GAOZHONGSHUXUE
AOLINPIKE JINGSAIJIAOCHENG

浙江教育出版社

高中数学
奥林匹克
竞赛教程

配最新教材

高中数学

奥林匹克

竞赛教程

高中数学 奥林匹克竞赛教程

高中生物 奥林匹克竞赛教程

高中化学 奥林匹克竞赛教程

高中物理 奥林匹克竞赛教程

AOLINPIKE

ISBN 7-5338-5219-2

9 787533 852191 >

ISBN 7-5338-5219-2/G·5189

定 价：25.50元

高中数学奥林匹克竞赛教程

浙江省教育学会中学数学教学分会编写

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克竞赛教程/许芬英等编写. —杭州：浙江教育出版社，2004.6(2006.7 重印)

ISBN 7-5338-5219-2

Ⅰ.高… Ⅱ.许… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 015807 号

责任编辑 金蕾菊　　**责任校对** 雷　坚

封面设计 韩　波　　**责任印务** 程居洪

高中数学
奥林匹克竞赛教程

○ 编　　写：浙江省教育学会中学数学教学分会

○ 出版发行：浙江教育出版社

（杭州市天目山路 40 号　电话：0571-85170300-80828）

▷ 印　　刷：杭州富春印务有限公司

▷ 开　　本：787×1092　1/16

▷ 印　　张：28

○ 字　　数：560 000

○ 本次印数：5 000

○ 版　　次：2004 年 6 月第 1 版

▷ 印　　次：2006 年 7 月第 3 次印刷

▷ 书　　号：ISBN 7-5338-5219-2 / G·5189

○ 定　　价：25.50 元

前　言

高中数学课程改革的基本理念之一是提供多样课程，适应个性选择，使不同的学生在数学上得到不同的发展。由中国数学会组织的“全国高中数学联赛”正是为激发学生学习数学的兴趣，培养数学优秀人才，使有数学爱好的学生在数学上获得更好的发展。近几年高中数学竞赛的命题原则是“试题所涉及的知识范围不超出现行教学大纲”，并且竞赛试题分一、二两试。一试试题主要着眼于普及，重在考查数学的基础知识和基本技能，试题考查的方向和要求与高考综合性试题基本一致略微提高；二试着眼于提高，着重考查学生运用数学知识、方法解决实际问题的能力。因此近几年，这一群众性的数学竞赛活动越来越多地受到广大中学师生的欢迎，有越来越多的学校和师生加入到竞赛行列，迫切需要一本依据教学大纲，源于教材又高于教材，以教材内容、高考要求为起点，逐步上升到高中数学联赛一试、二试水平的竞赛辅教、辅学用书。为此，我会组织了我省有丰富竞赛辅导经验的特级教师、高级教师和奥林匹克竞赛教练员编写了本书。

本书分基础篇和提高篇两部分，其中前十一章为基础篇，主要根据高考和竞赛一试要求编写，后四章专题讲座为提高篇，根据二试要求编写。因此本书既可作为高考复习的提高用书，也可以作为竞赛辅导的同步教程，是高考和竞赛一试取得好成绩的保障，也是通向二试的阶梯。

本书内容涵盖最新的《高中数学教学大纲》的全部知识点，又不拘泥于大纲，与高中教材同步分章编写，每章设若干讲，每讲设[知识归纳]、[典型例题]、[方法导引与拓展]、[巩固练习]、[创新训练]五个栏目。[典型例题]突出代表性和新颖性，解法简捷、分析到位，便于教师辅导和学生自学；[方法导引与拓展]起到画龙点睛的作用；[巩固练习]题量适中，紧扣竞赛内容；[创新训练]精心选编竞赛佳题、新题，凸现创新、综合和实践能力的培养。

本书编委有王而冶、冯斌、许芬英、过伯祥、吴明华、张焕明、李学军、李世杰、李昌官、周伟扬、施雪云、施仁智、蔡水明。

本书由许芬英、胡建军和楼肇庆设计，其中第一、第七章由杭州学军中学郑日锋编写，第二章由宁波镇海中学黄维民编写，第三章由宁波镇海中学马洪炎编写，第四章、第十二章由杭州二中楼肇庆编写，第六章由杭州二中陈永毅编写，第五、第九章、第十四章由嘉兴一中沈兴权编写，第八章由宁波效实中学

