杨汉生 主编

高等数学
同步学习与提高

GAODENG SHUXUE TONGBU XUEXI YU TIGAO

[上册]

四川大学出版社

高等数学

同步学习与提高

高等数学
同步学习与提高

[上册]

GAODENG
SHUXUE
TONGBU XUEXI
YU TIGAO

主　　编　杨汉生
编委会成员　杨汉生　陈翰林　彭　煜　林　军
杨　莉　卢　谦　汪　红　田应辉
付英贵　肖光灿　蒋建军　罗　原
鲜大权　王　玲　罗　兵

四川大学出版社

责任编辑:王　锋
责任校对:周树琴
封面设计:米茄设计工作室
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习与提高．上、下册／杨汉生主编．成都：四川大学出版社，2005.9
ISBN 7-5614-3212-7

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 杨…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 097698 号

书名　**高等数学同步学习与提高（上、下册）**

主　编	杨汉生
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	25.5
字　数	578 千字
版　次	2005 年 10 月第 1 版
印　次	2005 年 10 月第 1 次印刷
印　数	0 001～3 000 册
定　价	36.00 元(上、下册)

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

内容提要

本书对《高等数学》课程的本科教学大纲（全国课执委）和 2003 年研究生入学“数学考试大纲”（教育部）所要求的知识点、考点以及涉及的基本概念、基本理论、基本方法（简称“高数三基”）进行了简明扼要、全面系统的叙述、概括、总结、注释，内容力求精炼、准确、重点突出、结构清晰、体系完整。

本书兼顾了本科学习与提高、考研准备与见习这两个方面的需要。主要章节由“知识点、考点精要”、“教材习题同步解析”和相关章节内容的“历届考研试题选解”三个部分构成。“知识点、考点精要”中，凡是超出本科考试要求的提高知识点或超出本科要求的考研知识点，本书都标注“ * ”号加以区别。“教材习题同步解析”对《高等数学》教材（同济大学数学教研室主编，第四版）后面的绝大部分习题进行了解答。“历届考研试题选解”的范围主要限于从 1998 年以后的相关试题中选取。

前　言

由于《高等数学》课程与《初等数学》课程是迥然不同的两个体系，一年级的大学生入校伊始，往往就面临学习《高等数学》课程的一系列问题，如内容繁多、体系结构庞大（相对中学来说）、课时很少，思维方式很难适应，课前难以预习、课后难以归纳总结，一合书就觉得茫然，一提笔就感觉手生，一考试就深感题目难做等等。

工科数学，特别是高等数学，是对大学生（非数学专业的理工科甚至经管医农的）具有终生影响力的、最重要的一门基础课。一开始，就务必有清醒的认识和理解，就务必要加倍努力学习，做到勤奋钻研，精益求精，学能理解，学以致用。

考虑到《高等数学》课程的特殊重要性和学习的困难性，同时也为了后续课程的学习或准备研究生入学考试的需要，我们《高等数学》（四川省精品课程）课程组编写了这本《高等数学同步学习与提高》。

本书对《高等数学》课程的本科教学大纲（全国课执委）和 2003 年研究生入学“数学考试大纲”（教育部）所要求的知识点、考点、涉及的基本概念、基本理论、基本方法（简称“高数三基”），进行了简明扼要、全面系统的叙述、概括、总结、注释，内容力求精炼、准确、有条不紊、重点突出、结构清晰、体系完整。

为了双管齐下，本书兼顾本科学习与提高、考研准备与见习这两个方面的需要，同时也给大学一年级新生从“初等数学情结”向“高等数学心态”的转型过程提供一个有效的平台。本书的主要章节由“知识点、考点精要”、“教材习题同步解析”和相关章节内容“历届考研试题选解”三个部分构成。“知识点、考点精要”中，凡是超出本科考试要求的提高知识点或超出本科要求的考研知识点，我们都标注“ * ”号加以区别。“教材习题同步解析”对《高等数学》教材（同济大学数学教研室主编，第四版）后面的绝大部分习题进行了解答。“历届考研试题选解”的范围主要限于从 1998 年以后的相关试题中选取。

