中考数学专题总复习

HITP

- 探索型问题
- 存在型问题
- 折叠问题
- 经济类应用题
- 合理规划问题
- 新型统计与概率问题
- 新型方程与几何综合题
- 新型二次函数综合题

主编 陈晓莉
副主编 刘晓林 李杰 王文溪

ZhongKao ShuXue
ZhuanTi ZongFuXi

哈爾濱工業大學出版社

中考数学专题总复习

◎ 主编 陈晓莉
◎ 副主编 刘晓林 李杰 王文溪

ZhongKao ShuXue
ZhuanTi ZongFuXi

哈爾濱工業大學出版社

《中考数学专题总复习》编委会

主　编　陈晓莉

副主编　刘晓林　李　杰　王文溪

其他参编人员(按姓氏笔画排列)

马　丽　孔立梅　王洪波　王荣亮　公海波　尹淑杰　齐广勇　孙　宁
曲　坤　许英玉　刘　莹　孙　莹　刘晓宇　刘海燕　李天华　张云波
张伟红　宋成德　李迎春　陈国卓　杨昕梅　佟　艳　孟广宇　范玲玲
郑　敏　林　琳　胡怀秋　姜　颖　徐伟新　徐　岐　陶　英　高树会
夏艳波　寇维冬　焦春荣　彭静宇

图书在版编目(CIP)数据

中考数学专题总复习/陈晓莉主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.8

ISBN 7-5603-2356-1

Ⅰ.中…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.数学课-初中-升学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 074847 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　康云霞　唐　蕾
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 29　字数 487 千字
版　　次　2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
印　　数　1~4 000 册
定　　价　28.00 元

不经过艰苦的脑力劳动，谁也不能在数学中前进多远。但无论谁，他只要享受到了理论知识的快乐，见到了数学的美，他就会乐于付出郑重的努力。讲授数学的主要目的必须是使学生获得这种快乐，并通过这种快乐对他进行数学中必不可少的逻辑思维训练。这是值得的，因为谁若能通过数学得到逻辑思维的艺术，那他就能在生活中处处运用它。

——A. Renyi

（伦伊，1921～1969年，匈牙利科学院院士，匈牙利科学院应用数学研究所所长）

CONTENTS 目录

第一部分　专题讲座

第二部分　模拟试题

第一部分 专题讲座

第1讲 怎样看待近年中考数学中的新题型

纵观近年各省市的中考数学题，无论从命题方向，还是从命题原则看，一些新的能力型试题不断出现，并占据越来越重要的地位. 为此，将近年中考试题中常见的新题型列举如下.

一、设计新情景的基础题

例1 （太原中考题）现规定一种运算：$a*b=ab+a-b$，其中 a、b 为实数，则 $a*b+(b-a)*b$ 等于（　　）

A. a^2-b　　B. b^2-b　　C. b^2　　D. b^2-a

评析　这是一道考查同学们阅读理解能力的试题，题设规定了一种新的运算“$*$”，要求考生按照“$*$”的运算法则解决与之有关的计算问题.

$$a*b+(b-a)*b=ab+a-b+(b-a)\times b+(b-a)-b=ab+a-b+b^2-ab+b-a-b=b^2-b$$

故应选 B.

二、崭露头角的新课程概念题

例2 （海南中考题）图1是一个正方体包装盒的表面展开图，若在其中的正方形 A、B、C 内分别填上适当的数，使得这个表面展开图沿虚线折成正方体后，相对面上的两个数互为相反数，则填在 A、B、C 内的三个数依次是（　　）

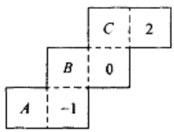


图1

A. 0，－2，1　　B. 0，1，－2　　C. 1，0，－2　　D. －2，0，1

评析　本题以新课程中的“空间与图形”为背景，源于教材，又活于教材，通过具体实践操作或发挥想象，即可得到答案 A.