胡建军编写，第十、第十一章由杭州学军中学冯定应编写，第十三章由嘉兴一中吕峰波、宁波镇海中学马洪炎编写，第十五章由诸暨中学斯理炯编写。模拟试卷由嘉兴一中、杭州二中、效实中学、学军中学、诸暨中学、镇海中学提供。全书由楼肇庆、胡建军、许芬英统稿。

本书凝聚着我省教师指导高中竞赛辅导的精华，希望能为广大师生提供有益的参考，并恳请读者使用过程中多提宝贵意见，使之更臻完美。

本次印刷时，对个别差错作了校正。

浙江省教育学会中学数学教学分会

2005 年 7 月

目　录

基础篇

提 高 篇

基础篇

第一章　集合与简易逻辑

第一讲　集合

知识归纳

集合是高中数学中一个重要的基本概念，学习集合，不仅应从本质上去理解与集合有关的概念、性质和运算法则，更重要的是在后续的学习中自觉地运用集合的语言和方法来表示各种数量关系，解决各种数学问题.

1. 集合的概念

要抓住元素这个关键，弄清集合里的元素是什么，注意集合的元素具有确定性、互异性和无序性，另外要掌握集合的表示方法——列举法、描述法、图示法.

2. 集合之间的关系及运算

对有关两个集合相等的问题，可利用集合相等的定义，转化为元素与集合的关系问题.

除课本上介绍的集合的交、并、补运算及运算律外，还有下面的两个运算律：

(1) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(2) 摩根律　$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

这两个运算律可以用文氏图验证.

3. 有限集的子集的个数

集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的子集共有 2^n 个，其中非空子集有 2^n-1 个，真子集也有 2^n-1 个.

4. 有限集的元素个数

有限集元素的个数有如下性质：

对任意两个有限集合 A,B，有 $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$. 由摩根律，设 U 是全集，U,A,B 是有限集，有 $\text{card}[\complement_U(A\cup B)]=\text{card}(U)-\complement_U A-\complement_U B+\complement_U(A\cap B)$.

一般地，对任意 n 个有限集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $\text{card}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n)=[\text{card}(A_1)+\text{card}(A_2)+\cdots+\text{card}(A_n)]-[\text{card}(A_1\cap A_2)+\text{card}(A_1\cap A_3)+\cdots+\text{card}(A_1\cap A_n)+\cdots+\text{card}(A_{n-1}\cap A_n)]+[\text{card}(A_1\cap A_2\cap A_3)+\cdots+\text{card}(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)]-\cdots+(-1)^{n-1}\text{card}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$.　①

$\text{card}[\complement_U(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)]=\text{card}(U)-[\text{card}(A_1)+\text{card}(A_2)+\cdots+\text{card}(A_n)]+[\text{card}(A_1\cap A_2)+\text{card}(A_1\cap A_3)+\cdots+\text{card}(A_{n-1}\cap A_n)]-[\text{card}(A_1\cap A_2\cap A_3)+\cdots+\text{card}(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)]+\cdots+(-1)^n\text{card}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$.　②

公式①、②叫做容斥原理，运用容斥原理，可解决一类求有限集合元素个数问题.

典型例题

例1 已知集合 $M=\{x\mid ax+1=0\}$，$N=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$M\cap N=M$，求实数 a 的值.

分析 $M\cap N=M$ 转化为 $M\subseteq N$，化简集合 M,N.

解 由 $M\cap N=M$，得 $M\subseteq N$，$N=\{1,2\}$. 为求 M 分两种情况讨论：(1) 当 $a=0$ 时，$M=\varnothing$，适合条件；(2) 当 $a\neq 0$ 时，$M=\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$，要使 $M\subseteq N$，只需 $-\dfrac{1}{a}=1$，或 $-\dfrac{1}{a}=2$，

$\therefore$ $a=-1$，或 $a=-\dfrac{1}{2}$. 综上所述，$a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$.

评注 解决两个集合关系问题不可忽视空集、全集，本题极易漏掉 $a=0$.

例2 已知集合 $A=\{y\mid y=-x^2-2x, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=2x^2+2x+1, x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

分析 A,B 分别是函数 $y=-x^2-2x$，$y=2x^2+2x+1$ 的值域.

