

中学数学知识丛书

[日] 横地 清 编

寻找比例关系



知识出版社

中学数学知识丛书

〔日〕横地 清 编

寻找比例关系

〔日〕北川英夫 著
文富泰宏
史宁中 译

知 识 出 版 社

中学数学知识丛书

寻找比例关系

〔日〕北川英夫 著
大富泰宏

史宁中 译

知识出版社出版

(北京阜成门北大街17号)

新华书店总店北京发行所发行 北京景山学校印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张2.625 字数 52千字

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数: 1—2300

统一书号: 13214·45 定价: 0.75元

ISBN 7-5015-0172-6

内 容 提 要

本书是日本横地清教授为青少年数学爱好者编写的一套初等数学知识丛书，共35本。这套丛书的特点是通过日常生活中经常遇到的具体现象的分析来讲述初等数学提高青少年学习数学的兴趣，《寻找比例关系》一书首先从人们周围的若干事物中找出函数关系，画出函数的图象，从中归纳出正比例、平方比例、立方比例、反比例等。内容生动便于初中文化水平的广大读者阅读。

前 言

以“寻找比例关系”作为题目，并不意味着本书仅仅把比例关系作为研究的对象。在大家日常生活中，无论是在家，在上学路上，还是在学校，都含有许多数学问题。从中可以找到与函数有关的东西，学习到各种各样形式的函数。

然后，画出函数的图象，可以使函数的性质一目了然。从这些函数中可以归纳出正比例，平方比例，立方比例，反比例，平方反比例等比例关系。

教科书中的比例关系，是从函数关系式的定义开始的，接着是画图象，最后代入数值进行计算。这样只是给出了比例关系，大家体会不到从实际中提炼数学的趣味性。因此本书的目的，希望大家能够从日常生活经常遇到的一些事情中找出数学，进而体会到从实际中抽象出数学的乐趣。

本书的用法

在日常生活中，随着时间的变化而变化的事情很多。比如，把水倒进玻璃杯里放到阳光下，水就会蒸发。可以在我们周围的事物中，找出象时间那样的独立变量(自变量)和伴随这个量一起变化的因变量，而求得函数。本书给出了各种例子，请大家也拿着秒表，实际测定一些现象找出函数。这时要注意的是，如果仅仅测定一次，数据不一定很准确，最好重复多次取其平均。

然后就是建立函数关系式。先要画出图象，观察变化情况，通过图象建立函数关系式也就比较容易了。

因为例题大多数都是取材于身边发生的事情，请大家也实践一下，重复做书中的例题也可以。这样一定能够体会出数学的乐趣，同时也把从实践中提炼数学的方法学到手了。

大家一定会对学习数学产生浓厚的兴趣。

目 录

前言

本书的用法

第一章 寻找变量..... (1)

§ 1 变化的量..... (2)

§ 2 变化范围..... (6)

第一章小结..... (9)

测验题..... (10)

测验题解答..... (11)

第二章 变化·对应·图象..... (13)

§ 1 两个变量..... (14)

§ 2 变化与对应..... (18)

(1) 对应图..... (18)

(2) 图象..... (19)

§ 3 各种函数..... (25)

(1) 区间变化率..... (25)

(2) 增函数..... (29)

(3) 减函数..... (30)

(4) 常值函数..... (32)

(5) 周期函数..... (35)

第二章小结..... (40)

测验题..... (41)

测验题解答.....	(42)
第三章 正比例	(45)
§ 1 正比例.....	(46)
§ 2 平方比例.....	(50)
§ 3 立方比例.....	(56)
第三章小结.....	(62)
测验题.....	(62)
测验题解答.....	(63)
第四章 反比例	(65)
§ 1 乘积不变.....	(66)
§ 2 平方反比例.....	(69)
第四章小结.....	(74)
测验题.....	(75)
测验题解答.....	(75)

第一章 寻找变量



仔细地观察自然现象，会发现有一些是不变的，但变化的是大量存在的。比如，在一天里不断地测量气温，气温会有所升高或下降；在园子里种花，过些日子就会吐芽，渐渐地长大，最后开花结果。

在我们的生活中也是这样，不断变化的东西是大量存在的。比如，在卖果汁等饮料的铺子里，库存的瓶数会逐渐减少，到一定时候从饮料厂采购回来后，库存数又会突然增多。

在本章，要研究这种“变化的东西”。

§1 变化的量

在研究“变化的东西”时，对各种现象或问题，首先要搞清楚什么是变化的东西，什么是不变化的东西，如果不能明确地加以区别，将会出现很大的差错。所以，先学习怎样区别什么是变的，什么是不变的。

【例题1】 西田君把长为5.5cm,直径为0.5cm的蜡烛点燃，每过1分钟测量一次剩余部分的长度，测量结果见下表。15分20秒时，蜡烛燃尽。

时间(分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	15.20
长 (cm)	5.5	5.2	4.8	4.5	4.1	3.8	3.5	3.2	2.8	2.5	2.0	1.6	1.3	1.0	0.5	0.1	0

