普通高等教育规划教材

运筹学

孔造杰　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

022
94

普通高等教育规划教材

运筹学

主　编　孔造杰
参　编　苑清敏　赵文燕

机械工业出版社

本书是基于高等院校管理类、经济类与工程技术类专业的教学需要编写的，编写的逻辑与方式符合教学的要求，编写的内容兼顾理论基础和实际应用。本书主要内容包括线性规划、整数规划、运输问题、目标规划、动态规划、图与网络优化、网络计划技术、存储论、排队论、决策论等，每章后面都配有与教学内容对应的习题，书末有习题参考答案及提示。在相关章节详细介绍了 Excel 在优化中的应用。

本书主要适用于高等院校管理类、经济类和工程技术类等相关专业的本科生、研究生以及工程硕士的教学用书，也可供实际管理工作者和技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/孔造杰主编．—北京：机械工业出版社，2006.8

普通高等教育规划教材

ISBN 7-111-19409-8

Ⅰ．运…　Ⅱ．孔…　Ⅲ．运筹学-高等学校-教材　Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 067558 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：曹俊玲　版式设计：张世琴　责任校对：张莉娟

封面设计：鞠　杨　责任印制：洪汉军

北京京丰印刷厂印刷

2006 年 8 月第 1 版・第 1 次印刷

169mm×239mm・9.875 印张・382 千字

定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68326294

编辑热线电话（010）88379718

封面无防伪标均为盗版

前　　言

运筹学是研究优化理论的一门学科，是管理科学的基本理论与方法。它广泛应用于工业、农业、军事国防、交通运输、政府机关、网络通信、工程建设以及商业营销等领域。它主要研究最优资源分配问题、最低成本产出问题、网络优化问题、最佳配送问题等诸多方面的内容。它是根据实际问题的特征抽象出不同类型的优化模型，再进行分析求解的一系列方法体系。

随着管理科学的发展，优化理论也在不断地丰富和扩展。但是，基础的经典理论与方法仍然是这一领域应用最为广泛的部分，是运筹学最为重要的构成部分，也是理论与方法体系最为完整的部分。因此，本书从大学本科以及研究生教学的实际需要出发，编排了运筹学最为基础的也是最为核心的内容，主要包括线性规划、整数规划、运输规划、目标规划、动态规划、图与网络优化、网络计划技术、排队论、存储论、决策论等内容。这些内容涵盖了运筹学的大部分，是运筹学中最为基础且广为应用的主体内容。

本书的编写是面向教学的，充分考虑了学生学习这门课程的思维逻辑，在阐述基本概念与基本理论时，力求清晰、透彻、直观；对基本定理都给出了详细证明，使读者不仅知其然，而且知其所以然；对于每一类规划模型在讲清思路的同时，对相关算法也都进行了详细的推导。另外，所有编者都有十几年运筹学的教学经验，在章节的安排及内容的选取上都作了精心的考虑，学生可以比较容易地理解算法的原理，掌握算法的基本步骤，并学会如何应用这些算法。

本书的编写是面向应用和实际的，每一个规划模型都是从实际问题引出，通过对实例的分析，列出该问题的优化模型，再详细讲解求解的思路和方法，并配有大量的实例分析。读者可以参照这些实例学习到根据实际问题建立相应的数学规划模型的方法和技巧。在每章后面都配有与教学内容对应的适量习题，并在书末给出了参考答案和必要提示。这些习题对于读者掌握这些知识起着至关重要的作用，并为自学这门课程提供了帮助。

本书的编写是面向求解方法的，在每一类规划模型中不仅详细讲解了其求解的一般方法与步骤，而且从实际应用的角度出发在相关章节详细讲解了用 Excel 软件进行优化求解的方法。之所以选择 Excel 软件，不仅因为其方便性，而且因