解 $y=-(x+1)^2+1\leqslant 1$，又 $y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ $A=\{y\mid y\leqslant 1\}$，$B=\left\{y\mid y\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，故 $A\cap B=\left\{y\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\right\}$.

评注 本例应避免如下错误解法：联立方程组 $\begin{cases}y=-x^2-2x,\\ y=2x^2+2x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{5}{9}.\end{cases}$ $\therefore$ $A\cap B=\left\{1,\dfrac{5}{9}\right\}$. 错因是将 A,B 的元素误解为平面上的点.

例3 设集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，问：

(1) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有三个元素的集合？

分析 由于 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，只要求出 $A\cap C$ 和 $B\cap C$ 中的元素再分别加以讨论.

解 因为 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组(Ⅰ)$\begin{cases}ax+y=1,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$(Ⅱ)$\begin{cases}x+ay=1,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ 的解集. 由(Ⅰ)得 $(x,y)=(0,1)$ 或 $\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$，由(Ⅱ)得 $(x,y)=(1,0)$ 或 $\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\dfrac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素，只需① $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1,\end{cases}$ 或② $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$

由①得 $a=0$；由②得 $a=1$.

故当 $a=0$ 或 1 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素.

(2) 使$(A\cup B)\cap C$恰有三个元素，只需 $\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$，解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素.

评注　解决本例关键是利用集合的运算律.

例 4　已知 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$，其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,3,4,5)$. 设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，且 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，$a_1+a_4=10$，又 $A\cup B$ 中所有元素之和为 224，求 (1)a_1,a_4 的值；(2)集合 A.

分析　解决第(1)小题关键是利用交集的概念知道 a_1,a_4 是两个完全平方数；第(2)小题根据并集的概念和集合中元素的互异性推断 $a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224$.

解　(1) $\because$　$A\cap B=\{a_1,a_4\}$，且 $a_1+a_4=10$，$a_1,a_4\in B$，　$\therefore$　a_1,a_4 是两个完全平方数且其和为 10，故这两个数为 1，9.　$\because$　$a_1<a_4$　$\therefore$　$a_1=1,a_4=9$.

(2) $\because$　$A\cup B$ 中所有元素之和为 224，即 $a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224$，而 $a_1^2+a_4^2=82$，　$\therefore$　$a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2=142$.　$\because$　$a_4<a_5$，　$\therefore$　$a_5>9$.　$\because$　$a_4=9\in B$，　$\therefore$　a_2,a_3 中有一个为 3. 设另一个为 x，若 $a_5\geqslant 11$，则 $142=a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2\geqslant 3+x+11+9+x^2+121>144$，这是不可能的，　$\therefore$　$a_5=10$.　$\therefore$　$3+x+10+9+x^2+100=142$，即 $x^2+x-20=0$，解得 $x=4$，　$\therefore$　$a_2=3,a_3=4$. 综上所述，$A=\{1,3,4,9,10\}$.

例 5　有 100 种食品，其中含维生素 A 的有 72 种，含维生素 C 的有 54 种，求同时含维生素 A，C 的食品种数的最大值和最小值.

分析　解决这个问题有两种途径：一是利用容斥原理，将要求的两集合的交集的元素个数的最值问题转化为它们的并集的元素个数的最值问题；二是利用文氏图.

解法 1　设含有维生素 A，C 的食品的集合分别为 M,N，则 $\mathrm{card}(M)=72$，$\mathrm{card}(N)=54$，得 $\mathrm{card}(M\cap N)=72+54-\mathrm{card}(M\cup N)$.

显然 $\mathrm{card}(M\cup N)$的最大值为 100，最小值为 72，故 $\mathrm{card}(M\cap N)$的最小值为 26，最大值为 54，即同时含有维生素 A,C 的食品种数的最小值为 26，最大值为 54.

解法 2　如图 1－1，设 100 种食品的集合为 U. 当 M,N 被“拉开”到最大限度，即 $M\cup N$ 充满 U 时，M,N 掺合部分最小. 这时 $\mathrm{card}(M\cup N)=100$，$\mathrm{card}(M\cap N)$的最小值为 26，而 M,N 掺合部分最大时，即 $M\supsetneqq N$ 时，$\mathrm{card}(M\cap N)$最大，其值为 54.