三、屡见不鲜的开放题

例3 （南通中考题）如图2，已知 AB 为 $\odot O$ 的直径，$BD=OB$，$\angle CAB=30°$，请根据已知条件和所给图形，写出三个正确结论（除 $AO=$

$OB = BD$ 外):① ____ ② ____ ③ ____

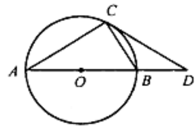


图 2

评析　这是一道难得的开放题,其答案可根据学生自己的理解来设计,鼓励学生积极探索、创新.

答案:①$\angle ACB = 90°$;$AB = 2BC$;$BD = BC$　②CD 为 $\odot O$ 切线　③$CD^2 = DB \cdot DA$ 等(答案不惟一,只需写出其中 3 个即可).

四、丰富多彩的跨学科试题

例 4　(烟台中考题)阅读下面材料,再回答问题.

一般地,如果函数 $y = f(x)$ 对于自变量取值范围内的任意 x,都有 $f(-x) = -f(x)$,那么 $y = f(x)$ 就叫做奇函数;如果 $y = f(x)$ 对于自变量取值范围内的任意 x,都有 $f(-x) = f(x)$,那么 $y = f(x)$ 就叫做偶函数.

例如 $f(x) = x^3 + x$,当 x 取任意实数时

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x)$$

即 $f(-x) = -f(x)$,因此 $f(x) = x^3 + x$ 为奇函数.

又如,$f(x) = |x|$,当 x 取任意实数时

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

即 $f(-x) = f(x)$,因此 $f(x) = |x|$ 是偶函数.

问题(1):下列函数中

①$y = x^4$;②$y = x^2 + 1$;③$y = \dfrac{1}{x^3}$;④$y = \sqrt{x+1}$;⑤$y = x + \dfrac{1}{x}$.

奇函数有________,偶函数有________(只填序号).

问题(2):请你再分别写出一个奇函数、一个偶函数.

评析　为了考查学生获取知识的能力,命题者有意将高中有关奇、偶函数的定义提供给学生,让学生通过自学达到判断函数奇偶性的思维能力,从中培养学生的学习能力.

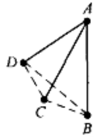
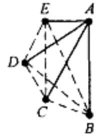
答案:(1) 奇函数有 ③、⑤,偶函数有 ①、②　(2) 如,奇函数 $y = -\dfrac{3}{x}$,偶函数 $y = 2x^2$.

五、正在加强的研究性试题

例 5　(潍坊中考题)小明在阅览杂志时发现这样一个问题:“在某次聚会中,共有 6 人参加,如果每两人都握一次手,共握几次手?”小明通过努力得出了答案.为了解决更一般的问题,小明设计了表 1 进行探究.

请你在表 1 右下角的空格里填上你归纳出的一般结论.

表 1

参加人数	2	3	4	5	…	n
握手示意图					…	
握手次数	1	$2+1=3$	$3+2+1=6$	$4+3+2+1=10$	…	

评析　本题以研究握手次数为主要课题，要求学生既会实践操作，又会理论学习研究．事实上，只要考生稍微动点脑筋，就不难将握手问题转化为研究直线上的点构成线段的条数问题（这里，视一个人为直线上的一个点）．

答案：$(n-1)+\cdots+3+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

六、推陈出新的应用性试题

例 6　（济南中考题）星期天，张老师提着篮子（篮子重 0.5 斤）去集市买 10 斤鸡蛋，当张老师往篮子里捡称好的鸡蛋时，发觉比过去买 10 斤鸡蛋的个数少很多，于是她将鸡蛋装进篮子再让摊主一起称，共称得 10.55 斤，她立刻要求摊主退 1 斤鸡蛋的钱，她是怎样知道摊主少称了大约一斤鸡蛋呢（精确到 1 斤）？请你将分析过程写出来，由此你受到什么启发？（请用一至两句话，简要叙述出来）