为其实用性，应用 Excel 的规划求解命令及相应的挂接软件包几乎可以解决优化模型的绝大部分求解问题。

本书由河北工业大学孔造杰担任主编。具体编写分工如下：第一章、第二章、第三章、第四章、第七章和第九章由孔造杰编写；第八章、第十一章、第十二章和第十三章由天津理工大学苑清敏编写；第五章、第六章和第十章由河北工业大学赵文燕编写。在本书的编写过程中，作者从许多国内外同行专家、学者的著作中汲取了丰富的营养，获益匪浅，在此对这些专家学者表示诚挚的感谢和敬意。

由于作者才疏学浅，水平有限，加之成书时间仓促，本书的缺点和谬误之处在所难免，敬请专家、学者及读者不吝指教。

编 者

2006 年 4 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

绪　论

管理是在生产发展的基础上提出来，并随着生产的进一步发展而不断完善和提高。社会经济的发展和生产规模的不断扩大，需要众多的人共同完成一项活动或工程，也需要更多资源的投入。如何充分利用各种资源，使之发挥最大的效用，取得最好的效果，是管理者的责任和任务，也是管理者必须掌握的基本技能。这里所说的资源包括经济活动和企业生产赖以进行的人力、物力、财力与时间等各种物质和非物质的资源。运筹学正是帮助管理者掌握这门技能，充分利用这些资源，并就实际问题作出正确决策的有效手段。

一、运筹学及其性质

运筹学是一门系统优化学科，是使系统的各种资源充分发挥效能的学科，是选择问题最优解决方案的学科。运筹学的英文名称是 Operations Research（简称 O.R.），直译为“作业研究”。在我国“运筹”这个名词很早就有，其基本含义就是制定策略、筹划、决策。据《汉记·高祖本纪》记载，汉高祖刘邦曾经说过：“夫运筹帷幄之中，决胜千里之外，吾不如子房（张良）。”这里说的是用兵打仗，后人则因此以“运筹帷幄”指在后方决定作战策略，也泛指筹划决策，这一点恰好同运筹学这门学科的起源及其内涵不谋而合，所以将 Operations Research 译为运筹学，比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。

运筹学在不同人的笔下有过许多的定义。世界上第一本运筹学的作者莫斯（P.M.Morse）和凯波尔（G.E. Kimball）给出的定义是：运筹学是为决策机构对所控制的业务活动作决策时，提供以数量为基础的科学方法。世界上第一个运筹学学术组织——英国运筹学俱乐部给出的定义是：运筹学是把科学方法应用在指导人员、工商企业、政府和国防等方面解决发生的各种问题，其方法是发展一个科学的系统模式，并运用这种模式预测、比较各种决策及其产生的后果，以帮助主管人员科学地决定工作方针和政策。《中国企业管理百科全书》（1984 年版）给出的定义是：运筹学是应用分析、试验、量化的方法对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。

概括上述定义的精髓和核心思想，运筹学是一门边缘性的、综合性的应用科学，它是以应用数学为主要技术手段，综合应用经济、军事、心理学、社会学、物理学、化学以及工农业生产的一些理论和方法，对实际问题找出最优的或满意的解决方案的一门科学。

二、运筹学发展简史

运筹学是起源于20世纪30年代，由于当时军事上的需要而产生与发展起来的一门边缘性交叉学科。在当时的战争态势中，英美的军事力量特别是空军力量与德国比较处于相对劣势，如何调动一切可以调动的力量，如何充分利用有限的战争资源是摆在英美最高领导机构的重要课题。为此，英美最高领导机构召集相关领域的专家学者就有关实际问题展开研究，如为对付德国的空袭如何布置其雷达防空系统问题，为防止德国潜艇对运送物资船队的攻击而面临的护航舰队如何编队问题，为对付德国潜艇的攻击研究反潜深水炸弹的合理爆炸深度问题，以及空军飞行员的编组问题，军事物资的存储问题等等。当时，这些研究工作有一个统一的名称——Operational Research，即“作业研究”。这些研究充分利用了当时飞速发展的线性代数、概率数理统计等领域的知识以及工程领域的各种原理和方法，并在战后逐步形成了具有鲜明特色的相对独立的新学科，并从军事领域逐步扩展到工业生产和经济活动中来。概括运筹学的发展历程大致可以分为以下三个时期：

