新课标中考专项夺标

# 中考数学综合题透析

中考数学研究组　组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

# 中考数学
# 综合题透析

◎中考数学研究组 组编

◎编委 马茂年 王小海 王旭斌 王 新
朱进初 张金良 陈永华 陈 伟
林健鸿 郑姬铭 俞 昕 袁小容
倪志香 徐小明 韩国梁 谢丙秋

浙江大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

中考数学综合题透析/中考数学研究组组编. 一杭州：浙江大学出版社，2006.6
ISBN 7-308-04698-2

Ⅰ.中… Ⅱ.中… Ⅲ.数学课—初中—解题—升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 029150 号

**责任编辑** 傅百荣
**出版发行** 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
**排　　版** 杭州大漠照排印刷有限公司
**印　　刷** 杭州出版学校印刷厂
**开　　本** 787mm×960mm 1/16
**印　　张** 8
**字　　数** 185 千字
**版 印 次** 2006 年 6 月第 1 版 2006 年 7 月第 2 次
**书　　号** ISBN 7-308-04698-2/G·1060
**定　　价** 10.00 元

# 编写说明

初中新课程改革在全国已全面铺开,随之而来的中考(有的地方称为学业考试)必然有所调整。从全国实验区中考的情况来看,无论是考试的目标、要求,还是试题的设计都焕然一新,充分体现了新课程改革的精神。为帮助广大初中毕业生了解新的中考、适应新的中考、备战新的中考,我们邀请了全国知名的特级教师编写一套新课程标准中考专项夺标丛书。丛书包括《中考数学新颖题解读》、《中考数学解题法揭秘》、《中考数学选择题突破》、《中考数学填空题巧解》、《中考数学中档题攻略》、《中考数学综合题透析》、《中考数学展望与对策》七个分册。

丛书各分册密切配合新中考的要求,分专题解读新课标中考。丛书不局限于某个版本的新课程标准教材,而是按新课程标准和新中考要求构建知识体系。例题的设计注重典型性、新颖性、指导性和示范性,引导学生发现问题,培养学生认知能力和学习能力,教会学生学习;从不同的角度,通过变式原理创设能力测试和适应性试题,着力培养学生分析问题、解决问题的能力;通过设置开放性、探究性问题,激发学生的探索热情,培养学生的创新意识和创新能力。

鉴于我们的水平有限,书中难免有些纰漏,敬请各位读者批评指正。

2006 年 6 月于杭州

# 目 录

# 第1讲 代数综合性问题

代数综合中列代数式、幂的运算、乘法公式、因式分解等均是近年各地中考的热点，重在考查有关性质、公式的掌握情况，整式的有关计算，因式分解等．出现了观察图形或运算过程，归纳总结并猜想一般规律的新型综合题．分式部分重在考查何种情况下有意义，何种情况下分式取值为零，分式的基本性质及混合运算等．二次根式部分重在考查二次根式有意义的条件、最简二次根式、同类二次根式及二次根式的有关计算及化简等，也出现了有关二次根式的阅读改错，观察归纳猜想规律等新型题目．