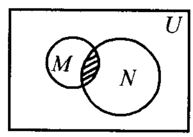

图 1－1

例 6　已知集合 $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,a>0\}$，$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$. 若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，求 a 的值.

分析　由已知条件知，$A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，必须先求出 $A\cap B$的具体元素，再利用数形结合思想.

解　由集合 A,B，得 $A\cap B=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,|xy|=a-1,a>1\}$. 我们先求

$A\cap B$位于第一象限内的点. 解方程组$\begin{cases}x+y=a,\\xy=a-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=a-1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=a-1,\\y=1.\end{cases}$于是得到$A\cap B$在第一象限内的两点$(1,a-1)$,$(a-1,1)$. 注意到$A\cap B$中表达式都是绝对值方程,第一象限内两点关于$x$轴、原点、$y$轴对称的六个点仍然是$A\cap B$的元素,如图 1-2. 下面看看$a$取何值时,这八个点构成正八边形.

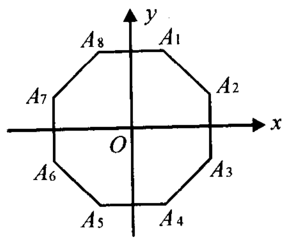

图 1-2

①若$A_1(1,a-1)$,$A_2(a-1,1)$,则$A_8(-1,a-1)$. 于是$2=A_1A_8=A_1A_2=\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}|a-2|$,得$a=2+\sqrt{2}$ ($a=2-\sqrt{2}<1$,舍去).

②若$A_1(a-1,1)$,$A_2(1,a-1)$,则$A_8(1-a,1)$. 于是$2(a-1)=A_1A_8=A_1A_2=\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}|a-2|$,得$a=\sqrt{2}$ ($a=-\sqrt{2}<0$,舍去).

综上所述,a的值为$2+\sqrt{2}$和$\sqrt{2}$.

评注 本例解法的关键是用代数方法(解方程组)求出正八边形在第一象限内的两个顶点A_1,A_2的坐标,然后利用对称性求出顶点A_8的坐标,再利用$A_1A_8=A_1A_2$,构造关于a的方程. 本题还有一种解法,点集A是顶点为$(a,0)$,$(0,a)$,$(-a,0)$,$(0,-a)$的正方形的四条边构成的,将$|xy|+1=|x|+|y|$变形为$(|x|-1)(|y|-1)=0$,所以,点集B是由四条直线$x=\pm1$,$y=\pm1$构成的. 以下可利用数形结合思想,请读者自行完成.

例 7 给定 1 000 个集合$A_1,A_2,\cdots,A_{1000}$,$\text{card}(A_i)=31$ ($i=1,2,\cdots,1\,000$). 对任意$i\neq j$,有$\text{card}(A_i\cap A_j)=1$,求证:$\text{card}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{1000})=1$.

分析 因为$A\cap B\cap C\subseteq A\cap B$,所以这 1 000 个集合的公共元素是任何两个集合的公共元素. 设$A_1\cap A_2=\{a\}$,本题只需证$a\in A_1,A_2,\cdots,A_{1000}$. 为此考察集合$A_1$,由于$A_1$与其他任何一个集合都恰有一个公共元素,故$A_2,A_3,\cdots,A_{1000}$中每一个集合都恰含$A_1$中的一个元素. 据抽屉原理,$A_1$中存在一个元素$a$至少属于$A_2,A_3,\cdots,A_{1000}$中的$\left[\dfrac{999}{31}\right]+1=33$个集合. 不妨设$a\in A_2,A_3,\cdots,A_{34}$,再证$a\in A_j$ ($35\leqslant j\leqslant1\,000$). 事实上,若$a\notin A_j$ ($35\leqslant j\leqslant1\,000$),则$A_j$与$A_1,A_2,\cdots,A_{34}$的公共元素两两不同. 因为若有$A_j\cap A_1=A_j\cap A_2=\{x\}$,则$x\in A_1,A_2$,而$A_1\cap A_2=\{a\}$,从而$x=a$,$a\in A_j$,矛盾. 故$\text{card}(A_j)\geqslant34$,矛盾. 所以$a$属于所有$A_1,A_2,\cdots,A_{1000}$.

