $A\cup B\cup C$ 表示 A、B、C 至少有一个发生，② ABC 表示 A、B、C 三个都

发生；③ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$表示 A、B、C 三个都不发生，④ $\overline{ABC}$表示 A、B、C 三个不都发生.
所以①⊃②；①与③对立；①与④相容；②与③不相容；②与④对立；③⊂④.

8. 在电炉上安装了四个温控器，所显示的温度误差是随机的. 在使用的过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就要断电. 若事件 $E=\{$电炉断电$\}$，而 $T_4 \geqslant T_3 \geqslant T_2 \geqslant T_1$ 为四个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 与[ ]等价.

(A) $\{T_1 \geqslant t_0\}$；　(B) $\{T_2 \geqslant t_0\}$；　(C) $\{T_3 \geqslant t_0\}$；　(D) $\{T_4 \geqslant t_0\}$.

解 因 $E=\{$两个温控器显示的温度不低于临界温度 $t_0\}$，而当 $T_3 \geqslant t_0$ 时 $T_4 \geqslant T_3 \geqslant t_0$. 故

$$E=\{T_3 \geqslant t_0\}.$$

9. 在某系的学生中任选一人，设 $A=\{$他是男学生$\}$，$B=\{$他是一年级学生$\}$，$C=\{$他是田径运动员$\}$，试说明：① 事件 $AB\bar{C}$的意义；② 事件$\overline{ABC}$的意义；③ 事件$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$的意义；④ 事件 $ABC=C$ 的条件.

解 ① $AB\bar{C}=\{$他是男生，是一年级学生，但不是田径运动员$\}$；

② $\overline{ABC}=\{$他至少具备：不是男生，不是一年级学生，不是田径运动员三条件之一$\}$；

③ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\{$他不是男生，不是一年级学生，不是田径运动员$\}$；

④ $ABC=C \Rightarrow AB \supseteq C$，即 $C=\{$他是田径运动员$\} \subset \{$他是一年级男生$\}$，即田径运动员都是一年级的男生.

10. 已知事件 A 与 B，试用较为简单的方式表示下列事件：

① $AB \cup \bar{A}B$；② $A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B$；③ $(A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup \bar{B})$；④ $(A \cup B)(A-B)$.

解 ① B. 因为 $AB \cup \bar{A}B=(A \cup \bar{A})B=B$；

② $\bar{A} \cup \bar{B}$. 因为　$A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B=\Omega-AB=\overline{AB}=\bar{A} \cup \bar{B}$

③ $\bar{B}$. 因为$(A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup \bar{B})=(A \cap \bar{A}) \cup \bar{B}=\varnothing \cup \bar{B}=\bar{B}$；

④ $A\bar{B}$. 由 $A\bar{B} \subset A \subset (A \cup B)$，知$(A \cup B)(A-B)=(A \cup B)(A\bar{B})=A\bar{B}$.

§1.2 随机事件的概率

一、内容提要

1. 经验概率

在给定条件下进行重复试验，如果事件 A 在 n 次试验中出现了 r 次，则称 r 为事件 A 出现的频数，称$\dfrac{r}{n}$为事件 A 出现的频率，记作 $\omega(A)$，即 $\omega(A)=\dfrac{r}{n}$. 当 n 充分大时，$\omega(A)$接近于区间$[0,1]$中的某个数字 p，则定义事件 A 的概率 $P(A)$

$=p.$

2. 古典概率

若试验满足：

(1) 样本空间中基本事件数有限；

(2) 各基本事件出现的可能性相等，则称这样的随机事件的概率为古典概率. 公式为

$$P(A)=\frac{r(A)}{n(\Omega)},$$

其中 $r(A)$ 为事件 A 中包含的基本事件个数，$n(\Omega)$ 为 Ω 中包含的 n 个基本事件.