## 考题透视镜

**1．注重渗透整体代入、分类讨论思想解题**

**例1** 已知 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，求代数式 $\frac{x-2y+2z}{x+2y-z}$ 的值．

**分析** 本题旨在考查对等比关系式的灵活变形，并运用它来求代数式的值．根据已知条件，无法直接求出未知数 $x$、$y$、$z$ 的值，若考虑对连比等式引入参数 $k$ 进行代换求值，可使得问题得以解决．

**解析** 令 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$，则有 $x=2k$，$y=3k$，$z=4k$，把它们代入所求代数式，得

$$\frac{x-2y+2z}{x+2y-z}=\frac{2k-6k+8k}{2k+6k-4k}=\frac{4k}{4k}=1.$$

**例2** 已知 $a:b:c=3:4:5$，且 $a-b+c=6$，则 $2a-b+2c=$ ________．

**分析** 本题考查通过已知连比等式及方程求代数式值的问题．由于已知条件中有连比等式，从而可设参数 $k$，代入已知方程求出其值，再求代数式的值即可．

**解析** 令 $a=3k$，$b=4k$，$c=5k$，代入 $a-b+c=6$，得 $3k-4k+5k=6$，解得 $k=\frac{3}{2}$．

从而 $a=\frac{9}{2}$，$b=6$，$c=\frac{15}{2}$．

所以 $2a-b+2c=2\times\frac{9}{2}-6+2\times\frac{15}{2}=18$．

**例3** 分解因式：$(1-x^2)(1-y^2)-4xy$．

**分析** 本题考查重新分组并拆项后运用完全平方公式及平方差公式进行因式分解.先把第一项展开变为五项式形式将第五项 $-4xy$ 拆为 $-2xy$ 与 $-2xy$ 两项,再分别与第一、四项,第二、三项构成完全平方的形式,最后用平方差公式分解.

**解析** $(1-x^2)(1-y^2)-4xy$

$=1-x^2-y^2+x^2y^2-4xy$

$=(1-2xy+x^2y^2)-(x^2+y^2+2xy)$

$=(1-xy)^2-(x+y)^2$

$=(-xy+x+y+1)(-xy-x-y+1)$

$=(xy-x-y-1)(xy+x+y-1)$.

**例 4** 分解因式:$(x^2+4x)(x^2+4x+7)+12$.

**分析** 本题主要考查整体代换的方法以及十字相乘法.首先令 $m=x^2+4x$,重新组合并整理后,再用十字相乘法进行因式分解.

**解析** 令 $x^2+4x=m$,则

$(x^2+4x)(x^2+4x+7)+12$

$=m(m+7)+12$

$=m^2+7m+12$

$=(m+3)(m+4)$

$=(x^2+4x+3)(x^2+4x+4)$

$=(x+1)(x+3)(x+2)^2$.

**例 5** 已知 $a=2004x+2004$,$b=2004x+2003$,$c=2004x+2005$,则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值是多少?

**解析** 由于 $a=2004x+2004$,$b=2004x+2003$,$c=2004x+2005$,从而可得

$$a-b=1,b-c=-2,a-c=-1.$$

又 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)]$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$$

将 $a-b=1$,$b-c=-2$,$a-c=-1$ 代入上式,得

$$原式=\frac{1}{2}[(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2]=3.$$

**说明** $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$ 可作为一公式运用.

例 6　如图 1-1,在边长为 $a$ 的正方形中挖掉一个边长为 $b$ 的小正方形($a>b$),把余下的部分剪拼成一个矩形,通过计算两个图形(阴影部分)的面积,验证了一个等式,则这个等式是　　　(　　)

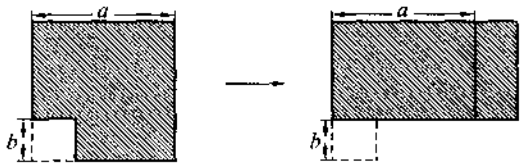

图 1-1

A. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　　B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　　　D. $(a+2b)(a-b)=a^2+ab-2b^2$

**解析**　由于原正方形的面积 $S_{大}=a^2$,剪掉的小正方形面积 $S_{小}=b^2$,所以剩余部分面积

$$S_{阴影}=S_{大}-S_{小}=a^2-b^2.$$

另一方面,剪拼所得矩形的长为 $a+b$,宽为 $a-b$,因此 $S_{阴影}=(a+b)(a-b)$.

所以 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

**答案**　A.

**例 7**　已知实数 $a,b$ 满足 $3\sqrt{a}+5|b|=7, S=2\sqrt{a}-3|b|$,求 $S$ 的取值范围.

**解析**　由 $3\sqrt{a}+5|b|=7$ 和 $2\sqrt{a}-3|b|=S$,解得

$$|b|=\frac{14-3S}{19},\sqrt{a}=\frac{21+5S}{19}.$$

因为 $|b|\geqslant 0,\sqrt{a}\geqslant 0$,所以 $\frac{14-3S}{19}\geqslant 0$ 且 $\frac{21+5S}{19}\geqslant 0$.

解之,得 $-\frac{21}{5}\leqslant S\leqslant\frac{14}{3}$.

故 $S=2\sqrt{a}-3|b|$ 的取值范围是 $\left[-\frac{21}{5},\frac{14}{3}\right]$.