评注 此题构造了一个抽屉原理模型. A_1中 31 个元素就是 31 个"抽屉",集合A_2,$A_3,\cdots,A_{1000}$就是 999 个"苹果".

例 8 对集合$A=\{1,2,\cdots,n\}$及其每一个非空子集,定义一个惟一确定的"交替和"如下:按照递减的次序重新排列该子集,然后从最大的数开始,交替地减或加后继的数所得的结果. 例如,集合$\{1,2,4,7,10\}$的"交替和"是$10-7+4-2+1=6$,$\{7,10\}$的"交替和"是$10-7=3$. $\{5\}$的"交替和"是 5 等. 试求A的所有子集的"交替和"的总和.

分析 A的非空子集共有2^n-1个,显然,要想逐个计算"交替和"然后相加是不可能的,必须通过分析"交替和"的特点,寻找解决问题的"窍门". 为了分析"交替和"的特点,可以令n为某一恰当的具体的数(如$n=4$),这是解决数学问题常用的方法(从特殊到一般

的方法).

当 $n=4$ 时，$A=\{1,2,3,4\}$，非空子集共有 15 个. 写出它们的全部“交替和”如下：

$\{1,2,3,4\}$　$4-3+2-1$；	$\{1,2,4\}$　$4-2+1$；
$\{1,2,3\}$　$3-2+1$；	$\{1,2\}$　$2-1$；
$\{1,3,4\}$　$4-3+1$；	$\{2,3,4\}$　$4-3+2$；
$\{1,3\}$　$3-1$；	$\{2,3\}$　$3-2$；
$\{1,4\}$　$4-1$；	$\{2,4\}$　$4-2$；　$\{3,4\}$　$4-3$；
$\{1\}$　1；	$\{2\}$　2；　$\{3\}$　3；　$\{4\}$　4.

从以上写出的“交替和”我们可以发现，除集合 $\{4\}$ 以外，可以把 A 的子集分成两类：一类子集中包含 4，另一类不包含 4. 并且可以在这两类集合之间建立起一个一一映射：设 A_i 是 A 的一个不包含 4 的子集，则令 A_i 与集合 $A_i\cup\{4\}$ 相对应. 显然 A_i 与 $A_i\cup\{4\}$ 的“交替和”之和是 4. 由于这样的 A_i 共有 $\frac{1}{2}(2^4-2)=7$ 个，故 A 的所有子集的“交替和”的总和是 $7\times4+4=32$.

解　集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集中，除去集合 $\{n\}$，还有 2^n-2 个非空子集. 现将这 2^n-2 个子集分成两类：第一类是包含元素 n 的子集，第二类是不包含 n 的子集. 现在第一类子集与第二类子集之间建立如下对应关系，$f:A_i\to A_i\cup\{n\}$，其中 A_i 是第二类子集，显然这种对应是一一映射. 设 A_i 的交替和为 k，则 $A_i\cup\{n\}$ 的交替和为 $n-k$，这一对集合的交替和的和等于 n，故集合 A 的所有子集的“交替和”的总和是

$$\frac{1}{2}(2^n-2)\cdot n+n=2^{n-1}\cdot n.$$

例 9　给定集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，其中每个 $a_i>0$，$n\geqslant2$. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$ 是 A 的任意 $n+1$ 个不同的非空子集，σ_i 表示子集 A_i 中元素的和 $(i=1,2,\cdots,n+1)$. 求证：存在 $\sigma_i,\sigma_j(1\leqslant i,j\leqslant n+1,i\neq j)$，使得 $\sigma_i\leqslant\sigma_j$，且 $2\sigma_i\geqslant\sigma_j$.

分析　考察结论中两个和数 σ_i 和 σ_j 的关系：$\sigma_i\leqslant\sigma_j\leqslant2\sigma_i$ 只需 σ_i 与 σ_j 均属于 $\left[\frac{m}{2},m\right](m>0)$. 据对称性，可设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则任意非空子集的元素的和最大是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$，最小是 a_1，则 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n+1}\in[a_1,a_1+a_2+\cdots+a_n]$，是否必有两个 σ 会“落入”同一个上述形式的子区间呢？

证明　不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，令 $b_1=a_1$，$b_2=a_1+a_2$，$\cdots$，$b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$B=\left[\frac{b_1}{2},b_1\right]\cup\left[\frac{b_2}{2},b_2\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{b_n}{2},b_n\right]$.　$\because$　$\frac{b_1}{2}<a_1\leqslant\sigma_i\leqslant b_n$　$(i=1,2,\cdots,n+1)$，

