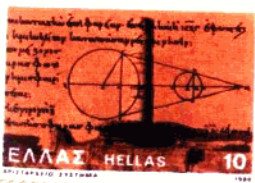


# 中考数学专题总复习



探索型问题  
 存在型问题  
 折叠问题  
 经济类应用题  
 合理规划问题  
 新型统计与概率问题  
 新型方程与几何综合题  
 新型二次函数综合题

主编 陈晓莉  
 副主编 刘晓林 李杰 王文溪



ZhongKao ShuXue  
 ZhuanTi ZongFuXi

哈尔滨工业大学出版社

# 中考数学专题总复习

◎ 主编 陈晓莉

◎ 副主编 刘晓林 李杰 王文溪

ZhongKao ShuXue  
ZhuanTi ZongFuXi



哈尔滨工业大学出版社

# 《中考数学专题总复习》编委会

主 编 陈晓莉

副主编 刘晓林 李 杰 王文溪

其他参编人员(按姓氏笔画排列)

马 丽 孔立梅 王洪波 王荣亮 公海波 尹淑杰 齐广勇 孙 宁  
曲 坤 许英玉 刘 莹 孙 莹 刘晓宇 刘海燕 李天华 张云波  
张伟红 宋成德 李迎春 陈国卓 杨昕梅 佟 艳 孟广宇 范玲玲  
郑 敏 林 琳 胡怀秋 姜 颖 徐伟新 徐 岐 陶 英 高树会  
夏艳波 寇维冬 焦春荣 彭静宇

## 图书在版编目(CIP)数据

中考数学专题总复习/陈晓莉主编. —哈尔滨:哈尔滨  
工业大学出版社, 2006. 8  
ISBN 7-5603-2356-1

I. 中… II. 陈… III. 数学课—初中—升学参考  
资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 074847 号

策划编辑 刘培杰

责任编辑 康云霞 唐 蕾

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 29 字数 487 千字

版 次 2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

印 数 1~4 000 册

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

不经过艰苦的脑力劳动,谁也不能在数学中前进多远。但无论谁,他只要享受到了理论知识的快乐,见到了数学的美,他就会乐于付出郑重的努力。讲授数学的主要目的必须是使学生获得这种快乐,并通过这种快乐对他进行数学中必不可少的逻辑思维训练。这是值得的,因为谁若能通过数学得到逻辑思维的艺术,那他就能在生活中处处运用它。

——A. Renyi

(伦伊,1921~1969年,匈牙利科学院院士,匈牙利科学院应用数学研究所所长)

# 目 录

---

## 第一部分 专题讲座

- 第 1 讲 怎样看待近年中考数学中的新题型 /3
- 第 2 讲 怎样解中考数学中的新题型 /7
- 第 3 讲 怎样解中考数学中探索型问题( I ) /12
- 第 4 讲 怎样解中考数学中探索型问题( II ) /17
- 第 5 讲 怎样解新的中考数学中探索型问题 /23
- 第 6 讲 怎样解中考数学中存在型问题( I ) /28
- 第 7 讲 怎样解中考数学中存在型问题( II ) /33
- 第 8 讲 怎样解中考数学中开放型问题( I ) /37
- 第 9 讲 怎样解中考数学中开放型问题( II ) /40
- 第 10 讲 怎样解中考数学中折叠问题( I ) /44
- 第 11 讲 怎样解中考数学中折叠问题( II ) /48
- 第 12 讲 怎样适应中考数学应用型问题新趋向 /53
- 第 13 讲 中考数学中应用题的新特征 /57
- 第 14 讲 怎样解中考数学中经济类应用题 /60
- 第 15 讲 怎样解中考数学中合理规划问题 /68
- 第 16 讲 怎样对中考数学中应用问题进行分类( I ) /76
- 第 17 讲 怎样对中考数学中应用问题进行分类( II ) /83