著名数学家、教育家 G・波利亚（G. Polya）说：“解题是智力的特殊成就，而智力就是人类的天赋。因此，解题可以认为是人的最富有特征性的活动。”当代著名数学家 G. D. Birkhoff 指出：“再也没有一个科学比数学更易于通过考虑来测定智力了。”所以，我们提倡学习《高等数学》的学生，就是要在理解的基础上见识，并且分析大量的数学题，持续不断地练习大量的数学题。只有这样，才能做到学而不厌、学而理解、学而长智；学以致练、学以致考、学以致用。

本书由全国高校首届优秀教学成果国家级（一等）奖获得者、四川省精品课程《高等数学》课程负责人杨汉生（杨翰深）教授担任主编，负责全书的策划构想、编写、统稿、定稿，林军副教授和罗原老师参与了5万字的编写工作。本书在出版过程中，得到了西南科技大学理学院领导热情的支持和关怀。卢谦、罗兵和王玲三位老师做了许多工作，在此一并致谢。

本书难免有错误与不足之处，敬请读者批评指正，以待将来进一步修改完善。

编　者

2005 年 7 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

1.1　知识点、考点精要

函数的概念，函数的特性(单调性、奇偶性、周期性和有界性). 复合函数、反函数、初等函数的概念. 数列与函数极限的定义以及它们的性质，函数的单侧极限，极限的四则运算，极限存在的两个准则，两个重要极限. 无穷大与无穷小的概念及关系，无穷小的性质及无穷小的比较. 函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值最小值定理和介值定理).

1.1.1　几个重要概念

函数与反函数的概念以及函数的单调性、奇偶性、周期性在中学数学中就已经很熟悉了，这里不再赘述.

1.1.1.1　函数的有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在数 K，对于所有的 $x \in X$，恒有

$$f(x) \leqslant K, (f(x) \geqslant K)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界(下界)的. 如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称它在 X 上有界；否则称它在 X 上无界. 显然函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是：存在一个正数 M，使得对于所有的 $x \in X$，总有 $|f(x)| \leqslant M$.

1.1.1.2　初等函数

(1)基本初等函数. 下列函数称为基本初等函数：

① 幂函数：$y = x^{\mu}$ (μ 为常数).

② 指数函数：$y = a^x$ (a 为常数，$a > 0$ 且 $a \neq 1$).

③ 对数函数：$y = \log_a x$ (a 为常数，$a > 0$ 且 $a \neq 1$).

④ 三角函数：$y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$.

⑤ 反三角函数：$y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \text{arccot} x$.

(2)复合函数. 若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 $W_2 = \{u \mid u = \varphi(x), x \in D_2\}$ 且 $W_2 \cap D_1 \neq \varnothing$，$W_2 \subset D_1$，则 $y = f[\varphi(x)]$ 确定了一个函数，它称为由 $y = f(u)$，$u \in D_1$ 和 $u = \varphi(x)$，$x \in D_2$ 复合而成的复合函数. f 又称为外函数，φ 称为内函数，x 是自变量，y 是因变量，u 是中间变量.

(3)初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

1.1.1.3 **数列极限的定义(ε—N 定义)**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall^{①}\varepsilon>0,\ \exists^{②}N \ni^{③} n>N \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon.$$

1.1.1.4 **函数极限的定义(ε—δ 定义,ε—X 定义)**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \ni 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0 \ni |x|>X \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

注意 ① 在上述定义中,若特殊地取 $A=0$,则函数 $f(x)$ 叫做 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的无穷小,即无穷小是以零为极限的函数.零是唯一的作为无穷小的数.