$\therefore$　若有某个 $\sigma_i\notin B$，则存在 $1\leqslant k\leqslant n-1$，使得 $b_k<\sigma_i<\frac{b_{k+1}}{2}$.　$\because$　$\sigma_i>b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$，　$\therefore$　A_i 中必含有某个不小于 a_{k+1} 的元素，　$\therefore$　$\sigma_i\geqslant a_{k+1}$.　$\therefore$　$2\sigma_i=\sigma_i+\sigma_i>(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}=b_{k+1}$，　$\therefore$　$\sigma_i>\frac{b_{k+1}}{2}$，矛盾.　$\therefore$　$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n+1}\in B$. 由抽屉原理，必有某两个和数属于 B 的同一个子区间，命题得证.

评注　在具有“对称”形式的问题中，不失一般地给实数排定某种顺序（本题中的 a_1

$<a_2<\cdots<a_n$)，往往有利于问题的解决.

方法导引与拓展

解决有关集合之间关系问题，要注意抓住元素这个关键. 如例 2，集合 A，B 的元素是函数值而不是点；集合的交、并、补运算的某些运算律在解题中也起关键性的作用，如例 3，运用了 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；注意运用数形结合的思想解题，如利用文氏图讨论集合关系具有化抽象为具体的功能，如例 5.

利用容斥原理可有效解决有关有限集元素个数问题，如例 4，得出 $a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224$，运用了容斥原理的思想，例 5 更是容斥原理的直接应用.

集合问题实际上是综合性的问题，它可能涉及几何、数论、计数以及其他数学内容和数学方法. 例 4 涉及简单的数论知识，例 5 涉及平面解析几何知识；例 4、例 7、例 9 均用了反证法，例 7，例 9 构造了抽屉原理模型，例 8 用了映射思想.

巩固练习

1. 设 $M=\{x\mid x=a+\sqrt{2}b,a,b\in\mathbf{Z}\}$，若 $m\in M$，$n\in M$，则下列结论中错误的是(　　)

(A) $m+n\in M$.　(B) $m-n\in M$.　(C) $mn\in M$.　(D) $\frac{m}{n}\in M$ $(n\neq0)$.

2. 设全集 $U=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1,x,y\in\mathbf{R}\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$(　　)

(A) $\complement_U A$.　(B) $\complement_U B$.　(C) $\{(2,3)\}$.　(D) $\varnothing$.

3. 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{u\mid u=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为(　　)

(A) $M=N$.　(B) $M\subsetneqq N$，$N\subsetneqq M$.　(C) $M\subsetneqq N$.　(D) $M\supsetneqq N$.

4. 集合 A，B 的并集 $A\cup B=\{a,b\}$，当 $A\neq B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对，则这样的 (A,B) 对的个数有(　　)

(A) 3.　(B) 5.　(C) 8.　(D) 9.

5. 已知 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，则 x，y 的值分别是________.

6. 某班学生共有 41 人，参加数学、生物、化学三个科目的考试，下表表示各科考试不及格的学生人数.

科目	数学	生物	化学	数学、生物	数学、化学	生物、化学	数学、生物、化学
不及格人数	12	5	8	2	6	3	1

则三个科目都及格的学生人数是________.

7. 设 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant0\}$，$A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant3\}$，则 $a=$________，$b=$________.

8. 设非空集合 $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$，且当 $a\in A$ 时，必有 $8-a\in A$，这样的 A 共有________个.

9. 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

10. 设 $M=\{a\mid a=x^2-y^2,x,y\in\mathbf{Z}\}$，求证：

(1) 一切奇数属于 M；

(2) 偶数 $4k-2$ $(k\in\mathbf{Z})$不属于 M；

(3) 属于 M 的两个整数，其积仍属于 M.

11. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 15$，集合 A，B 都是 $U=\{1,2,\cdots,n\}$ 的真子集，$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=U$，证明：集合 A 或 B 中，必有两个不同的数，它们的和为完全平方数.