(1) 创立时期，20世纪40年代。在战争中研究和发展的一些优化方法构成了运筹学的雏形，战后这些方法进一步得到发展并扩展至经济领域和工业生产过程，逐步形成具有鲜明特色的新学科。但是，这一时期涉及的人数很少，应用的领域和范围较小，学术组织和出版物形只影单。1947年丹捷尔提出了求解线性规划的单纯形方法。1948年英国第一个成立了运筹学的学术组织——“运筹学俱乐部”，并在煤炭、电力等部门推广运筹学的应用，取得了一定的进展。1948年美国麻省理工学院第一次把运筹学作为一门学科介绍。1950年英国伯明翰大学正式开设了运筹学课程。所有这些都促进了运筹学作为一门独立学科的产生。

(2) 成长时期，20世纪50年代。这一时期运筹学的理论得到了迅速发展，特别是计算机技术的产生与发展，促进了运筹学更为广泛的推广和应用。相应的学术组织和学术期刊也如雨后春笋般不断涌现。1950年第一本运筹学杂志《运筹学季刊》（O.R.Quarterly）在英国创刊。1952年美国运筹学学会成立，并于同年出版运筹学月刊（Journal of ORSA）。从1956年到1959年，法国、印度、日本、荷兰、比利时等十个国家先后成立了运筹学学会，并有6种运筹学刊物出版问世。1957年在英国牛津大学召开了世界上第一次国际运筹学会议。1959年成立了国际运筹学联合会（IFORS——The International Federation of Operations Research Societies）。

(3) 成熟时期，20世纪60年代一直到现在。这一时期的特点是：运筹学的经典内容理论上已经完善成熟，主体内容细分分支已经明朗，应用实践进入了广为普及阶段，专业学术团体迅速增多，学术期刊的创办更多，运筹学书籍出版的

更多，更多的学校将运筹学纳入到教学计划中。特别是计算机科学的普及，极大地促进了运筹学的广为应用，使运筹学解决一些大型的复杂系统问题成为可能，如国民经济计划问题、城市交通规划问题、环境污染问题、大型综合性项目的计划控制问题等等。随着运筹学在工业、农业、经济和社会系统等领域越来越广泛的应用，也促进了其自身的飞速发展，到60年代末形成了比较完整的理论体系。

运筹学在我国的发展是在20世纪50年代中期。虽然朴素的运筹学思想在我国古代文献中就有不少记载（如丁渭主持皇宫的修复——故事发生在北宋时期，皇宫被大火焚毁，由丁渭主持修复工程，他让人在修建宫殿前的大街上取土烧砖，取土后的大沟灌水成渠，用水渠运送各种建筑材料，工程完工后再以废砖烂瓦填沟修复大街，做到了减少运输和方便运输，工程各个环节协调一致，缩短了工期），也有人们津津乐道的典故（如齐王赛马——有一次齐王要与大将田忌赛马，规定双方在各自的上中下三个等级的马中各出一匹马进行比赛，如果按同等级的马进行对阵，由于齐王的马好于田忌的马，齐王肯定会获全胜。这时，田忌的谋事孙膑出主意，以下等马对齐王的上等马，以上等马对齐王的中等马，以中等马对齐王的下等马，结果田忌反以二比一获胜），但运筹学在我国成为一个系统学科是在20世纪50年代。在50年代，早期回国的一些科学家钱学森、华罗庚、许国志等人将运筹学的方法由西方引入我国，并结合我国的特定情况在国内推广应用。在这方面华罗庚教授做了大量基础性的工作，出版了一批推广应用优化方法的书籍，并吸引一大批专家学者加入到这一领域的研究与应用队伍中，在许多方面使运筹学的各分支很快赶上当时的国际水平。

三、运筹学的主体内容

运筹学的主体内容包括以下分支：

1. 数学规划论

这是一类通过特定的数学模型来刻画和描述实际问题的优化理论。按照数学模型的特点、要求和表达方式的不同，数学规划可以分为：线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、目标规划等内容。这类规划的数学模型的共同特征是，由反映问题目标要求的数学式和反映客观限制的约束条件数学方程所构成，使得在满足约束条件限制之下的目标数学式达到最优结果。