② 在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义中,x 是既从 x_0 的左侧又从 x_0 的右侧趋于 x_0 的.若仅考虑 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0(记做 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0^-$),此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$,那么 A 就叫做 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记做

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

若仅考虑 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0(记做 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0^+$),此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$,那么 A 就叫做 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记做

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

③ 研究 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限,是为了研究在自变量 $x\to x_0$ 的变化过程中 $f(x)$ 的性态,此时 $f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在点 x_0 有无定义完全无关.即使 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,在讨论 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限的过程中,函数值 $f(x_0)$ 也不起任何作用,因此在定义中要求 $0<|x-x_0|<\delta$.

④ 在 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的定义中,若 $x>0$ 且无限增大,则只要把定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$,即可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义.同样若 $x<0$ 而 $|x|$ 无限增大,则只要把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$,便得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义.

⑤ 无穷大的定义($M-\delta(X)$定义):

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists\delta>0(X>0) \ni 0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)$$

$$\Rightarrow |f(x)|>M.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$,此时 $f(x)$ 的极限是不存在的,为了反映 $|f(x)|$ 无限增大这种性态,也说成 $f(x)$ 的极限为无穷大.

在定义中把 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$(或 $f(x)<-M$),就记做

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \left(\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty\right).$$

---

① 符号“∀”表示“对于任意给定的”.

② 符号“∃”表示“存在”.

③ 符号“∋”表示“使得”.

1.1.2 极限存在的判别法

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

(2) $\lim$[①] $f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中 α 为无穷小量.

(3)两边夹定理:若数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足:

① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$;

② $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$,则数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.这一准则可以推广到函数极限情形.

(4)单调有界数列必有极限.

1.1.3 极限的性质

(1)极限的唯一性:数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

(2)收敛数列的有界性:收敛数列必有界.

(3)收敛数列与其子列间关系:收敛数列的任一子列必收敛,且极限相同.

(4)保号性:① 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则必存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

② 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

(5)保序性:若 $f(x)\geqslant g(x)$,则$\lim f(x)\geqslant \lim g(x)$.

1.1.4 极限的运算

若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则有以下结论成立:

(1)
$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B.$$
$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB.$$

上述情形均可以推广到有限个函数的和、差、积的情形,特别地
$$\lim[cf(x)]=c\cdot\lim f(x).$$

有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小,有界函数与无穷小之积仍为无穷小.

(2)
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B},B\neq 0.$$

上述四则运算对数列情形依然成立.

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a,\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$.

---

① 符号 lim 表示 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}$,即对于 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$自变量这两种变化过程均成立.

1.1.5 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

$\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}}u^v=\lim\left[(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right]^{v(u-1)}=\mathrm{e}^{\lim v(u-1)}$.

$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

1.1.6 无穷小的比较

若 α 和 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$，则有：

(1)若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则说 β 是比 α 高阶的无穷小，记做 $\beta=0(\alpha)$.

(2)若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则说 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3)若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0,k>0$，则说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(4) $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则说 β 与 α 是等价无穷小，记做 $\alpha\sim\beta$.

1.1.7 求极限问题方法总结

(1)用极限的定义证明极限.

(2)初等函数在定义域内求极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例如：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\frac{1+2+5}{1+1}=4$.

(3)利用无穷小与无穷大的互倒关系.

例如：求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}}{x-2}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}}{x-2}=\infty$.

(4)对有理分式函数，当 $x\to\infty$ 时，用 x 的高次方项去除分子、分母.

例如：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+3}=-1$.

一般地

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m.\\ 0, & n>m.\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

(5)利用等价无穷小的代换或无穷小的性质.

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$.

这里注意到当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$. 一般常用的等价无穷小有：当 $x\to 0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};$$

$$(1+x)^a-1\sim ax,a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1).$$

例如：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$，注意到 x 是无穷小量，$\sin\frac{1}{x}$是有界函数.

(6)分解因式，约去使分母极限为零的公因式.

例如：$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x(x+1)}{x-3}=-\frac{2}{5}$.

(7)乘以共轭根式，约去使分母极限为零的公因式.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(8)利用两个重要极限.