**2. 观察特点、运用倒数拆项叠加求解**

**例 8**　计算:$\frac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}-\frac{x^2+3x-2}{4-x^2}+\frac{9-2x-2x^2}{x^2-x-2}$.

**分析**　本题考查分式的加减混合运算.观察所给分式特点,分子次数不低于分母次数,因此可转化为整式与分式的和,首先进行拆项再进行相关运算即可.

**解析** $\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}-\dfrac{x^2+3x-2}{4-x^2}+\dfrac{9-2x-2x^2}{x^2-x-2}$

$$=1+\frac{1}{x^2+3x+2}+1+\frac{3x+2}{x^2-4}-2-\frac{4x-5}{x^2-x-2}$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{3x+2}{(x+2)(x-2)}-\frac{4x-5}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{x-2+(3x+2)(x+1)-(4x-5)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{-(x-5)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{5-x}{x^2-x-2}.$$

**例 9** 已知 $1=\dfrac{xy}{x+y}, 2=\dfrac{yz}{y+z}, 3=\dfrac{zx}{z+x}$，求 $x$ 的值.

**解析** 本题考查运用倒数法、拆项变形、整式叠加代入、解分式方程组. 对已知方程取倒数后，再进行拆项叠加，最后代人即可.

由已知条件知 $xy\neq 0, yz\neq 0, zx\neq 0$，取倒数得

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=1,\\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{z+x}{zx}=\dfrac{1}{3},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1, & ①\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}, & ②\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}. & ③\end{cases}$$

① + ② + ③ 式得 $\qquad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{12}.$ ④

把 ② 代人 ④ 式得 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12}$，所以 $x=\dfrac{12}{5}$.

**例 10** 已知长方形周长为 10，它的相邻两边长 $a,b$ 为整数，且满足 $a-b-a^2+2ab-b^2+2=0$，求长方形的面积.

**分析** 本题考查运用因式分解及方程组的有关知识求长方形的面积. 先对已知等式因式分解后得两等式，结合已知条件列方程组并解之即可.

**解析** 由 $a-b-a^2+2ab-b^2+2=0$，得

$a^2-2ab+b^2-(a-b)-2=0$.

即 $(a-b-2)(a-b+1)=0$，得

$$a-b-2=0 \text{ 或 } a-b+1=0.$$

即 $$a-b=2 \text{ 或 } a-b=-1.$$

又已知周长 $c=2a+2b=10$，所以

$$\begin{cases}a-b=2,\\2a+2b=10;\end{cases} \text{或} \begin{cases}a-b=-1,\\2a+2b=10.\end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases}a=\dfrac{7}{2},\\b=\dfrac{3}{2}\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$$

又已知 $a,b$ 都是整数，从而

$$\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$$

所以长方形面积 $S=ab=6$.

**例 11** (1) 若 $(a+b)^2=10$，$(a-b)^2=20$，求 $a^2+b^2$ 的值和 $ab$ 的值；

(2) 已知 $a(a-1)-(a^2-b)=-8$，求 $\dfrac{a^2+b^2}{2}-ab$ 值.

**分析** 本题主要考查对乘法公式的灵活运用. 先对已知条件进行变形，求出 $a,b$ 的关系式，再对所求代数式进行变形，进而求得其值.

**解析** (1) $$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}=\frac{10+20}{2}=15,$$

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{10-20}{4}=-\frac{5}{2}.$$

(2) $$\begin{aligned}a(a-1)-(a^2-b)&=-8\\a^2-a-a^2+b&=-8\\-a+b&=-8\\b-a&=-8\end{aligned}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{a^2-2ab+b^2}{2}=\frac{(a-b)^2}{2}=\frac{8^2}{2}=32.$$

**例 12** 已知 $a,b$ 互为相反数，$c,d$ 互为倒数，$x,y$ 的绝对值都等于 1，试求 $(a+b+1)x^2+cdy^2+\dfrac{1}{3}x^2y-\dfrac{1}{3}xy^2$ 的值.

**分析** 本题考查相反数、倒数、绝对值的概念及代数式求值. 由已知得出 $a,b,c,d$ 的关系式以及 $x,y$ 的值代入所求多项式即可.

**解析** 由于 $a,b$ 互为相反数，$c,d$ 互为倒数.

从而 $a+b=0$，$cd=1$，则

$$(a+b+1)x^2+cdy^2+\frac{1}{3}x^2y-\frac{1}{3}xy^2$$
$$=(0+1)x^2+y^2+\frac{1}{3}xy(x-y)$$
$$=x^2+y^2+\frac{1}{3}xy(x-y).$$

又 $x,y$ 的绝对值都是 1，即 $x=\pm1$，$y=\pm1$.