12. 设 A 是由方程 $x^3-7x^2+14x-8=0$ 的根组成的集合，B 是由方程 $x^3+2x^2-c^2x-2c^2=0$的根组成的集合，其中 $c\geqslant 0$. 现以集合 $A\cup B$ 的元素作为一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，记 $f(x)=x^2+px+q$ 的最小值为 M，求 $M_{\max}$ 与 $M_{\min}$.

13. 一个集合含有 10 个互不相同的两位数，试证：这个集合必有两个无公共元素的子集，此两子集的各元素之和相等.

第二讲　简易逻辑与反证法

知识归纳

简易逻辑知识是掌握和使用数学语言的基础，在学习函数及其他后续内容时，将得到充分的运用.

1. 简单命题与复合命题

简单命题：不含逻辑联结词的命题.

复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题. 复合命题有 p 或 q、p 且 q、非 p 三种形式. 当 p，q 中有一个为真时，p 或 q 为真；当 p，q 均为真时，p 且 q 为真；p 与非 p 的真假相反.

2. 四种命题

原命题：若 p 则 q；

逆命题：若 q 则 p；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

原命题与它的逆否命题是等价命题. 而原命题与它的逆命题是不等价命题.

3. 充要条件

条件 p 与结论 q 的四种关系：

p 是 q 的充分而不必要条件（$p\Rightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$）；p 是 q 的必要而不充分条件（$p\nRightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$）；p 是 q 的充要条件（$p\Leftrightarrow q$）；p 既不是 q 的充分条件也不是必要条件（$p\nRightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$）.

4. 反证法

当直接证明一个命题发生困难时，常用反证法. 用反证法证明一个命题的正确性的一般步骤如下：

(1) 假设命题的结论不成立，即结论的反面成立；

(2) 从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

(3) 由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

典型例题

例 1 判断下列命题的真假：

(1) 对所有的正实数 p，$\sqrt{p}$ 为正数，且 $\sqrt{p}<p$；

(2) 不存在实数 x，使 $x<4$，且 $x^2+5x=24$；

(3) 存在实数 x，使 $|x+1|\leqslant 1$，且 $x^2\geqslant 4$；

(4) 对实数 x，若 $x^2-6x-7>0$，则 $x^2-6x-7\geqslant 0$.

分析 对复合命题，可以先分解，弄清构成它的简单命题的真假，再依据真值表进行判断.

答案 (1) 假； (2) 假； (3) 真； (4) 真.

例 2 判断下列命题的真假：

(1) 正方形的对角线相等且互相垂直；

(2) 命题"矩形的对角线相等"的逆命题；

(3) 命题"菱形的对角线互相垂直"的否命题；

(4) 命题"梯形的对角线互相平分"的逆否命题.

分析 命题(1)是真命题；命题(2)是"对角线相等的四边形是矩形"，是假命题；命题(3)中，原命题的逆命题"对角线互相垂直的四边形是菱形"是假命题，其否命题也是假命题；命题(4)中，原命题是假命题，其逆否命题也是假命题.

评注 *原命题与逆否命题等价(同真同假)，逆命题与否命题也等价(同真同假).*

例 3 设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，且 $f(m)f(n)\neq 0\ (m<n)$，证明方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的实根，且仅有一个实根属于 (m,n) 的充要条件为 $f(m)f(n)<0$.

分析 本题即证两个互逆命题是真命题. 充分性即证若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的实根，且仅有一个实根属于 (m,n)；必要性即证其逆命题.

证明 仅对 $a>0$ 的情况作证明，首先给出一个重要的恒等式

$$4af(x)=(2ax+b)^2-(b^2-4ac). \quad ①$$

又由 $m<n$，知 $2am+b<2an+b$. ②

(1) 充分性：由①及已知有 $0>16a^2f(m)f(n)=[\Delta-(2am+b)^2][\Delta-(2an+b)^2]$. ③

这等价于 $\begin{cases}\Delta>(2am+b)^2,\\ \Delta<(2an+b)^2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta<(2am+b)^2,\\ \Delta>(2an+b)^2.\end{cases}$ ④

可见，两种情况下 $\Delta>0$，从而 $f(x)=0$ 有两个不相等的实根，记 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

这时④等价于 $\begin{cases}x_1<m<x_2,\\ n<x_1 \text{ 或 } n>x_2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<x_1 \text{ 或 } m>x_2,\\ x_1<n<x_2.\end{cases}$

等价于 $x_1<m<x_2<n$ 或 $m<x_1<n<x_2$，表明方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根属于 (m,n).