例如：

$$\lim_{x\to 0}x\cot x=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=e^{\lim 2x\left(\frac{1+x}{x}-1\right)}=e^2.$$

以后还将学到：

(9)利用罗必达法则求极限.

(10)利用定积分的定义求极限.

(11)利用级数收敛的必要条件求极限.

1.1.8 函数的连续性

1.1.8.1 函数连续的三个等价定义

若函数 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义，则 $f(x)$在点 x_0 处连续

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ni|x-x_0|<\delta$$
$$\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

1.1.8.2 间断点

不连续的点叫做间断点.

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点}: f(x_0-0)\text{与}f(x_0+0)\text{都存在}\begin{cases}\text{可去间断点}: f(x_0-0)=f(x_0+0)\text{都存在}\\ \text{跳跃间断点}: f(x_0-0)\neq f(x_0+0)\end{cases}\\ \text{第二类间断点}\end{cases}$$

1.1.8.3 连续函数的运算

连续函数的和、差、积、商(分母不为零)均为连续函数;连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数.一切初等函数在定义域内都是连续的.

1.1.8.4 闭区间上连续函数的性质

(1)最大值和最小值定理.在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

(2)有界性定理.在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

(3)零点定理.设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号(即 $f(a)f(b)<0$),则在(a,b)内至少有 $f(x)$的一个零点,即至少有一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

(4)介值定理.设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且在这一区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$,则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在(a,b)内至少有一点 ξ,使得

$$f(\xi)=C(a<\xi<b).$$

特别地,在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

1.2 教材习题同步解析

习题 1—1

10.设 $f(x)=2x^2+6x-3$,求 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$及 $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,并指出 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$中哪个是奇函数,哪个是偶函数.

解 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=\frac{1}{2}[2x^2+6x-3+2x^2-6x-3]=2x^2-3.$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\frac{1}{2}[2x^2+6x-3-2x^2+6x+3]=6x.$$

显然 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,所以 $\varphi(x)$是偶函数;$\psi(-x)=-\psi(x)$,所以 $\psi(x)$是奇函数.

11(3).证明定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证明 设 $f(x)$是定义在对称区间$(-l,l)$上的函数,显然

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

令 $$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

则有 $\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$,$\varphi(x)$是偶函数.

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\psi(x).$$

$\psi(x)$是奇函数，从而 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$是一个偶函数与一个奇函数之和.

13. 设 $f(x)$是定义在$(-l,l)$内的奇函数，若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加，证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

证明 任取 $x_1,x_2\in(-l,0)$，且 $x_1<x_2$，则$-x_1,-x_2\in(0,l)$且$-x_1>-x_2$. 由 $f(x)$是$(-l,l)$内的奇函数且在$(0,l)$内单调增加，可知有 $f(-x_1)>f(-x_2)$，即$-f(x_1)>-f(x_2)$，亦即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$在$(-l,0)$内单调增加.

16. 对于函数 $f(x)=x^2$，如何选择邻域$U(0,\delta)$的半径 δ，就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$所对应的函数值 $f(x)$都在邻域$U(0,2)$内?

解 要使 $f(x)=x^2\in(0,2)$，即 $0<x^2<2$，只需$|x|<\sqrt{2}$，且 $x\neq 0$. 又 $x\in U(0,\delta)$，故只需取邻域的半径 $\delta=\sqrt{2}$，就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$所对应的函数值 $f(x)=x^2$ 都在邻域$U(0,2)$内.

17. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 若 $f(x)$在 X 上既有上界 K_1 又有下界 K_2，即 $K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1$，取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$，则$-M\leqslant K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1\leqslant M$，即$|f(x)|\leqslant M$，从而 $f(x)$在 X 上有界.

反之，若 $f(x)$在 X 上有界，则必存在 $M>0$，使得$\forall x\in X$ 都有$|f(x)|\leqslant M$成立，即$-M\leqslant f(x)\leqslant M$，说明 $f(x)$在 X 上有上界 M 和下界$-M$.