2. 图论与网络理论

它主要包括最短路问题、最大流问题、最小树问题以及网络计划技术。这些内容是图论与优化理论相结合的结晶，对于解决社会和工程实际问题起到极大的帮助，其中有些方法和技术已经成为工程实际中不可或缺的工具，网络计划技术就是其中典型的代表。

3. 随机优化理论

它主要包括排队论、存储论、决策论和对策论，它们主要是研究在随机环境

中管理决策的优化问题。其中排队论研究随机服务理论与模型，解决具有排队现象的服务系统的效率与顾客满意度的平衡问题；存储论研究在确定和随机条件下的存储策略问题，以实现存储过程费用最低的目标；决策论则是研究决策的程序与方法，探讨应对各种可能自然状态情况下的有效策略；对策论又名博弈论，它研究人类在竞争环境下的决策优化问题。

4. 系统仿真与模拟

它是通过反复大量试验的方式模拟各种可能出现的情况与状态，统计分析并比较其对应的结果，寻找满意结果所对应状态的一系列方法体系，主要包括随机模拟技术与方法、系统动力学等内容。

除了上述四个类别的优化理论外，还有一些边缘性的理论在一定程度上也属于运筹学范畴，如模型论、系统可靠性与维修性、系统的可用性等等。

四、运筹学的基本特点

运筹学作为一门学科所表现出来的基本特点是：系统整体优化、多学科体系交叉配合和模型模拟方法的应用。

1. 系统整体优化是运筹学的根本

无论是军事、社会还是企业经营、工程活动都是有许多子系统构成的一个整体，系统内各个部分之间是相互联系、相互制约的。运筹学方法的目标是实现系统整体优化，而并非系统中某一部分或每一部分都达到最优，它是把相互影响和制约的各个方面作为一个统一体，从总体效果的观点出发寻找出一个优化协调的解决方案。

2. 多学科交叉配合是运筹学边缘性和综合性学科特性的体现

虽然运筹学是一门应用于管理决策和系统优化领域的应用数学，但它必须与社会、经济、管理、科学技术和工程领域的知识相结合。多学科的协调配合是分析问题和解决问题的基本要求，解决实际问题也需要不同领域专家的协调配合，来自不同学科领域的专家具有不同的经验和技能，对于分析问题和解决问题无疑会相互促进和弥补缺失。

3. 模型（模拟）方法是优化理论的基本方法

针对研究的系统建立问题的数学模型或模拟模型，围绕数学模型的建立、修正、求解、分析与应用展开研究，或者通过模拟技术与方法寻求解决问题的优化方法。

五、运筹学的工作步骤

运筹学是一门用于解决实际问题的应用学科，明晰其工作步骤是至关重要的。按照应用运筹学解决实际问题的过程，可以将其工作步骤分为：明确问题、建立模型、设计算法、整理数据、求解模型、评价结果和实施控制。其基本流程如图 0-1 所示。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1. 提出和形成问题

这是指针对具体的实际问题，弄清其性质、目标和条件，掌握客观约束、各种参数以及有关资料。这一步骤需要明晰系统边界，突出主要矛盾。

2. 建立模型

建立模型的过程是一种创造性的劳动过程，它就是把实际问题中的决策变量、参数和约束条件用一定的数学模型表达出来的过程。建立数学模型不仅需要运筹学的知识和能力，也需要相关的经济、科技与工程领域的基本知识。

3. 求解模型

它是指运用各种技术手段，特别是数学手段，求得所建模型的最优解和满意解的过程。复杂的模型求解通常需要借助计算机来完成。

4. 解的检验、实施和控制

通过一定的手段和相关领域的知识，分析和判断所求得的模型的解是否符合于客观实际和解决问题的需要，将所得的优化解决方案加以实施的过程也必然需要相应的控制手段，以排除一些不可预见的因素对系统的影响，确保沿着正确的方向实施最优方案。