3. 几何概率

若试验满足：

(1) 样本空间中基本事件有无限个；

(2) 各基本事件出现的可能性相同(将各基本事件看作某区域 G 中的一个点)，

令 $A=\{$在 G 中任取一点恰好在 G 的子区域 g 内$\}$，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{M(g)}{M(G)},$$

其中 $M(g)$ 为 A 对应区域的长度、面积或体积，$M(G)$ 为样本空间 G 对应区域的长度、面积或体积.

4. 概率的公理化定义：

设 E 为随机试验，Ω 为其样本空间，对于 Ω 中的一些事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，若满足：

(1) 非负性　即 $\forall A, 0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性　即 $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$；

(3) 可加性　即 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$，当 $A_iA_j=\varnothing; i\neq j; i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$.

注：当样本空间 Ω 的全部元素是有限个或可排成一个无穷序列时通常对 Ω 的每个子集定义 $P(A)$，当 Ω 是其他类型的无穷集时则不必要求对 Ω 的每个子集都定义 $P(A)$.

二、教与学的建议

1. 基本概念

经验概率，古典概率，几何概率，概率公理化定义.

2. 重点和难点

(1) 理解概率的各种定义,掌握概率的基本性质;

(2) 能熟练计算古典概率和几何概率.

3. 注意事项

(1) 正确理解题意,选择合适的概率模型进行计算;

(2) 对古典概率的计算,要根据题意,利用排列与组合的公式正确计算样本空间和事件所含基本事件的个数;

(3) 注意区分"有放回试验"与"无放回试验"两种情形;

(4) 用古典概率或几何概率的定义计算时,必须要求基本事件等可能发生.

三、释疑解惑

1. 问:按古典概率的定义如何计算事件的概率?

答:按古典概率的定义计算随机事件 A 的概率,必须正确计算样本空间 Ω 及 A 所包含的基本事件数,通常要用到加法原理(分类)、乘法原理(分步)、排列、组合等知识.注意区分何时用排列,何时用组合,考虑是否与顺序有关.

2. 问:按几何概率的定义如何解题?

答:根据问题的实际意义将各个基本事件看作是某个区间或区域中的一个点,将各个基本事件出现的可能性相等,理解为在 Ω 中的任一小区间或区域 Ω 内任取一点的可能性只与 Ω 的长度(或面积或体积)成正比,与 Ω 的形状及位置无关,计算 A 和 Ω 所对应的图形的长度(或面积或体积),最后用公式计算 $P(A)$.

3. 例题分析

例 1(古典概型) 有 r 个球,随机地放在 n 个盒子中($r\leqslant n$),试求下列各事件的概率:

① 某指定的 r 个盒子中各有一球;

② 恰有 r 个盒子,其中各有一球;

③ 某指定的一个盒子中,恰有 k 个球.

解 基本事件空间 Ω 为 r 个球放入 n 个盒子里的所有放法,共有 n^r 种.设随机事件 A 为指定的 r 个盒子中各有一球的所有放法,共有 $r!$ 种;随机事件 B 为恰有 r 个盒子,其中各有一球的所有放法,共有 $\mathrm{C}_n^r\cdot r!$ 种,随机事件 C 为某指定的一个盒子中,恰有 k 个球的所有放法,共有 $\mathrm{C}_r^k\cdot(n-1)^{r-k}$种,则

$$P(A)=\frac{r!}{n^r},\quad P(B)=\frac{\mathrm{C}_n^r\cdot r!}{n^r},\quad P(C)=\frac{\mathrm{C}_r^k\cdot(n-1)^{r-k}}{n^r}.$$

例 2 某个班 27 人,女生 6 人,从班上任选 8 名干部,求这 8 名干部里有 3 名女生的概率.