评析　本题的取材来自生活，给我们一种亲切感．它巧妙地把函数或方程的应用体现在日常生活中，反映了数学的最大魅力，这是一个有创意的试题．

（1）**解法一**　设摊主称得鸡蛋的质量为 x 斤，鸡蛋的实际质量为 y 斤．不难发现，鸡蛋的实际质量 y 斤是摊主称得质量 x 斤的正比例函数．篮子的实际质量为 0.5 斤，鸡蛋放人篮子后再一起称，增量为

$$10.55-10=0.55$$

所以
$$y=\frac{0.5x}{0.55}$$

当 $x=10$ 时，$y=\dfrac{0.5}{0.55}\times10\approx9$，$10-9=1$，摊主少称了大约 1 斤鸡蛋．

解法二　设摊主称得 10 斤鸡蛋的实际质量为 x 斤．根据题意，得

$$\frac{x}{10}=\frac{0.5}{10.55-10}$$

解得 $x \approx 9, 10 - 9 = 1$,摊主少称了大约 1 斤鸡蛋.

(2) 要求所叙述的内容能体现出数学在实际生活中的应用价值,有应用数学知识解决实际问题的意识.如,数学在我们身边,我们要学好数学,以维护自己的合法权益.

综上,通过一些最新题型的分析预测,目的是揭示考题的本来面目,让学生适应题型的变化,克服畏惧心理,从而让学生胸有成竹,应对自如.

第2讲 怎样解中考数学中的新题型

一、决策型应用题

决策类应用型问题，是根据已掌握的数据及有关信息，利用数学知识对某一事件进行分析、计算，从而做出正确决策的题.

例1 （淮阴中考题）A市和B市分别有库存某种机器12台和6台，现决定支援C村10台、D村8台.已知从A市调运一台机器到C村、D村的运费分别为400元和800元；从B市调运一台机器到C村、D村的运费分别为300元和500元.

(1) 设B市运往C村机器 x 台，求总运费 w 关于 x 的函数关系式.

(2) 若要求总运费不超过9 000元，问共有几种调运方案？

(3) 求出总运费最低的调运方案，最低运费是多少元？

略解 (1) 可知B市运往D村 $(6-x)$ 台，A市运往C、D两村分别为 $(10-x)$、$(2+x)$ 台，故

$$w=400(10-x)+300x+800(2+x)+500(6-x)=200x+8\,600$$

(2) 易得 $0\leqslant x\leqslant 6$，由运费 $200x+8\,600\leqslant 9\,000$，从而 $0\leqslant x\leqslant 2$，故 x 可取0,1,2，因此运费不超过9 000元，共有三种调运方案.

(3) 当 $x=0$ 时，w 的最小值为8 600元，这时调运方案为：从B市运至C村0台，运至D村6台；从A市运至C村10台，运至D村2台.

评析 *解决策类问题一般先列出算式或建立函数关系式，通过算式大小的比较或函数最值的确定做出相应的决策.*

例2 （河北省中考题）某工厂现有甲种原料360 kg，乙种原料290 kg，计划利用这两种原料生产A、B两种产品，共50件，已知生产一件A种产品，需用甲种原料9 kg、乙种原料3 kg，可获利润700元；生产一件B种产品，需用甲种原料4 kg、乙种原料10 kg，可获利润1 200元.

(1) 按要求安排A、B两种产品的生产件数，有哪几种方案？请你设计出来.

(2) 设生产A、B两种产品获总利润是 y 元，其中A种的生产件数是 x，

试写出 y 与 x 之间的函数关系式，并利用函数的性质说明(1) 中的哪种生产方案获总利润最大?最大利润是多少?

解 (1) 设安排生产 A 种产品 x 件，则生产 B 种产品 $(50-x)$ 件，由题意，得

$$9x+4(50-x)\leqslant 360,\quad 3x+10(50-x)\leqslant 290$$

所以 $30\leqslant x\leqslant 32$.