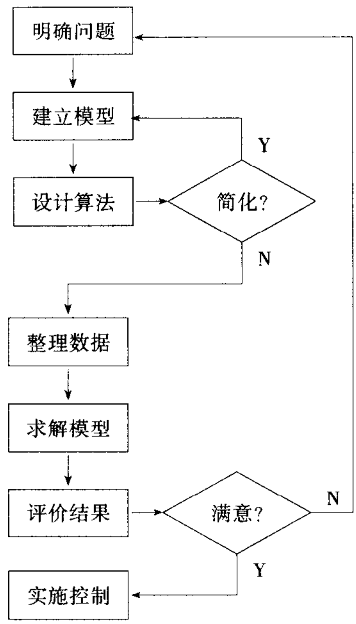

图　0-1

六、运筹学的主要应用领域

正如运筹学产生与发展的过程一样，运筹学在早期主要应用于军事科学，随着其发展和社会、经济、技术的不断进步，现在运筹学除了应用于军事领域外，还广泛应用于社会经济、企业管理与经营、科学技术等领域。

(1) 社会经济领域。如财政金融、工业经济、农业经济、城市建设、统计与规划等。

(2) 企业管理与经营。如市场销售、生产组织、库存管理、运输问题、人事管理、项目的选择与评价、设备的维修与更新等。

(3) 科学技术领域。如工程的优化设计与施工组织，产品的可靠性设计与质量控制，计算机和信息系统领域，其他技术科学领域。

第一章　线性规划基础

线性规划是优化理论最基础的部分，也是运筹学最核心的内容之一。线性规划单纯形求解方法的提出，使得线性规划的方法和理论趋于完善，并极大地促进了线性规划在经济与管理等领域的广泛应用。本章主要介绍线性规划的基础理论，包括线性规划模型的建立、图解、标准型及其解的概念，以及线性规划基本理论和基本定理。

第一节　线性规划的提出与模型

一、问题的提出

【例 1-1】 某工厂在计划期内要安排生产甲、乙两种产品，这两种产品消耗同一种原材料并分别在 A、B 设备上加工。按工艺要求，产品甲、乙在设备 A、B 上所需的加工台时及原材料消耗如表 1-1 所示。已知设备 A、B 在计划期内有效台时分别是 16 和 12，原材料总量为 8 个单位，该工厂每生产一件产品甲、乙可分别获得利润 3 千元、4 千元。问应如何安排生产计划才能得到最大利润?

表 1-1　例 1-1 数据资料

资源 产品	原材料 /单位	设备 A/h	设备 B/h	单件利润 /千元
甲	1	4	0	3
乙	2	0	4	4
资源数量	8	16	12	

此例的问题用数学语言描述为：

假设 x_1、x_2 分别表示在计划期内产品甲、乙的产量，则该企业的目标为利润 z 最大：

$$z = 3x_1 + 4x_2$$

这个方程表达了实际问题所追求的目标，因此称之为问题的目标方程。在此方程中，利润 z 是产量 x_1，x_2 的单增函数，x_1、x_2 越大，利润 z 就越大。但是，由于受到有限资源的限制（此题中为原材料数量和设备台时的限制），x_1、x_2 不可能任意增大，它要受到资源量的制约。比如，对于原材料而言，其总的拥有量为 8 个单位，生产产品甲乙所消耗的该原料的数量不能超过 8 个单位，即

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$$

称此表达式为约束条件。同样地，对于设备资源 A、B 而言，我们可以得到约束条件：

$$4x_1 \leqslant 16$$

$$4x_2 \leqslant 12$$

在这两个约束表达式中，不等号的左端为实际消耗量，右端是实际拥有量。就此实际问题而言，除了原材料和设备有效台时的限制条件之外，还有一个隐含的限制，那就是产量 x_1、x_2 都必须大于等于零。

综上所述，得到该问题的数学模型如下：

$$\max\ z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \qquad \leqslant 16 \\ \qquad 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

我们称此数学模型为规划模型。由于模型中的目标方程和约束条件都是一次式，故称为线性规划模型。模型中符号 max 是英文 maximize 的简写，表示求目标方程的最大值，符号 s.t. 是英文 subject to 的简写，表示对模型变量的约束。例 1-1的问题就是要求出满足这些约束条件并使得目标函数达到最大的 x_1、x_2 的取值。