(2) 必要性：由已知有 $x_1<m<x_2<n$，或 $m<x_1<n<x_2$ 成立，等价于 $\begin{cases}x_1<m<x_2,\\x_2<n,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<x_1,\\x_1<n<x_2.\end{cases}$ 把求根公式代入，得 $\begin{cases}-\sqrt{\Delta}<2am+b<\sqrt{\Delta},\\\sqrt{\Delta}<2an+b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2am+b<-\sqrt{\Delta},\\-\sqrt{\Delta}<2an+b<\sqrt{\Delta}.\end{cases}$ 等价于 $\begin{cases}(2am+b)^2<\Delta,\\(2an+b)^2>\Delta,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(2am+b)^2>\Delta,\\(2an+b)^2<\Delta.\end{cases}$ 故有 $0>[\Delta-(2am+b)^2][\Delta-(2an+b)^2]=16a^2f(m)f(n)$，得 $f(m)f(n)<0$.

评注　(1) 证明的关键是建立恒等式①，作用是沟通方程 $f(x)=0$ 的根、$f(m)$、$f(n)$、判别式 Δ 之间的关系.

(2) 在证明充分性时，容易忽略 $\Delta>0$ 的证明.

例 4　x 是整数，$F(x)=ax^2+bx+c$，问 a,b,c 满足什么条件时 $F(x)$ 是整数？

分析　本题实质上是寻求对任何整数 x，$F(x)$ 均为整数的充要条件.

解　首先寻求必要条件. 由对任何整数 x，$F(x)=ax^2+bx+c$ 是整数，　∴　$F(0)=c$是整数，$F(1)=a+b+c$ 是整数，　∴　$a+b$ 是整数. 又 $F(2)=4a+2b+c=2a+2(a+b)+c$ 是整数，　∴　$2a$ 是整数.

下面证明，当 $c,a+b,2a$ 是整数时，对任何整数 x，$F(x)=ax^2+bx+c$ 是整数. 事实上 $F(x)=ax^2+bx+c=ax^2-ax+(a+b)x+c=ax(x-1)+(a+b)x+c=2a\cdot\dfrac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c$.　∵　$x,c,a+b,2a$ 均为整数，　∴　$F(x)$为整数.

综上所述，对任何整数 x，$F(x)$ 均为整数的充要条件是 $c,a+b,2a$ 是整数.

评注　寻求使结论成立的充要条件，经常先求出必要条件，然后验证所得的必要条件是否充分条件. 本题通过特殊化方法寻求必要条件，在验证充分性时使用了恒等变形的重要技巧——配凑法.

例 5　已知 A 和 B 是两个命题. 如果 A 是 B 的充分条件，那么 B 是 A 的什么条件，$\neg A$ 是 $\neg B$的什么条件？

分析　由定义知，如果 A 是 B 的充分条件，则 B 是 A 的必要条件. 由四种命题的关系知，原命题与逆否命题是等价的，由题设知 $A\Rightarrow B$，它的逆否命题是 $\neg B\Rightarrow\neg A$，所以 $\neg A$是 $\neg B$的必要条件.

例 6　若 a,b,c 均为实数，且 $a=x^2-2y+\dfrac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\dfrac{\pi}{3}$，$c=z^2-2x+\dfrac{\pi}{6}$，求证：a,b,c 中至少有一个大于 0.

分析　本题结论的反面“a,b,c 都不大于 0”，较简洁，故考虑用反证法.

证明　假设 a,b,c 都不大于 0，即 $a\leqslant0,b\leqslant0,c\leqslant0$，则 $a+b+c\leqslant0$，而 $a+b+c=x^2-2y+\dfrac{\pi}{2}+y^2-2z+\dfrac{\pi}{3}+z^2-2x+\dfrac{\pi}{6}=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3>0$，这与 $a+b+c\leqslant0$ 矛盾. 因此 a,b,c 中至少有一个大于 0.

评注　也可直接证明 $a+b+c>0$，而得出 a,b,c 中至少有一个大于 0.

例 7　设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$　$(a\neq0)$中的 a,b,c 均为整数，且 $f(0)$，$f(1)$