当 $x=1$，$y=1$ 时，原式 $=1^2+1^2+\frac{1}{3}(1-1)=2$；

当 $x=1$，$y=-1$ 时，原式 $=1^2+(-1)^2+\frac{1}{3}\times(-1)(1+1)=\frac{4}{3}$；

当 $x=-1$，$y=1$ 时，原式 $=(-1)^2+1^2+\frac{1}{3}\times(-1)(-1-1)=\frac{8}{3}$；

当 $x=-1$，$y=-1$ 时，原式 $=(-1)^2+(-1)^2+\frac{1}{3}(-1)(-1)(-1+1)=2$.

**3. 运用因式分解、乘法公式等方法运算**

**例 13** 已知 $\sqrt{x}=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}(0<a<1)$，求代数式 $\frac{x^2+x-6}{x}\div\frac{x+3}{x^2-2x}-\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{x-2-\sqrt{x^2-4x}}$ 的值.

**分析** 本题是给定条件求分式的值，综合考查了分式化简、因式分解、乘法公式等知识点. 先对已知条件进行变形，化为与所求代数式相关的形式，并对所求代数式进行化简，最后代入求值.

**解析** 由 $\sqrt{x}=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$，得

$$x=a+\frac{1}{a}+2, x-2=a+\frac{1}{a}, (x-2)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2,$$

即
$$x^2-4x=a^2+\frac{1}{a^2}-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2.$$

$$\frac{x^2+x-6}{x}\div\frac{x+3}{x^2-2x}-\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{x-2-\sqrt{x^2-4x}}$$
$$=\frac{(x+3)(x-2)}{x}\cdot\frac{x(x-2)}{x+3}-\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{x-2-\sqrt{x^2-4x}}$$

$$=(x-2)^2-\frac{a+\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}}{a+\frac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{a+\frac{1}{a}+\left|a-\frac{1}{a}\right|}{a+\frac{1}{a}-\left|a-\frac{1}{a}\right|}.$$

已知 $0<a<1$，得 $a-\frac{1}{a}<0$.

原式 $=a^2+\frac{1}{a^2}+2-\frac{a+\frac{1}{a}-a+\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}}=a^2+\frac{1}{a^2}+2-\frac{1}{a^2}=a^2+2.$

**例 14** 已知 $x,y$ 是方程组 $\begin{cases}x+2y=4\\x-y=-5\end{cases}$ 的解，求代数式 $\frac{x}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y}-2$ 的值.

**分析** 本题旨在考査二元一次方程组的解法、分式化简，同时还涉及完全平方公式、立方差分式. 由已知方程组先解得 $x,y$ 值，对所给代数式进行化简后，将求得的 $x,y$ 值代入即可.

**解析** 由 $\begin{cases}x+2y=4,\\x-y=-5.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=3.\end{cases}$

从而
$$\begin{aligned}&\frac{x}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y}-2\\&=\frac{x}{(x-y)^2}\cdot\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y}-2\\&=\frac{x}{x-y}+\frac{1}{y}-2=\frac{-2}{-2-3}+\frac{1}{3}-2\\&=-\frac{19}{15}.\end{aligned}$$

**例 15** 若 $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}$，记 $f=\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+x}{y+z}$. 求证 $f$ 是一个整数.

**证明** 若 $x+y+z+t\neq0$，由等比性质有

$$\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}=\frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)}=\frac{1}{3},$$

则有
$$\begin{cases} y+z+t=3x, & ① \\ z+t+x=3y, & ② \\ t+x+y=3z, & ③ \\ x+y+z=3t. & ④ \end{cases}$$

将 ①、②、③、④ 式两边分别同时加上 $x,y,z,t$，得 $x+y+z+t=4x=4y=4z=4t$，即

$$x=y=z=t,$$

所以 $f=4$ 是一个整数.

