华罗庚少年数学丛书

华罗庚少年数学

第二集

华罗庚少年数学丛书编委会编

知识出版社

华罗庚少年数学丛书

华罗庚少年数学

第二集

华罗庚少年数学丛书编委会编

知识出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚少年数学　第2集/华罗庚少年数学丛书编委会编 .
- 北京:知识出版社,1998.2
(华罗庚少年数学丛书)
ISBN 7-5015-1658-8

Ⅰ. 华…　Ⅱ. 华…　Ⅲ. 数学 - 少年读物　Ⅳ. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 05127 号

知识出版社出版发行
(北京阜成门北大街 17 号　邮编 100037)
北京图文印刷厂印刷　　新华书店总店北京发行所经销
开本 787×1092　1/32　印张 5　插页 2　字数 85 千字
1998 年 2 月第一版　1998 年 2 月第一次印刷
印数 1～18000
定价:5.80 元

写在前面的话

华罗庚少年数学丛书编委会

亲爱的读者，为了大家能及时搜集、整理第六届“华杯赛”详细资料，并为迎接第七届“华杯赛”作好必要准备；华罗庚少年数学丛书编委会在“华杯赛”组委会的直接领导和大力支持下，经过半年的紧张努力，编集了《华罗庚少年数学第二集》，作为新年的一份薄礼奉献给大家。

《华罗庚少年数学第二集》，吸取了第一集的经验，保持发扬“大教授”辅导“小学生”的特色；广泛听取了各界的意见、建议，使本集内容更符合实际需要，增强了可读性，提高了使用和保存的价值。

在“‘华杯赛’园地”里，汇集了全国第六届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛从初赛、复赛到决赛的全部试题及其分析、解答。如大家能动手做一做，动脑想一想，一定会获得比参赛选手更多的收获。在这一栏中，“再谈‘华杯赛’试题命题思路——建模与反建模”一文，是中国科学院数学研究所研究员、“华杯赛”主试委员会副主任委员、本丛书编委会顾问余其煌先生特意为大家撰写的，好好读一读，一定能从中体悟到主试们的命题思想及其命题的规律。使“华杯赛”这块园地，成为教练们辅导、培训的基地，成为广大少年朋友学习数学的乐园。

在“怎样学好数学”一栏里，北京师范大学数学系教授、本丛书编委会常务编委亦金老先生为大家怎样学好数学写了“要善于从错误中学习”的文章；如果结合第一集中“勤于思考，善于思考”一文，必然会使少年朋友在学习数学的过程中，从正、反两方面汲取经验教训，以提高学习数学的效果。

数学问题的千变万化，常令解题的人不知对策；万千的题解有否规律可循，更令广大读者苦思冥索。大家不妨读读“解题思路及策略”栏目中的文章，无论“从一道题目所想到的”，从解题中出现矛盾，“《这是巧合吗？》——一道有趣的相遇问题”直至矛盾的迎刃而解，还是从正面阐述“浅谈‘转化思想’在解题中的运用”，都将给人以启迪。或许大家通过阅读这些文章，再结合自己在解题过程中的经验教训，可探究出属于自己的、行之有效的解题思路和策略，这是多么有意义的事啊！

如果说课堂是大家掌握数学基础知识和技能的主战场，那么数学竞赛的赛场则是灵活、综合运用“双基”，发展智力和提高能力的前沿阵地。“从课堂到赛场”一栏，将引导大家如何利用课堂练本领、试身手，然后积极主动地冲向前沿，去拼搏，去获取成功。

在“数学家与数学史”栏目中向广大少年朋友介绍了伟大数学家欧拉。确实“他是我们一切人的老师”。大家无不敬慕欧拉在数学领域的伟大贡献，那么，他是如何从小立志攻读数学，怎样克服常人连想都不敢想的困难？大家认真读读，肯定会受到激励，得到鞭策。

《华罗庚少年数学第二集》，还为广大读者介绍了最近国外少年数学竞赛的试题，并请参赛队的教练、主试委员会委员教师作了解析，以供大家借鉴。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