1-1 点燃的蜡烛长度

现在，看看什么是变化的东西，什么是不变的。

【解】 随着时间的增加，剩余部分的长度渐渐地变短了。

(变化的东西)

- 时间
- 蜡烛剩余部分的长度
- 蜡烛燃去部分的长度

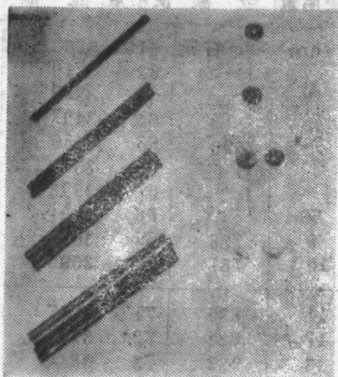
(不变化的东西)

• 蜡烛剩余部分与燃去部分的长度之和，总是与蜡烛原来的长度相等，是不变的。

• 到燃烧9分钟时，每3分钟燃去的长度为1.0cm，9分钟以后，每3分钟燃去1.2cm。把燃烧的时间分为9分钟以

前和以后两部分,那么可以认为前半部分每3分钟燃烧1.0cm是不变化的,后半部分每3分钟燃烧1.2cm也是不变化的。

【例题2】 50日元一根的铅笔,买2根要花100日元,3根要花150日元,4根要花200日元。对于这个问题,看一下什么是变化的,什么是不变化的。



【解】 买铅笔2根、3根、4根,则相应的钱数为100日元,150日元,200日元,是变化的。但是,每根铅笔的价格50日元是不变的。

1-2 铅笔的根数与其钱数

(变化的东西)

- 买铅笔的根数
- 买铅笔所花的钱数

(不变化的东西)

- 1根铅笔的价格50日元

【例题3】 观察家庭使用的煤气。

烧开水、做饭是每天生活不可缺少的,这些都要使用煤气。使用煤气就必须交煤气费。下面的表格是大阪市煤气费的价格表。

分析一下其中什么是变化的东西,什么是不变化的东西。

【解】 各个家庭每个月交的煤气费是不同的,因为煤气的使用量不同。但另一方面,由煤气费一览表知,使用量

煤气费一览表 (包括税金)

煤气税2% (4,000日元以下免税)

1977年2月1日实施

使用量	金 额	使用量	金 额	使用量	金 额	使用量	金 额
0m ³	日元	61m ³	3262日元	121m ³	6296	181m ³	9266
		62	3310	122	6346	182	9316
		63	3359	123	6395	183	9365
		64	3407	124	6445	184	9415
	690	65	3456	125	6495	185	9464
		66	3504	126	6544	186	9514
		67	3553	127	6594	187	9563
8		68	3601	128	6643	188	9613
9	738	69	3650	129	6693	189	9662
10	787	70	3698	130	6742	190	9712
11	835	71	3747	131	6792	191	9761
12	884	72	3795	132	6841	192	9811
13	932	73	3844	133	6891	193	9861
14	981	74	3892	134	6940	194	9910
15	1029	75	3941	135	6990	195	9960
16	1078	76	3990	136	7039	196	10009
17	1126	77	4118	137	7089	197	10059
18	1175	78	4168	138	7137	198	10108
19	1223	79	4217	139	7187	199	10158
20	1272	80	4267	140	7236	200	10207

1-3 煤气费一览表 (部分)

在0m³到8m³时, 煤气费都是690日元(基本费用), 是不变的。

(变化的东西)

- 煤气使用量
- 煤气费

(不变化的东西)

- 煤气的基本费用

在各种现象与问题中, 变化的东西称为“变量”, 不变化的东西称为“常量”。

如果有几个变量，其中一个变量（比如是 x ）确定后，其它的变量（比如是 y ）也随之确定时，把最初确定的变量称为“独立变量(自变量)”，而随之确定的变量称为“因变量”。

〔例题1〕中 自变量：时间

因变量：蜡烛剩余部分的长度

蜡烛燃去部分的长度

〔例题2〕中 自变量：铅笔的根数

因变量：买铅笔花的钱数

〔例题3〕中 自变量：煤气的使用量

因变量：煤气费

【问1】 削一根长度为20.5cm的铅笔时，自变量是什么，因变量是什么？常量又是什么？

【问2】 暑假时，山口君测定了一天的气温。这时，自变量是什么，因变量是什么？是否有常量？

【问3】 某商店卖500日元100g的茶叶。观察卖茶叶的情况，什么是自变量，什么是因变量？是否有常量，如果有的话，数值是多少？

【答】 〔问1〕 自变量：削去的长度

因变量：剩下的铅笔长度

常量：铅笔最初长度20.5cm

〔问2〕 自变量：时刻

因变量：气温

常量：没有

〔问3〕 自变量：买茶叶的 g 数

因变量：买茶叶交的钱数

常量：1g茶的价格5日元

§2 变化范围

〔例题1〕中，长度为5.5cm的蜡烛15分20秒燃尽。可见变量有其变化的范围。在〔例题2〕中，出现的是铅笔的根数，所以这个数必然是自然数，而不能是小数或者分数。

现在，详细地讨论变量的变化范围和性质。



1-4 银行的卷帘式铁门

【例题4】 池田市某银行的入口处，有一个宽为3.5m，高为2.8m的电动卷帘式铁门。上午9时前2、3分钟开电门，铁门完全打开需要53秒钟的时间。现在来讨论这个问题。