若 $x+y+z+t=0$，则有 $x+y=-(z+t)$，$y+z=-(t+x)$.

所以 $f=\dfrac{-(z+t)}{z+t}+\dfrac{-(t+x)}{t+x}+\dfrac{z+t}{-(z+t)}+\dfrac{t+x}{-(t+x)}=-4$，

故 $f$ 是一个整数.

**例 16** 设 $x=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}$，求证 $18<x<19$.

**证明** 因为 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$，所以

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

同理可得，$\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

所以 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

取 $n=2,3,\cdots,100$ 代入上式，得

$$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-1),$$

$$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})<\frac{1}{\sqrt{3}}<2(\sqrt{3}-\sqrt{2}),$$

$$\cdots$$

$$2(\sqrt{101}-\sqrt{100})<\frac{1}{\sqrt{100}}<2(\sqrt{100}-\sqrt{99}),$$

将以上同向不等式相加，整理得

$$2(\sqrt{101}-\sqrt{2})<x-1<2(\sqrt{100}-1),$$

所以
$$2(10-1.5)+1<x<2(10-1)+1,$$

$$18 < x < 19.$$

**说明** 事实上,不等式 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$,对 $n=1$ 也成立,但若取 $n=1,2,3,\cdots,100$ 代入并累加,只能证明:$18 < x < 20$.

**例 17** 已知方程 $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x-1}=\frac{a}{x^2+x-2}$ 的根是正数,求 $a$ 的取值范围.

**分析** 本题考查了分式方程的解法及因式分解.先对已知分式方程进行化简变形后求得 $x$ 的值,再结合已知条件,即"方程的根是正数,求出 $a$ 的取值范围"进行求解.

**解析** $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x-1}=\frac{a}{(x-1)(x+2)}$,

方程两边同乘以 $(x-1)(x+2)$,得

$$(x+1)(x-1)-x(x+2)=a,$$

$$x^2-1-x^2-2x=a,$$

$$x=-\frac{a+1}{2}.$$

又已知原方程的根是正数,从而

$$\begin{cases} -\frac{a+1}{2}>0, \\ -\frac{a+1}{2}\neq 1, \\ -\frac{a+1}{2}\neq -2. \end{cases}$$

解得 $a<-1$ 且 $a\neq -3$.

**说明** 本题往往只列出 $-\frac{a+1}{2}>0$,得 $a<-1$,而忽略了 $a$ 的取值还要保证 $x=-\frac{a+1}{2}$ 不是原方程的增根.

**4. 巧用方程思想和函数方法突破**

**例 18** 如图 1-2,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$D$ 是 $BC$ 中点,$DE\perp AB$,垂足为 $E$,$\tan B=\frac{1}{2}$,$AE=7$,求 $DE$ 的长.

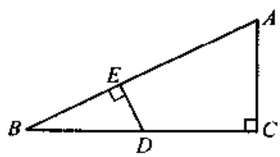

图 1-2

**分析** 在 Rt$\triangle BDE$ 中,利用设未知数的方法,由勾股定理解关于 $DE$ 的方程,即可求出.

**解法一** $\because \tan B=\frac{1}{2}$,$\therefore$ 在 Rt$\triangle BED$ 中和 $\triangle ABC$ 中,

$\frac{DE}{BE}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$，设 $DE=x$，$\therefore BE=2x$. $\therefore BD=\sqrt{5}x$.

又 $\because BD=DC$，$\therefore AC=\sqrt{5}x$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得：$AB^2=AC^2+BC^2$，

即 $(7+2x)^2=(\sqrt{5}x)^2+(2\sqrt{5}x)^2$.

$\therefore 3x^2-4x=7$，$\therefore x_1=\frac{7}{3}$，$x_2=-1$（舍去）. $\therefore DE=\frac{7}{3}$.

**解法二** 同解法一得 $BE=2x, BD=\sqrt{5}x, AC=\sqrt{5}x$，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 中，$\because \angle BCA=\angle BED$，$\angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DBE$. $\therefore \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}$，$\therefore \frac{7+2x}{\sqrt{5}x}=\frac{\sqrt{5}x}{x}$. $\because x\neq 0$，

$\therefore 7+2x=5x$，$\therefore x=\frac{7}{3}$.