愿《华罗庚少年数学第二集》成为广大少年朋友的良师，成为教练、老师的益友。

今天，《华罗庚少年数学第二集》和大家见面了，而为《丛书》作出贡献的陶懋颀教授却永远地离开了我们。在此，我们怀着沉痛的心情悼念陶懋颀教授。他生前作为“华杯赛”主试委员会副主任委员、本丛书编委会常务编委，为弘扬“华罗庚精神”，倾注心血，兢兢业业地工作；为广大少年朋友服务，满腔热忱、不遗余力。他认真负责、一丝不苟的工作精神将永远激励和鞭策着我们，我们永远怀念他。

目　　录

再谈"华杯赛"试题命题思想
——建模与反建模

余 其 煌

小学数学竞赛的目的之一是激发同学们的学习热情，提高同学们的学习兴趣。因此，试题应具新颖、有趣味，与实际生活紧密相关的问题往往有这样的特征。所以深入地观察生活是十分重要的。如何从观察得到的资料加工、提高成为新颖有趣的试题呢？另外，现在数学试题、练习题已十分之多，也是可以用来设计新颖、有趣试题的宝贵资料。这里也有如何利用这些资料的问题。本文的目的是探讨利用已有资料设计新颖、有趣试题的一种方法——建模与反建模。

我们这里的"建模"是指将一个实际问题抽象成一个数学问题(关于形和数的问题)的过程。如

例 1 慢车 8:00 从甲站出发开往乙站，快车 11:00 从乙站出发开往甲站，13:00 相遇。若二车到达目的地时，时钟的分针都指在 12 上，问快、慢二车到达的时间。

这一问题看成已有的资料，首先列方程，设行驶全程快车需 x 小时，而慢车需 y 小时，x、y 为正整数，两站的距离为 1。那么依题意有：

$$\begin{cases} 1=(13-8)\times\dfrac{1}{y}+(13-11)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{y}+\dfrac{2}{x} \\ x<y \end{cases} \tag{1}$$

从例 1 到问题(1)的过程就称为“建模”，而数学问题(1)就叫做例 1 的数学模型。

模型(1)是一个纯数学问题，我们可以对它进行加工改造，诸如改换数字，增减项数，等号不等号互换，提反问题等等。(1)中的方程可作如下变型：

$$1=\frac{x}{4}+\frac{3+x}{y},\qquad x、y\text{ 为正整数} \tag{2}$$

$$1=\frac{2}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z},\qquad x、y、z\text{ 为正整数} \tag{3}$$

$$0.4>\frac{xy}{x+y+1+xy},\qquad x、y\text{ 为正整数} \tag{4}$$

等等。这些变形都是纯数学上的变化。为了设计出新颖有趣的试题，就必须将它们与实际生活联系起来。也就是说，要设计出实际生活问题，它们以(2)，(3)，(4)为数学模型。这样的过程我们就叫“反建模”。

通过反建模，我们可以设计出与原来例 1 完全不同的问题来。最简单的是对(1)不作任何变形就可以提出如下问题：

例 2 甲、乙二水管都可以用整数小时注满水池，现甲管先注 2 小时关闭，乙管再注 5 小时，将水池注满。问：当它们分别注水时，各需多少小时将水池注满？

对于模型(2)，可做如下反建模。

例 3 快车 4 小时走完全程。慢车从甲站出发到乙站，3 小时后，快车从乙站出发到甲站，若乙车驶完全程所需的时间是整数小时，问：快车出发后多少小时与慢车相遇？

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

如果设慢车驶完全程用 y 小时，快车出发后 x 小时与慢车相遇，那么就得到方程(2)。

问题已经设计出来，下面就是求解。求解的方法应是小学生所能理解的，解也应是唯一的。首先等式两边除以 $3+x$

$$\frac{1}{3+x}=\frac{x}{4(3+x)}+\frac{1}{y},\quad \frac{1}{y}=\frac{4-x}{4(3+x)}$$