【解】 自变量是时间，记为 x (秒)。因为开铁门一共用

了53秒钟，则可以记为

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 53\}$$

这样，可以考虑自变量为一个集合，称这个自变量的集合为“定义域”。

把地面到铁门的高度看作一个因变量，记为 y (cm)。因为最高高度为280cm，则 y 的变化范围可记为

$$\{y \mid 0 \leq y \leq 280\}$$

这样，也可以把因变量作为一个集合来考虑，称这个因变量的集合为“值域”。

还有其它因变量，比如“可见部分铁门的面积”。若记这个面积为 S (cm²)，最大面积为 280×350 (cm²)， S 的变化范围如下

$$\{S \mid 0 \leq S \leq 280 \times 350\}$$

因为 S 的集合也是因变量的集合，是值域。

把变量的变化范围，比如定义域和值域称为“变域”。

下面来讨论变量的性质。定义域

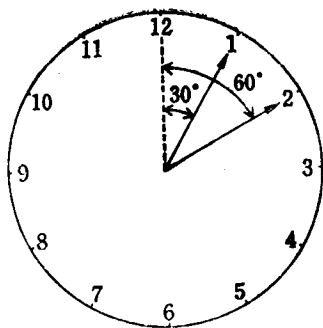
$$\{x \mid 0 \leq x \leq 53\}$$

是表示时间由0秒变化到53秒，所以可以取这个变域内的所有数值。这时，称 x 在 $0 \leq x \leq 53$ 上是“连续”的，变量 x 称为“连续变量”。

同样，变量 y 在 $0 \leq y \leq 280$ 上是连续的， y 是连续变量。

【例题5】 眼睛盯着时钟，考查从9点到10点这段时间，长针行走的情况。

【解】 9点正，长针指在刻度盘的12处；9点5分，长针旋转 30° 角，指在1处；9点10分，长针再旋转 30° 角指在2处。每过5分钟长针旋转 30° 角，也就是每过1分钟长



1-5 时钟长针的运动

针旋转 6° 角。那么，知道了 9 点过几分钟，就可以知道长针从 12 开始旋转了多大的角度。若设时间是 9 点 x 分， x 分钟内长针从 12 开始旋转 y° 角，则 x 是自变量，其变域即定义域是从 9 点到 10 点的 60 分钟：

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 60\}$$

y 是因变量，其变域即值域是长针由 9 点到 10 点转了一圈，

换句话说，就是转了 360° 角：

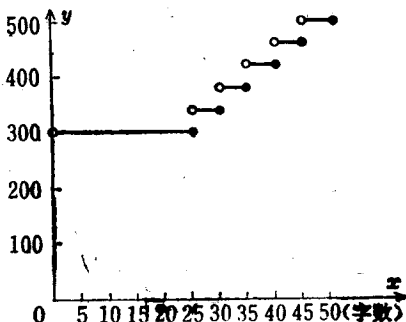
$$\{y \mid 0 \leq y \leq 360\}$$

因为时间是持续不断的，所以 x 是连续变量。同样，角度随着时间连续变化， y 也是连续变量。并且， y 可以由 x 表示如下

$$y = 6x$$

【例题6】 普通电报费，25个字以下300日元，30个字以下340日元，35个字以下380日元，40个字以下为420日元。每多5个字，电报费增加40日元。考虑字数与电报费之间的关系。

【解】 字数与电报费之间的关系如右图所示。



1-6 电报的字数与费用

图中○——●表示不包含○所对应的字数，包含●所对应的字数。

字数 x 为自变量，电报费 y 为因变量。

定义域为 $\{x|x \text{ 为自然数}\}$

值域为 $\{300, 340, 380, 420, 460, 500, \dots\}$

从定义域、值域以及图1-6可以看到，与〔例题4〕、〔例题5〕不同，变量不是连续的。

【问4】 把〔例题1〕的定义域（时间 x 分），值域（蜡烛剩余部分的长度 y cm，燃去部分的长度 z cm）用式子表示出来。

【问5】 若 $y = 3x$ ， $-1 \leq x \leq 3$ ，求值域。

【问6】 若 $y = -2x$ ， $1 \leq y \leq 3$ ，求定义域。

【答】 〔问4〕 $0 \leq x \leq 15 \frac{1}{3}$

$$0 \leq y \leq 5.5$$

$$0 \leq z \leq 5.5$$

$$〔问5〕 -3 \leq y \leq 9$$

$$〔问6〕 -\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

第一章小结

变量与常量：在各种各样的现象或问题中，就数量来说，变化的称为“变量”，不变化的称为“常量”。

自变量与因变量：在有两个以上变量的现象或问题中，这些变量之间存在着某种关系，其中一个变量的值确定后，与之对应的其它变量的值也确定。这时，把前者称为