- 第 18 讲 怎样对待中考数学中新型几何问题( I ) /88
- 第 19 讲 怎样对待中考数学中新型几何问题( II ) /92
- 第 20 讲 怎样对待中考数学中新型统计与概率题( I ) /96
- 第 21 讲 怎样对待中考数学中新型统计与概率题( II ) /99
- 第 22 讲 怎样解中考数学中新型方程与几何综合题 /103
- 第 23 讲 怎样解中考数学中新型方程与函数综合题 /110
- 第 24 讲 怎样解中考数学中新型一次函数及反比例函数综合题 /117
- 第 25 讲 怎样解中考数学中新型二次函数综合题 /134
- 第 26 讲 怎样利用基本函数图象与其系数的关系解中考试题 /151
- 第 27 讲 怎样确立几何量间的函数关系式 /155
- 第 28 讲 怎样解中考数学中与三角函数有关的问题 /162
- 第 29 讲 怎样解中考数学中函数与面积的新型问题 /170
- 第 30 讲 怎样确定函数解析式 /177
- 第 31 讲 怎样用简捷的方法求二次函数的解析式 /181
- 第 32 讲 怎样确定自变量的取值范围 /186
- 第 33 讲 怎样解函数的最值问题 /188
- 第 34 讲 怎样列分式方程解中考应用题 /192
- 第 35 讲 如何巧解中考数学中的分式方程 /194
- 第 36 讲 怎样解中考数学中图形变换问题 /198
- 第 37 讲 怎样利用解直角三角形的有关知识解应用题 /204
- 第 38 讲 怎样列不等式或不等式组解应用题 /209
- 第 39 讲 怎样解中考数学中不等式综合题 /214
- 第 40 讲 怎样利用相似形解几何综合题 /219
- 第 41 讲 怎样利用平面直角坐标系解综合题 /227
- 第 42 讲 怎样解简单的平面图形与立体图形的问题 /240
- 第 43 讲 怎样解中考数学中的规律题 /247
- 第 44 讲 怎样解中考数学中的实践操作题 /253
- 第 45 讲 如何解几何中的运动问题 /262

- 第 46 讲 怎样巧用圆幂定理解中考试题 /272
- 第 47 讲 怎样解有关阴影部分面积的中考题 /276
- 第 48 讲 怎样巧用证明线段比例式(或等积式)的思路解中考题 /281
- 第 49 讲 怎样综合运用一元二次方程根与系数的关系解中考题 /288
- 第 50 讲 怎样解中考数学中与圆有关的新型综合题 /294
- 第 51 讲 怎样解中考数学中有关抛物线中三角形问题 /302
- 第 52 讲 怎样解二次函数与直线型综合题 /312
- 第 53 讲 怎样解二次函数与圆的综合题 /322
- 第 54 讲 怎样解方程应用题 /331
- 第 55 讲 怎样解函数应用题 /337
- 第 56 讲 怎样用几何计算的思想方法解中考题 /344
- 第 57 讲 怎样巧用切线解中考几何题 /351
- 第 58 讲 怎样巧作圆中的辅助线解中考题 /360
- 第 59 讲 怎样利用一个重要的基本图形解中考题 /369
- 第 60 讲 中考数学新题型的复习与参考 /379

## 第二部分 模拟试题

- 中考数学模拟试题( I ) /393
- 中考数学模拟试题( II ) /402
- 中考数学模拟试题( III ) /411
- 中考数学模拟试题( IV ) /418
- 中考数学模拟试题( V ) /425
- 中考数学模拟试题( VI ) /432
- 中考数学模拟试题( VII ) /439
- 中考数学模拟试题( VIII ) /449

第一部分

---

专题讲座





## 第1讲 怎样看待 近年中考数学中的新题型

纵观近年各省市的中考数学题,无论从命题方向,还是从命题原则看,一些新的能力型试题不断出现,并占据越来越重要的地位.为此,将近年中考试题中常见的新题型列举如下.

### 一、设计新情景的基础题

**例1** (太原中考题)现规定一种运算: $a * b = ab + a - b$ ,其中 $a, b$ 为实数,则 $a * b + (b - a) * b$ 等于 ( )

- A.  $a^2 - b$       B.  $b^2 - b$       C.  $b^2$       D.  $b^2 - a$

**评析** 这是一道考查同学们阅读理解能力的试题,题设规定了一种新的运算“\*”,要求考生按照“\*”的运算法则解决与之有关的计算问题.

$$\begin{aligned} a * b + (b - a) * b &= ab + a - b + (b - a) \times b + (b - a) - b = \\ &ab + a - b + b^2 - ab + b - a - b = b^2 - b \end{aligned}$$

故应选 B.