习题 1－2

10. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$，问(1)$f(x^2)$；(2)$f(\sin x)$；(3)$f(x+a)$，$a>0$；(4)$f(x+a)+f(x-a)$，$a>0$ 的定义域各是什么?

解 由 $f(x)$的定义域是$[0,1]$，有

(1)$0\leqslant x^2\leqslant 1$，即$|x|\leqslant 1$，所以 $f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$.

(2)$0\leqslant \sin x\leqslant 1$，所以 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$ 即为 $f(\sin x)$的定义域.

(3)$x+a\in[0,1]$，则 $x\in[-a,1-a]$，即 $f(x+a)(a>0)$的定义域是$[-a,1-a]$.

(4)$x+a\in[0,1]$且 $x-a\in[0,1]$，所以 $x\in[-a,1-a]$且 $x\in[a,a+1]$. 当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，$-a\leqslant a\leqslant 1-a\leqslant 1+a$，此时 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域是$[a,1-a]$. 当 $a>\frac{1}{2}$时，$[-a,1-a]\cap[a,a+1]=\varnothing$，从而定义域为$\varnothing$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1.\end{cases}$ $g(x)=e^x$. 求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

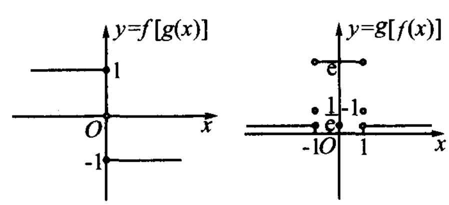

图 1－1

解 当 $x<0$ 时，$0<g(x)=e^x<1$；当 $x>0$ 时，$g(x)=e^x>1$；当 $x=0$ 时，$g(x)=1$；从而有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}\qquad g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

14. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ，重量是 P. 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始移动(图 1－2). 求物体开始移动时，拉力 F 与角 α 之间的函数关系式.

解 当物体开始移动时，水平方向的力为零，即向前的力等于摩擦力，从而有

$$F\cos\alpha=\mu P-F\sin\alpha\cdot\mu，故\ F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

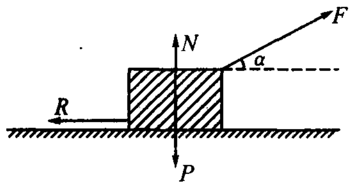

图 1－2

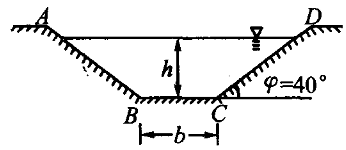

图 1－3

15. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$(图 1－3). 当水渠断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域.

解 $S_0=\frac{1}{2}h(AD+BC)=\frac{1}{2}h(b+2h\cot\varphi+b)=h(b+h\cot\varphi)$，

从而 $$b=\frac{S_0}{h}-h\cot\varphi,$$

$$L=AB+BC+CD(AB=CD)=2\cdot\frac{h}{\sin\varphi}+b=\frac{S_0}{h}-h\cot\varphi+2\frac{h}{\sin\varphi}$$
$$=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos40°}{\sin40°}h.$$

由 $h>0, b=\frac{S_0}{h}-h\cot40°>0$ 得定义域$(0,\sqrt{S_0\tan40°})$.

16. 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥(图 1－4)，试将其体积表示为高的函数，并说明定义域.

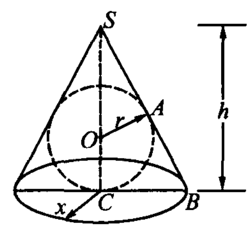

图 1－4

解 设圆锥底圆半径为 x，则 $\frac{r}{x}=\frac{h-r}{\sqrt{x^2+h^2}}$，于是得

$$x^2=\frac{r^2h}{h-2r}.$$

又圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi x^2h$，从而得 $V=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2h^2}{h-2r}$.

由 $h>0, V>0$ 有 $h-2r>0, h>2r$，即为函数定义域.

17. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，如从上海到某地每千克收 0.15 元. 当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求上