因为 x 是整数，所以 x 只能取 30,31,32，相应的 $(50-x)$ 的值是 20,19,18. 所以生产方案有三种，即：

第一种方案：生产 A 种产品 30 件，B 种产品 20 件；

第二种方案：生产 A 种产品 31 件，B 种产品 19 件；

第三种方案：生产 A 种产品 32 件，B 种产品 18 件.

(2) 略.

评析 这类决策型试题的解答关键是要把实际问题转化成数学模型，运用不等式逼近答案.

二、探索型题

探索型题一般没有明确的结论，没有确定形式和方法，要求学生通过自己的观察、分析、比较、概括得出结论，形成方法和思路. 探索型题分为结论探索型和是否存在型两类. 这类问题是培养学生创新精神和实践能力，考查学生分析和解决问题能力的重要题型，在近几年中考中显得十分活跃，是中考的难题.

例 3 (2001 大连中考题) 如图 1，在直角坐标系中，E 为第二象限内一点. $\odot E$ 与 x 轴自左至右交于 A、B 两点. 直线 PC 切 $\odot E$ 于点 C，交 x 轴于点 P. D 为线段 PC 上一点，$ED\perp BC$，已知 $PB=2$，$\triangle PBD$ 的周长为 $2+2\sqrt{3}$.

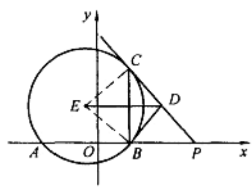


图 1

(1) 求证：DB 是 $\odot E$ 的切线.

(2) 若抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+x-2m$ 经过 A、B 两点，求 m 的值.

(3) 在过点 P 的直线中，是否存在这样的直线，该直线与(2) 中的抛物线的两个交点的横坐标之和等于 2?若存在，求出这样的直线的解析式；若不存在，请说明理由.

(1) 证明 连结 CE、BE，可证 $\triangle CED\cong\triangle BED$，则 $\angle EBD=$

$\angle ECD=90^\circ$,故 DB 是 $\odot E$ 的切线.

(2)解　由 $DC=DB$,$PB=2$,$\triangle PDB$ 的周长为 $2+2\sqrt{3}$,则 $PC=PD+DC=PD+DB=2\sqrt{3}$.又 $PC^2=PB\cdot PA$,即 $PA=\dfrac{PC^2}{PB}=6$,则 $AB=PA-PB=4$.而抛物线过 A、B 两点,设 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$,则 $x_1+x_2=-2$,$x_1\cdot x_2=-4m$.所以 $AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4$,即 $m=\dfrac{3}{4}$.

(3)解　不存在,假设存在过点 P 的直线 $y=kx+b$ 符合题目的条件.由(2)知 $m=\dfrac{3}{4}$,即 $y=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{3}{2}$.令 $y=0$,得 $x_1=-3$,$x_2=1$,即 $A(-3,0)$、$B(1,0)$、$P(3,0)$.因直线 $y=kx+b$ 过点 $P(3,0)$,则有 $b=-3k$,即 $y=kx-3k$.联立方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{3}{2}\\ y=kx-3k\end{cases}$,得 $\dfrac{1}{2}x^2-(k-1)x+(3k-\dfrac{3}{2})=0$.此时 $\Delta=(k-1)^2-4\times\dfrac{1}{2}(3k-\dfrac{3}{2})$,又 $x_1+x_2=-\dfrac{-(k-1)}{\dfrac{1}{2}}=2$,即 $k=2$.所以,$\Delta=-8<0$,即方程无实数根,也就是上述方程组无解,故满足题目条件的直线不存在.

评析　在(1)中,连结 CE、BE,即有两个半径.寻找 $\angle EBD=90^\circ$ 是证明直线是圆的切线的常用方法.(2)运用 $AB=|x_1-x_2|$ 对求 m 值帮助很大,也是常用技巧.在(3)中借用 $\Delta<0$ 来判断方程组无解,进而确定直线的不存在.