$$y=\frac{12+4x}{4-x}=\frac{12+4x-16+16}{4-x}=\frac{28}{4-x}-4$$

所以

$$(y+4)(4-x)=28=2\times 14$$

由于 $y+4,4-x$ 都是正整数，所以 $x=2,y=10$。

可以看出，解法是小学生能够接收的，好的学生也是能掌握的，解也是唯一的。

写到这里，读者可以看出，例 3 还可以改成其他的应用问题，如工效问题。

下面我们再看模型(4)。要设计出以(4)为模型联系实际的问题，还要作进一步的探讨。

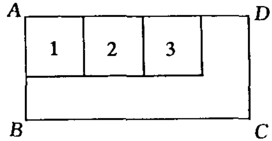
首先将(4)变形

$$xy<0.4(x+y+1+xy)=0.4(x+1)(y+1) \qquad (5)$$

(5)式用了因式分解，但这不是由同学来完成。将(5)再改造成

$$xy\leqslant 0.4(x+p)(y+q),\ 0\leqslant p,q<1 \qquad (6)$$

利用(6)式，我们设计一个图形，$ABCD$ 是长方形，标有 1，2，3 的边长为 1 的正方形，在 $ABCD$ 中只能放 3 个正方形，不能多放。如果被正方形



所覆盖的面积不超过40%,那么就有如下问题:

例4 用边长为1的正方形按如下方法覆盖长方形 $ABCD$:

①正方形的任何部分不能在长方形之外;

②任何两个正方形除了边和顶点外,不能有重叠部分。

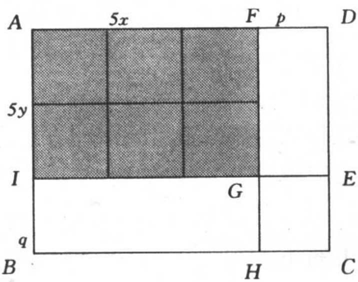
若无论怎样放,被正方形覆盖的面积都不超过40%,问:$ABCD$ 的面积最大不能超过多少?最小可能是多少?

设 $ABCD$ 的长为 $y+q$,宽为 $x+p$,x,y 为正整数,p,q 是正小数。显然,在长方形 $ABCD$ 中可放入 x 行,每行 y 个正方形。因此有:

$$xy \leqslant 0.4(x+p)(y+q) < 0.4(x+1)(y+1)$$

这就是模型(4),为了小学生能理解和思考起来感到更有趣,我们将例4改为:

例5 一批大小略有不同的长方体盒子,它们的高都等于6厘米,长和宽都大于5厘米,且长宽比不小于2。若在任一盒子中放一层边长为5厘米的小立方体,无论怎样放,放完后被小立方体所覆盖的底面积都不超过原底面积的40%,现往盒子中注水,问:①要使得最小的盒子不往外溢,最多能注多少立方厘米水?②要使得最大的盒子开始往外溢,最少要注进去多少立方厘米的水?



解法一: 将盒子的底面画出来,如图。

$AI=5y$, $AF=5x$,x,y 为正整数,

$FD = p$，$EC = q$，$0 \leqslant p, q < 5$

底面可分成四个长方形：

$AIGF, IBHG, HCEG, GEDF$, $AIGF$ 被 xy 个小长方体覆盖，面积为 $25xy$, $IBHG, HCEG, GEDF$ 是未被覆盖的部分。它们的面积分别有关系式：

$S_{IBHG} < 25x$，　　$S_{HCEG} < 25$，　　$S_{GEDF} < 25y$

由题意，

$$25xy < 0.4(25x + 25y + 25 + 25xy)$$

或

$$xy < 0.4(x + y + 1 + xy)$$

$$0.4 > \frac{xy}{x + y + 1 + xy} = \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + 1} \qquad (*)$$

若 x, y 都不小于 2，则 $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + 1 < \frac{9}{4} < \frac{1}{0.4}$，不可能。

所以 $y = 1$，代入$(*)$

$$0.4 > \frac{1}{2 + \frac{2}{x}}$$

若 $x \geqslant 4$，由上式，$0.4 > \frac{2}{5}$不可能。所以 $x \leqslant 3$，若 $x = 2$，则因长宽比不小于 2，$10 + p \geqslant 10 + 2q$，$q \leqslant \frac{p}{2}$。由覆盖题设，

$$25xy = 50 \leqslant 0.4(10 + p)(5 + q) \leqslant 0.4(10 + p)(5 + \frac{p}{2})$$
$$< 0.4 \times 15 \times 7.5 = 45$$