### 二、崭露头角的新课程概念题

**例2** (海南中考题)图1是一个正方体包装盒的表面展开图,若在其中的正方形A、B、C内分别填上适当的数,使得这个表面展开图沿虚线折成正方体后,相对面上的两个数互为相反数,则填在A、B、C内的三个数依次是 ( )

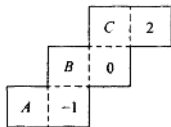


图1

- A. 0, -2, 1      B. 0, 1, -2      C. 1, 0, -2      D. -2, 0, 1

**评析** 本题以新课程中的“空间与图形”为背景,源于教材,又活于教材,通过具体实践操作或发挥想象,即可得到答案A.

### 三、屡见不鲜的开放题

**例3** (南通中考题)如图2,已知 $AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $BD = OB$ , $\angle CAB = 30^\circ$ ,请根据已知条件和所给图形,写出三个正确结论(除 $AO =$

$OB = BD$ 外):① \_\_\_\_ ② \_\_\_\_ ③ \_\_\_\_

评析 这是一道难得的开放题,其答案可根据学生自己的理解来设计,鼓励学生积极探索、创新.

答案:①  $\angle ACB = 90^\circ$ ;  $AB = 2BC$ ;  $BD = BC$  ②  $CD$ 为 $\odot O$ 切线 ③  $CD^2 = DB \cdot DA$ 等(答案不惟一,只需写出其中3个即可).

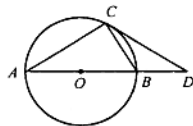


图2

#### 四、丰富多彩的跨学科试题

例4 (烟台中考题) 阅读下面材料,再回答问题.

一般地,如果函数  $y = f(x)$  对于自变量取值范围内的任意  $x$ , 都有  $f(-x) = -f(x)$ , 那么  $y = f(x)$  就叫做奇函数; 如果  $y = f(x)$  对于自变量取值范围内的任意  $x$ , 都有  $f(-x) = f(x)$ , 那么  $y = f(x)$  就叫做偶函数.

例如  $f(x) = x^3 + x$ , 当  $x$  取任意实数时

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x)$$

即  $f(-x) = -f(x)$ , 因此  $f(x) = x^3 + x$  为奇函数.

又如,  $f(x) = |x|$ , 当  $x$  取任意实数时

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

即  $f(-x) = f(x)$ , 因此  $f(x) = |x|$  是偶函数.

问题(1): 下列函数中

①  $y = x^4$ ; ②  $y = x^2 + 1$ ; ③  $y = \frac{1}{x^3}$ ; ④  $y = \sqrt{x+1}$ ; ⑤  $y = x + \frac{1}{x}$ .

奇函数有\_\_\_\_\_, 偶函数有\_\_\_\_\_ (只填序号).

问题(2): 请你再分别写出一个奇函数、一个偶函数.

评析 为了考查学生获取知识的能力, 命题者有意将高中有关奇、偶函数的定义提供给学生, 让学生通过自学达到判断函数奇偶性的思维能力, 从中培养学生的学习能力.

答案: (1) 奇函数有③、⑤, 偶函数有①、② (2) 如, 奇函数  $y = -\frac{3}{x}$ , 偶函数  $y = 2x^2$ .

#### 五、正在加强的研究性试题

例5 (潍坊中考题) 小明在阅览杂志时发现这样一个问题: “在某次聚会中, 共有6人参加, 如果每两人都握一次手, 共握几次手?” 小明通过努力得出了答案. 为了解决更一般的问题, 小明设计了表1进行探究.

请在表1右下角的空格里填上你归纳出的一般结论.

表 1

参加人数	2	3	4	5	...	$n$
握手示意图					...	
握手次数	1	$2 + 1 = 3$	$3 + 2 + 1 = 6$	$4 + 3 + 2 + 1 = 10$	...	

**评析** 本题以研究握手次数为主要课题,要求学生既会实践操作,又会理论学习研究.事实上,只要考生稍微动点脑筋,就不难将握手问题转化为研究直线上的点构成线段的条数问题(这里,视一个人作为直线上的一个点).

$$\text{答案: } (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

## 六、推陈出新的应用性试题

**例 6** (济南中考题) 星期天,张老师提着篮子(篮子重 0.5 斤)去集市买 10 斤鸡蛋,当张老师往篮子里捡称好的鸡蛋时,发觉比过去买 10 斤鸡蛋的个数少很多,于是她将鸡蛋装进篮子再让摊主一起称,共称得 10.55 斤,她立刻要求摊主退 1 斤鸡蛋的钱,她是怎样知道摊主少称了大约一斤鸡蛋呢(精确到 1 斤)?请你将分析过程写出来,由此你受到什么启发?(请用一至两句话,简要叙述出来)