【例 1-2】 下料问题。某种设备的制造需要用甲、乙、丙三种规格的轴各一根，这些轴的长度规格分别是 2.9m、2.1m 和 1.5m，由于这些轴的直径相同，所以用同一种圆钢作原料，圆钢料的长度为 7.4m。现在要制造 100 台这种设备，问最少要用多少根圆钢来生产这些轴？

【分析】 从一根长 7.4m 的圆钢棒料上切割出三种不同长度的轴有许多种不同的切割方法。按照通常的思维模式从长到短进行切割，例如在一根棒料上切 2.9m 长的轴 2 根，剩下 1.6m 只能再切 1.5m 长的轴 1 根，剩余料头 0.1m。列出所有可能的切割方案，如表 1-2 所示。

表 1-2　例 1-2 的切割方案

规格＼方案	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9m	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1m	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5m	1	0	1	3	0	2	3	4
合计/m	7.3	7.1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6	6.0
剩余料头/m	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

根据要求，要生产 100 台设备需要甲、乙、丙三种规格的轴各 100 根，显然，仅采用表 1-2 中的某一种方案进行切割不可能是最节省的，甚至是不可行的，需要综合采用上述 8 种方案（或 8 种方案中的一部分）。

设采用第 j 种方案切割原料的根数为 x_j，$j=1, 2, \cdots, 8$，则需要的原料根数可以表达为：

$$z = \sum_{j=1}^{8} x_j$$

根据问题的要求，z 越小越好，它是描述问题目标的方程。但甲、乙、丙三种规格的轴至少要各有 100 根，即各个切割方案所产生的甲、乙、丙的数量之和分别不少于 100 根，所以要满足下面的条件：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100 & \text{2.9m 长轴的根数} \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 100 & \text{2.1m 长轴的根数} \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geqslant 100 & \text{1.5m 长轴的根数} \end{cases}$$

将上述分析表达在一起，得到该下料问题的数学模型：

$$\min z = \sum_{j=1}^{8} x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 100 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geqslant 100 \\ x_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \cdots, 8 \end{cases}$$

这也是一个线性规划的数学模型，求得的变量 x_1，x_2，…，x_8 的值构成了问题的一个可行的实施方案，这个方案可以消耗最少的圆钢棒料。模型中的 min 是英文 minimize 的简写，表示数学模型是求目标方程的最小值。

概括线性规划在工农业生产及经济领域方面的应用有两大类：第一类为在一定资源限制条件下使利益最大，第二类为在产出一定的前提下使费用最小。

二、线性规划的一般数学模型

一般线性规划数学模型有下面三个要素：

(1) 决策变量集合：(x_1，x_2，…，x_n)，其每一组可能的值代表问题的一个解决方案。通常决策变量要求非负。

(2) 约束条件集合，即决策变量集必须服从的条件。它是决策变量集的一组线性等式或不等式。

(3) 目标函数：$z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它是衡量决策变量集所形成方案优劣的数量指标。根据问题求其在满足所有约束条件下的最大值或最小值。

线性规划的一般模型为：

目标函数：$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

约束条件：

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant, =) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-1}$$

第二节　线性规划的图解

由于线性规划模型中的目标方程和约束条件都是线性的，当模型中只有两个决策变量时，它们都是平面中的直线，所以可以在直角坐标系下进行图解。

现在我们对第一节中的例 1-1 进行图解，以期对线性规划模型的解有一个直观的概念。在以决策变量 x_1、x_2 为坐标轴的直角坐标系中，首先画出模型中每一个约束条件所表达的直线，不等式约束所要求的则是直线的一侧，如约束 $4x_1 \leqslant 16$ 所表达的是在直线 $x_1 = 4$ 的左侧，并注意到决策变量非负的约束要求，如图 1-1 所示。