不可能。

当 $x = 3$ 时，满足条件。所以 $x = 3$。

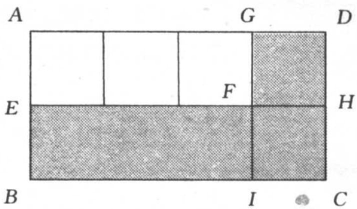
底面积 $=(15+p)(5+q)<20\times10=200$(平方厘米)。

容积 <1200(立方厘米)。

另外，$25xy=75\leqslant0.4\times$ 底面积。所以，底面积 $\geqslant\frac{375}{2}$。容积 $\geqslant1125$ 立方厘米。

答: 当注水 1200 立方厘米时,水一定外溢。要保证水不外溢,最多只能注进 1125 立方厘米的水。

解法二: 设从长边看,放有 x 个小立方体;从宽边看,放有 y 个小立方体,且再也放不进去了。盒子的长为 $(5x+p)$ 厘米,宽为 $(5y+q)$ 厘米,$x,y\geqslant1$,$p,q<5$。



由题设,

$$25xy\leqslant0.4(5x+p)(5y+q),$$

即
$$25\leqslant0.4(5+\frac{p}{x})(5+\frac{q}{y}) \qquad (**)$$

由于 $5x+p\geqslant2(5y+q)$,

$x\geqslant2y+\frac{2}{5}q-\frac{p}{5}>2y-\frac{p}{5}>2y-1$。由于 x 是正整数,所以,$x\geqslant2y$,代入 $(**)$,

$$25<0.4(5+\frac{p}{2y})(5+\frac{q}{y})<0.4(5+\frac{5}{2y})(5+\frac{5}{y}),$$

$$1<(1+\frac{1}{2y})(1+\frac{1}{y})。$$

若 $y\geqslant2$, $1\leqslant0.4(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{2})=0.75$,不可能。所以 $y=1$,代入(1),若 $x>4$,则

$1<0.4(1+p/5x)(1+q/5)<0.4(1+1/x)(1+1)<1$，
不可能。

所以 $x\leqslant 3$，若 $x=1, 5+p\geqslant 10+2q, p\geqslant 5+2q\geqslant 5$，不可能。

若 $x=2$，$10+p\geqslant 10+2q$，$q\leqslant \frac{p}{2}$，由覆盖题设：

$$25xy=50\leqslant 0.4(10+p)(5+q)\leqslant 0.4(10+p)(5+\frac{p}{2})$$
$$<0.4\times 15\times 7.5=45,$$

不可能。当 $x=3$ 时，满足条件。所以 $x=3$。

底面积 $=(15+p)(5+q)<20\times 10=200$（平方厘米）。

容积 <1200（立方厘米）。

另外，$25xy=75\leqslant 0.4\times$ 底面积。所以，底面积 $\geqslant \frac{375}{2}$。容积 $\geqslant 1125$ 立方厘米。

答：当注水 1200 立方厘米时，水一定外溢。要保证水不外溢，最多只能注进 1125 立方厘米的水。

显然，从求解过程可以看出，条件长：宽 $\geqslant 2$ 是为了解的唯一性。

最后，对于模型(3)，请读者自己设计，作为练习。

第六届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛
初赛试题

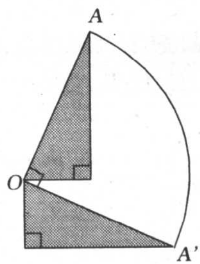
那 吉 生 等

1. 香港回归祖国之日是星期几？今天距回归之日还有多少天？（今天是1997年3月8日）

2. 请计算：

$$\frac{0.00325 \div 0.013}{(0.22-0.2065)\div(3.6\times 0.015)}$$

3. 如右图，以 OA 为斜边的直角三角形的面积是24平方厘米，斜边长10厘米，将它以 O 点为中心旋转 $90°$，问：三角形扫过的面积是多少？（$\pi=3.14$）



4. 两架天平，天平甲的左边放上 478×9763（重量单位，下同）的重量，右边放上4666514的重量，天平乙的左边放上 683×3725 的重量，右边放上2544175的重量。已知有一架天平是平衡的，问：是哪架天平？

5. 中山商场1996年销售的名人系列电脑，按台数统计每月销售量平均增长20%，96年12月销售了120台，按此速

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com