变式训练

(2001武汉中考题)如图2,关于 x 的二次函数 $y=x^2-2mx-m$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点($x_2>0>x_1$),与 y 轴交于点 C,且 $\angle BAC=\angle BCO$.

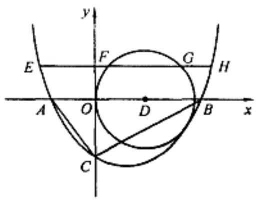


图2

(1)求这个二次函数的解析式.

(2)以点 $D(\sqrt{2},0)$ 为圆心作 $\odot D$,与 y 轴相切于点 O,过抛物线上一点 $E(x_3,t)$($t>0$,$x_3<0$)作 x 轴的平行线与 $\odot D$ 交于 F、G 两点,与抛物线交于另一点 H,问是否存在实数 t,使得 $EF+GH=FG$?如果存在,求出 t 值;如果不存在,请说明理由.

答案:(1) $y = x^2 - 2x - 1$　(2) 存在, $t = \dfrac{\sqrt{97} - 1}{8}$.

三、与图形位置有关的问题

例4　(2001济南中考题) 如图3, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 以边 BC 所在的直线为 x 轴, 边 BC 上的高线 AO 所在的直线为 y 轴建立平面直角坐标系.

(1) 求过 A、B、C 三点的抛物线的解析式.

(2) 设 $\odot P$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 分别切 AB、AC 于点 E、F. 求阴影部分的面积.

(3) 点 D 为 y 轴上一动点, 当以点 D 为圆心, 3为半径的 $\odot D$ 与直线 AB、AC 都相切时, 试判断 $\odot D$ 与(2)中 $\odot P$ 的位置关系, 并简要说明理由.

(4) 若(2)中 $\odot P$ 的大小不变, 圆心 P 沿 y 轴运动. 设点 P 坐标为 $(0, a)$, 则 $\odot P$ 与直线 AB、AC 有几种位置关系? 并写出相应位置关系时 a 的取值范围.

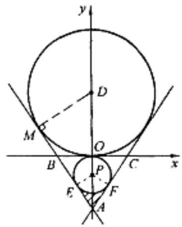


图3

略解　(1) 易求 $B(-\sqrt{3}, 0)$、$C(\sqrt{3}, 0)$, 则 $A(0, -3)$, 所以过 A、B、C 三点的抛物线解析式为 $y = x^2 - 3$.

(2) 连结 PE、PF, 则有 $Rt\triangle PEA \backsim Rt\triangle BOA$, 即 $\dfrac{PE}{BO} = \dfrac{PA}{AB}$. 设 $\odot P$ 的半径为 r, 所以 $\dfrac{r}{\sqrt{3}} = \dfrac{3 - r}{2\sqrt{3}}$, 即 $r = 1$, 且 $\angle EPA = 60°$, 所以

$$S_{阴影} = 2 \times \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \times 1 - \frac{\pi}{6} \times 1^2\right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$$

(3) 设 $\odot D$ 切 AB 于点 M, 连结 DM, 则 $DM \perp AB$, 所以 $AD = 2DM = 6$, $DP = DA - PA = 4$, 即 $DP = R + r = 3 + 1 = 4$, 则 $\odot P$ 与 $\odot D$ 相外切; 或 $DP = DA + PA = 8$, 即 $DP > R + r = 3 + 1 = 4$, 则 $\odot P$ 与 $\odot D$ 外离.

(4) 当 $P(0, -1)$ 或 $P(0, -5)$, 即 $a = -1$, 或 $a = -5$ 时, $\odot P$ 与直线 AB、AC 都相切. 当 $-5 < a < -1$ 时, $\odot P$ 与 AB、AC 相交. 当 $a > -1$ 或 $a < -5$ 时, $\odot P$ 与 AB、AC 相离.

评析　本题虽然建立在平面直角坐标系中, 但求解的每一步都离不开几何知识, 这种数形结合的思想方法是解这类问题的灵魂.