**评析** 本题的取材来自生活,给我们一种亲切感.它巧妙地把函数或方程的应用体现在日常生活中,反映了数学的最大魅力,这是一个有创意的试题.

(1) 解法一 设摊主称得鸡蛋的质量为  $x$  斤,鸡蛋的实际质量为  $y$  斤.不难发现,鸡蛋的实际质量  $y$  斤是摊主称得质量  $x$  斤的正比例函数.篮子的实际质量为 0.5 斤,鸡蛋放入篮子后再一起称,增量为

$$10.55 - 10 = 0.55$$

所以

$$y = \frac{0.5x}{0.55}$$

当  $x = 10$  时,  $y = \frac{0.5}{0.55} \times 10 \approx 9, 10 - 9 = 1$ , 摊主少称了大约 1 斤鸡蛋.

解法二 设摊主称得 10 斤鸡蛋的实际质量为  $x$  斤.根据题意,得

$$\frac{x}{10} = \frac{0.5}{10.55 - 10}$$

解得  $x \approx 9, 10 - 9 = 1$ , 摊主少称了大约 1 斤鸡蛋.

(2) 要求所叙述的内容能体现出数学在实际生活中的应用价值, 有应用数学知识解决实际问题的意识. 如, 数学在我们身边, 我们要学好数学, 以维护自己的合法权益.

综上, 通过一些最新题型的分析预测, 目的是揭示考题的本来面目, 让学生适应题型的变化, 克服畏惧心理, 从而让学生胸有成竹, 应对自如.

## 第2讲

## 怎样解

## 中考数学中的新题型

## 一、决策型应用题

决策类应用型问题,是根据已掌握的数据及有关信息,利用数学知识对某一事件进行分析、计算,从而做出正确决策的题.

**例1** (淮阴中考题)A市和B市分别有库存某种机器12台和6台,现决定支援C村10台、D村8台.已知从A市调运一台机器到C村、D村的运费分别为400元和800元;从B市调运一台机器到C村、D村的运费分别为300元和500元.

(1) 设B市运往C村机器 $x$ 台,求总运费 $w$ 关于 $x$ 的函数关系式.

(2) 若要求总运费不超过9 000元,问共有几种调运方案?

(3) 求出总运费最低的调运方案,最低运费是多少元?

**略解** (1) 可知B市运往D村 $(6-x)$ 台,A市运往C、D两村分别为 $(10-x)$ 、 $(2+x)$ 台,故

$$w = 400(10-x) + 300x + 800(2+x) + 500(6-x) = 200x + 8600$$

(2) 易得 $0 \leq x \leq 6$ ,由运费 $200x + 8600 \leq 9000$ ,从而 $0 \leq x \leq 2$ ,故 $x$ 可取0,1,2,因此运费不超过9 000元,共有三种调运方案.

(3) 当 $x = 0$ 时, $w$ 的最小值为8 600元,这时调运方案为:从B市运至C村0台,运至D村6台;从A市运至C村10台,运至D村2台.

**评析** 解决决策类问题一般先列出算式或建立函数关系式,通过算式大小的比较或函数最值的确定做出相应的决策.

**例2** (河北省中考题)某工厂现有甲种原料360 kg,乙种原料290 kg,计划利用这两种原料生产A、B两种产品,共50件,已知生产一件A种产品,需用甲种原料9 kg、乙种原料3 kg,可获利润700元;生产一件B种产品,需用甲种原料4 kg、乙种原料10 kg,可获利润1 200元.

(1) 按要求安排A、B两种产品的生产件数,有哪几种方案?请你设计出来.

(2) 设生产A、B两种产品获总利润是 $y$ 元,其中A种的生产件数是 $x$ ,

试写出  $y$  与  $x$  之间的函数关系式, 并利用函数的性质说明(1)中的哪种生产方案获总利润最大? 最大利润是多少?

**解** (1) 设安排生产 A 种产品  $x$  件, 则生产 B 种产品  $(50 - x)$  件, 由题意, 得

$$9x + 4(50 - x) \leq 360, \quad 3x + 10(50 - x) \leq 290$$

所以  $30 \leq x \leq 32$ .