解 基本事件空间 $\Omega=\{$从班上任选 8 名干部的各种选法$\}$,$A=\{$8 名干部

里有 3 名女生的选法},则：

$$P(A)=\frac{C_6^3C_{21}^5}{C_{27}^8}.$$

例 3(袋中取物)　袋中装有 5 个红球,3 个白球,分取后不放回和取后放回两种情况,求：

① 从中任取三球,计算取得两个红球和一个白球的概率；

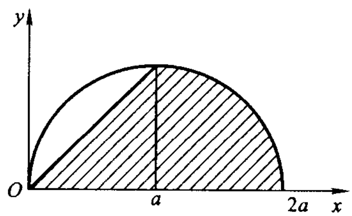
② 从中取球三次,每次取一球,计算取得两个红球和一个白球的概率.

解　取后不放回 ① $p_1=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$；　② $p_2=\frac{C_3^1\times C_5^1C_4^1C_3^1}{C_8^1C_7^1C_6^1}=\frac{15}{28}$.

取后放回 ① $p_1=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$；　② $p_2=\frac{C_3^1\times C_5^1C_5^1C_3^1}{C_8^1C_8^1C_8^1}=C_3^1\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)$.

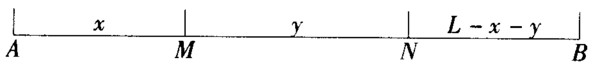
例 4(填空题)　随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a 为常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为________.

解　如右图所示,样本空间 Ω 是上半圆,其面积为$\frac{\pi}{2}a^2$,而事件 A 即点坐标落在区域 G(阴影部分)内,其面积为$\frac{\pi}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2$;故



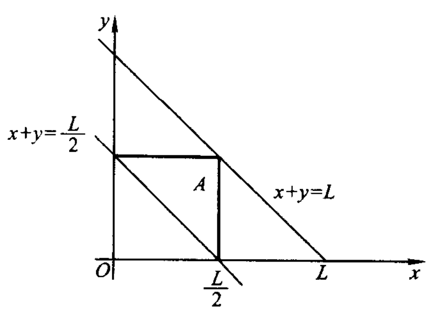
$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{\pi}{4}a^2}{\frac{\pi}{2}a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

例 5(几何概型)　在线段 AB 上,任取两点 M,N,在 M,N 处折断成三条线段,求这三条线段能构成三角形的概率.



解　如图所示:其中 L 为线段 AB 的长. 设 $|AM|=x,|MN|=y$,则 $|NB|=L-x-y$. 记 $A=\{$三条线段能构成三角形$\}$,则依题意有:基本空间 Ω 为点域(x,y)：

$0<x<1,0<y<1,0<x+y<L.$



事件A 为点域(x,y)：$\begin{cases}x+y>L-x-y,\\x+L-x-y>y,\\y+L-x-y>x,\end{cases}$

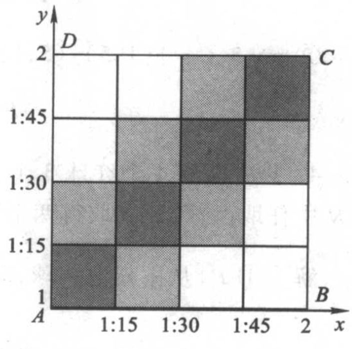
即点域 $$(x,y):\begin{cases}x+y>\dfrac{L}{2},\\ y<\dfrac{L}{2},\\ x<\dfrac{L}{2}.\end{cases}$$

如图，两平面区域的测度为面积 $S(A)$ 和 $S(\Omega)$，故

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{L}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}\times L^2}=\frac{1}{4}.$$

例 6 甲乙两人约定在下午 1 点到 2 点之间到某站乘公共汽车，假定他们两人到达车站的时刻是互相独立的，且每人在 1 点到 2 点的任何时刻到达车站是等可能的. 在这段时间内共有 4 班公共汽车，它们的开车时刻分别为 1:15，1:30，1:45，2:00，如果他们约定① 见车就乘；② 最多等一辆车，求甲乙同乘一辆车的概率.