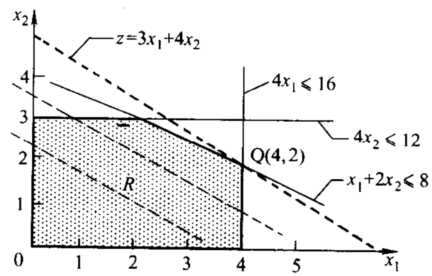

图　1-1

在图中，所有约束条件的直线围拢出一块闭合的区域（图中粗实线部分），在该区域中（含边界），每一点的坐标都满足所有约束条件，都是该问题的可行的解决方案——称之为可行解，这个区域就是该线性规划模型可行解的集合，称之为可行域，通常用 R 表示。

再来分析目标函数，如果把目标方程中的 z 看作参数，则在直角坐标系下形成以 z 为参数的一族平行线（图 1-1 中的虚线）：

$$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{z}{4}$$

当参数 z 从小向大变化时，该直线沿其法线向右上角方向移动，当移动到与可行域只有最后一个交点时（图 1-1 中粗虚线所表示的目标方程与可行域 R 交 Q 点），z 达到其在可行域内所有可行解的最大值，也就是线性规划模型的最优解。在本题中 Q（4，2）点就是例 1-1 的最优解：$x_1 = 4$，$x_2 = 2$，$z = 20$，即产品甲生产 4 个，产品乙生产 2 个，可以获得最大利润 20 千元。

注意：几种特殊情况：

（1）无穷多个最优解。当目标方程直线与某一约束直线平行时，最优值不惟

一。

如在例 1-1 中，若将目标函数的表达式改为 $\max z=2x_1+4x_2$，则其直线与约束 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 的直线平行，当目标函数直线向右上方移动离开可行域时，与可行域相切的是直线 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 在可行域中的线段部分，线段上每一点都是规划问题的最优解。如图 1-2 中的 AB 线段。

（2）无界解。有可行域，但无最优解，即目标函数的取值 $z\to+\infty$，如下面的线性规划模型，其可行解集为无穷集，如图 1-3 所示。

$$\max z=x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1+x_2\leqslant 4\\ x_1-x_2\geqslant 2\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

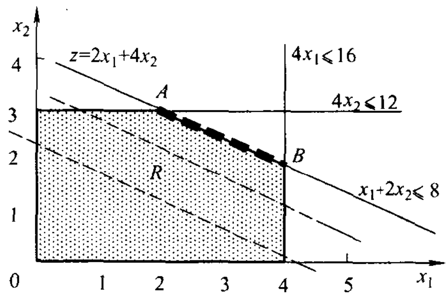

图 1-2

（3）无可行解。如下面的线性规划模型：

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 12\\ x_1+2x_2\geqslant 14\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

由于约束条件出现相互矛盾，形不成满足所有约束条件的公共区间，即不存在可行域（见图 1-4），所以线性规划模型无可行解。在实际问题中，当数学模型有错误时，才可能发生（2）、（3）两种情况。

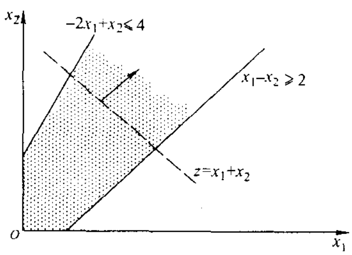

图 1-3

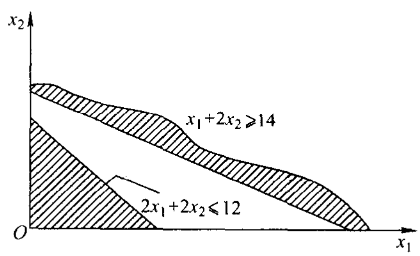

图 1-4

通过对例 1-1 的图解，我们直观地看到了线性规划模型的约束条件、目标方程与其解之间的关系。但是，由于图解只能在二维平面直角坐标系中描述只有两个决策变量的模型，而且通常只能求得模型的近似最优解，所以这种方法并不实用，对于复杂的问题是不可能用图解法求解的。因此，还需要找到一种线性规划模型的一般的、通用的求解方法。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com