因为  $x$  是整数, 所以  $x$  只能取 30, 31, 32, 相应的  $(50 - x)$  的值是 20, 19, 18. 所以生产方案有三种, 即:

第一种方案: 生产 A 种产品 30 件, B 种产品 20 件;

第二种方案: 生产 A 种产品 31 件, B 种产品 19 件;

第三种方案: 生产 A 种产品 32 件, B 种产品 18 件.

(2) 略.

**评析** 这类决策型试题的解答关键是要把实际问题转化成数学模型, 运用不等式逼近答案.

## 二、探索型题

探索型题一般没有明确的结论, 没有确定形式和方法, 要求学生通过自己的观察、分析、比较、概括得出结论, 形成方法和思路. 探索型题分为结论探索型和是否存在型两类. 这类问题是培养学生创新精神和实践能力, 考查学生分析和解决问题能力的重要题型, 在近几年中考中显得十分活跃, 是中考的难题.

**例 3** (2001 大连中考题) 如图 1, 在直角坐标系中,  $E$  为第二象限内一点.  $\odot E$  与  $x$  轴自左至右交于  $A$ 、 $B$  两点. 直线  $PC$  切  $\odot E$  于点  $C$ , 交  $x$  轴于点  $P$ .  $D$  为线段  $PC$  上一点,  $ED \perp BC$ , 已知  $PB = 2$ ,  $\triangle PBD$  的周长为  $2 + 2\sqrt{3}$ .

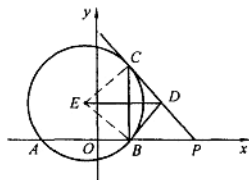


图 1

(1) 求证:  $DB$  是  $\odot E$  的切线.

(2) 若抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2m$  经过

$A$ 、 $B$  两点, 求  $m$  的值.

(3) 在过点  $P$  的直线中, 是否存在这样的直线, 该直线与(2)中的抛物线的两个交点的横坐标之和等于 2? 若存在, 求出这样的直线的解析式; 若不存在, 请说明理由.

(1) 证明 连结  $CE$ 、 $BE$ , 可证  $\triangle CED \cong \triangle BED$ , 则  $\angle EBD =$

$\angle ECD = 90^\circ$ , 故  $DB$  是  $\odot E$  的切线.

(2) 解 由  $DC = DB, PB = 2, \triangle PDB$  的周长为  $2 + 2\sqrt{3}$ , 则  $PC = PD + DC = PD + DB = 2\sqrt{3}$ . 又  $PC^2 = PB \cdot PA$ , 即  $PA = \frac{PC^2}{PB} = 6$ , 则  $AB = PA - PB = 4$ . 而抛物线过  $A, B$  两点, 设  $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ , 则  $x_1 + x_2 = -2, x_1 \cdot x_2 = -4m$ . 所以  $AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 4$ , 即  $m = \frac{3}{4}$ .

(3) 解 不存在, 假设存在过点  $P$  的直线  $y = kx + b$  符合题目的条件. 由(2)知  $m = \frac{3}{4}$ , 即  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ . 令  $y = 0$ , 得  $x_1 = -3, x_2 = 1$ , 即  $A(-3, 0), B(1, 0), P(3, 0)$ . 因直线  $y = kx + b$  过点  $P(3, 0)$ , 则有  $b = -3k$ , 即  $y = kx - 3k$ . 联立方程组  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \\ y = kx - 3k \end{cases}$ , 得  $\frac{1}{2}x^2 - (k-1)x + (3k - \frac{3}{2}) = 0$ . 此时  $\Delta = (k-1)^2 - 4 \times \frac{1}{2}(3k - \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}(k-2)^2 - 4 = \frac{1}{2}(k-2)^2 - 4$ , 又  $x_1 + x_2 = -\frac{-(k-1)}{\frac{1}{2}} = 2(k-1)$ , 即  $k = 2$ . 所以,  $\Delta = -8 < 0$ , 即方程无实数根, 也就是上述方程组无解, 故满足题目条件的直线不存在.

评析 在(1)中, 连结  $CE, BE$ , 即有两个半径. 寻找  $\angle EBD = 90^\circ$  是证明直线是圆的切线的常用方法. (2) 运用  $AB = |x_1 - x_2|$  对求  $m$  值帮助很大, 也是常用技巧. 在(3)中借用  $\Delta < 0$  来判断方程组无解, 进而确定直线的不存在.