解 4 辆车开车的时刻将 1 点至 2 点区间分为 4 等分。x 轴表示甲到站的时刻，y 轴表示乙到站的时刻，于是他们到站的时刻组成了数组 (x,y). 甲乙两人到站时刻组成的数组的所有可能情形对应正方形 $ABCD$，共 16 个方格，如图所示：



① 见车就乘的情形，这时组成双重阴影部分，占四个方格，所以所求概率为：

$$p=\frac{4\text{ 个方格的面积}}{16\text{ 个方格的面积}}=\frac{1}{4};$$

② 最多等一辆车的情形，这时组成了阴影部分（包括双重阴影部分），占 10 个方格，所以所求概率为：

$$p=\frac{10\text{ 个方格的面积}}{16\text{ 个方格的面积}}=\frac{5}{8}.$$

说明：注意如何把问题转化为几何概型，通常步骤：依题意作图⇒再计算长度（面积或体积）⇒最后求概率.

四、习题 1.2 解答

1. 可上抛一枚硬币来决定乒乓球比赛的先发球权，方法是选手分别猜{正面朝上}或{反面朝上}，根据上抛硬币的结果，猜中的选手先发球，试说明此方法的公平性.

解 因 $P\{$正面朝上$\}=P\{$反面朝上$\}=0.5$,故此方法公平.

2. 上抛两枚硬币,若 $A=\{$有两枚正面朝上$\}$,$B=\{$有一枚正面朝上$\}$,$C=\{$至少有一枚正面朝上$\}$,则 $P(A)=$______,$P(B)=$______,$P(C)=$______.

解 区分两硬币,因 $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$,$n=4$,而 $r(A)=1$,$r(B)=2$, $r(C)=3$,故

$$P(A)=\frac{r(A)}{n}=0.25,\ P(B)=\frac{r(B)}{n}=0.5,\ P(C)=\frac{r(C)}{n}=0.75.$$

3. 丢掷两粒骰子,若 $A=\{$朝上的点数之和是6$\}$,$B=\{$朝上的点数之和是6并且有一粒的点数超过3$\}$,$C=\{$已知朝上的点数之和是6,在此条件下有一粒点数超过3$\}$,试求 $P(A)$,$P(B)$与 $P(C)$.

注意:求 $P(A)$,$P(B)$与 $P(C)$时,基本事件的总数应该有所不同.

解 ① 区分两粒骰子,$n=6\times6$. $A=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$,则 $r(A)=5$,

$$P(A)=\frac{r(A)}{n}=\frac{5}{36};$$

又 $B=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2)\}$,则 $r(B)=4$,

$$P(B)=\frac{r(B)}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};$$

② $n=5$,$C=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2)\}$,则 $r(C)=4$,

$$P(C)=\frac{r(C)}{n}=\frac{4}{5}.$$

4. 袋中装有4个红球3个白球,① 从中任取一球,计算取得红球的概率;②从中任取两球,计算取得两个红球的概率.

解 ① $P\{$从中任取一球,取得红球$\}=\dfrac{C_4^1}{C_7^1}=\dfrac{4}{7}$;

② $P\{$从中任取两球,取得两红球$\}=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}=\dfrac{2}{7}$.

5. 袋中装有4个红球3个白球,如果用取后放回的方法,每次取一个球,共取两次,试计算:① 第二次取出红球的概率;② 两次都取出红球的概率.

解 取后放回,基本事件个数为:$n=7\times7$.

① $P\{$第二次取得红球$\}=\dfrac{7\times4}{7\times7}=\dfrac{4}{7}$; ② $P\{$两次都取得红球$\}=\dfrac{4\times4}{7\times7}=\dfrac{16}{49}$.

6. 从52张的扑克牌中任取4张,试计算:① 4张中有1张A的概率;② 4张中有2张A的概率;③ 4张中有3张A的概率;④ 4张都是A的概率.

解 基本空间 $\Omega=\{$从52张扑克牌中任取4张的所有取法$\}$, $n=C_{52}^4$.