### 变式训练

(2001 武汉中考题) 如图 2, 关于  $x$  的二次函数  $y = x^2 - 2mx - m$  的图象与  $x$  轴交于  $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$  两点 ( $x_2 > 0 > x_1$ ), 与  $y$  轴交于点  $C$ , 且  $\angle BAC = \angle BCO$ .

(1) 求这个二次函数的解析式.

(2) 以点  $D(\sqrt{2}, 0)$  为圆心作  $\odot D$ , 与  $y$  轴相切于点  $O$ , 过抛物线上一点  $E(x_3, t) (t > 0, x_3 < 0)$  作  $x$  轴的平行线与  $\odot D$  交于  $F, G$  两点, 与抛物线交于另一点  $H$ , 问是否存在实数  $t$ , 使得  $EF + GH = FG$ ? 如果存在, 求出  $t$  值; 如果不存在, 请说明理由.

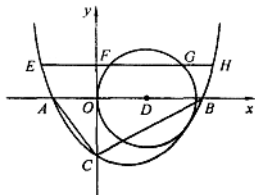


图 2



答案:(1) $y = x^2 - 2x - 1$  (2)存在, $t = \frac{\sqrt{97} - 1}{8}$ .

### 三、与图形位置有关的问题

**例4** (2001济南中考题)如图3,等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$ ,以边 $BC$ 所在的直线为 $x$ 轴,边 $BC$ 上的高线 $AO$ 所在的直线为 $y$ 轴建立平面直角坐标系.

(1)求过 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三点的抛物线的解析式.

(2)设 $\odot P$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,分别切 $AB$ 、 $AC$ 于点 $E$ 、 $F$ .求阴影部分的面积.

(3)点 $D$ 为 $y$ 轴上一动点,当以点 $D$ 为圆心,3为半径的 $\odot D$ 与直线 $AB$ 、 $AC$ 都相切时,试判断 $\odot D$ 与(2)中 $\odot P$ 的位置关系,并简要说明理由.

(4)若(2)中 $\odot P$ 的大小不变,圆心 $P$ 沿 $y$ 轴运动.设点 $P$ 坐标为 $(0, a)$ ,则 $\odot P$ 与直线 $AB$ 、 $AC$ 有几种位置关系?并写出相应位置关系时 $a$ 的取值范围.

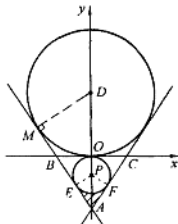


图3

**略解** (1)易求 $B(-\sqrt{3}, 0)$ 、 $C(\sqrt{3}, 0)$ ,则 $A(0, -3)$ ,所以过 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三点的抛物线解析式为 $y = x^2 - 3$ .

(2)连结 $PE$ 、 $PF$ ,则有 $\text{Rt}\triangle PEA \sim \text{Rt}\triangle BOA$ ,即 $\frac{PE}{BO} = \frac{PA}{AB}$ .设 $\odot P$ 的半径为 $r$ ,所以 $\frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{3-r}{2\sqrt{3}}$ ,即 $r = 1$ ,且 $\angle EPA = 60^\circ$ ,所以

$$S_{\text{阴影}} = 2 \times \frac{1}{2}(\sqrt{3} \times 1 - \frac{\pi}{6} \times 1^2) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$$

(3)设 $\odot D$ 切 $AB$ 于点 $M$ ,连结 $DM$ ,则 $DM \perp AB$ ,所以 $AD = 2DM = 6$ , $DP = DA - PA = 4$ ,即 $DP = R + r = 3 + 1 = 4$ ,则 $\odot P$ 与 $\odot D$ 相外切;或 $DP = DA + PA = 8$ ,即 $DP > R + r = 3 + 1 = 4$ ,则 $\odot P$ 与 $\odot D$ 外离.

(4)当 $P(0, -1)$ 或 $P(0, -5)$ ,即 $a = -1$ ,或 $a = -5$ 时, $\odot P$ 与直线 $AB$ 、 $AC$ 都相切.当 $-5 < a < -1$ 时, $\odot P$ 与 $AB$ 、 $AC$ 相交.当 $a > -1$ 或 $a < -5$ 时, $\odot P$ 与 $AB$ 、 $AC$ 相离.

**评析** 本题虽然建立在平面直角坐标系中,但求解的每一步都离不开几何知识,这种数形结合的思想方法是解这类问题的灵魂.