经检验 $x=\frac{7}{3}$ 是原方程的根，$\therefore DE=\frac{7}{3}$.

**例 19** 已知 $m,n$ 满足等式 $|m+n-a|+(mn+b+c)^2=0$，且 $a,b,c$ 同时满足：

(1) $a$ 为整数，且使关于 $x,y$ 的方程组 $\begin{cases}3x-y=2a-\frac{3}{2}\\4x+2y=a\end{cases}$ 的解都是正数；

(2) $b,c$ 满足多项式 $2t^3+9t^2+3t+5$ 除以 $t^2+bt+c$ 的商式为 $2t+1$ 余式为 $5t+8$.

试求 $m^4+n^4$ 的值.

**分析** 本题综合考查非负数的性质、整数及除法的概念. 先对条件(1)进行变形后解出 $a$ 的值，再运用条件(2)解出 $b,c$ 的值，然后运用关于 $m,n$ 的等式解出 $m,n$ 的关系式代入所求代数式即可.

**解析** 由条件(1)

$$\begin{cases}3x-y=2a-\frac{3}{2},\\4x+2y=a.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{5a-3}{10},\\y=\frac{6-5a}{10}.\end{cases}$$

已知 $x,y$ 都是正数，从而 $x>0,y>0$，即

$$\begin{cases}\frac{5a-3}{10}>0,\\\frac{6-5a}{10}>0.\end{cases}$$

解得$\frac{3}{5} < a < \frac{6}{5}$,又 $a$ 为整数,从而必有 $a = 1$.

由条件(2)

$(t^2 + bt + c)(2t + 1) + 5t + 8 = 2t^3 + (2b+1)t^2 + (b+2c+5)t + c + 8 = 2t^3 + 9t^2 + 3t + 5$. 从而

$$\begin{cases} 2b + 1 = 9, \\ b + 2c + 5 = 3, \\ c + 8 = 5. \end{cases}$$

解得 $b = 4$, $c = -3$.

又 $|m + n - a| + (mn + b + c)^2 = 0$.

从而 $m + n - a = 0$ 且 $mn + b + c = 0$, 即 $m + n = 1$, $mn = -(b + c) = -1$.

所以 $m^4 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 - 2m^2n^2 = [(m + n)^2 - 2mn]^2 - 2m^2n^2$

$= [1^2 - 2 \times (-1)]^2 - 2 \times (-1)^2 = 7$.

**5. 注重数形结合思想相互转化**

在解题或证题过程中要善于把抽象的数量关系和直观的几何图形结合起来,互相转化,化难为易.

**例 20** 如图 1-3,在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\tan\angle CBD=\frac{1}{6}$,$\sin\angle A=\frac{12}{13}$,$AD=3$,求 $AB$ 的值.

**分析** 要求的 $AB$ 边恰是直角三角形 $ABC$ 的斜边,则很容易联想到勾股定理:$AB^2=AC^2+BC^2$,这样结合题目中的数量条件,很快可利用方程思想,通过 Rt$\triangle BCD$ 找到 $AC$、$BC$,使问题得以解决.

**解析** 在 $\triangle DBC$ 中,$\angle C = 90°$,又 $\tan\angle CBD = \frac{1}{6} = \frac{CD}{BC}$,

设 $CD = x$, 则 $BC = 6x$.

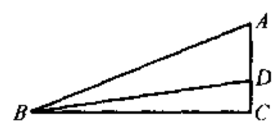

图 1-3

在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\because$ $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$,

$\therefore$ $AB = \frac{13}{2}x$, 又 $\because$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

即$\left(\frac{13}{2}x\right)^2 = (3 + x)^2 + (6x)^2$, 整理得 $7x^2 - 8x - 12 = 0$.

解得 $x = 2$, $x = -\frac{6}{7}$(舍). $\therefore$ $AB = \frac{13}{2}x = 13$.

**例 21** 如图 1-4，设二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 $x$ 轴交于 $A$，$B$ 两点，与 $y$ 轴交于点 C，若 $\angle ACB=90^\circ$，$\cos\angle BAC=\frac{4}{5}$，又 $OB$、$AC$ 的长分别是关于 $x$ 方程：$x^2-(m-1)x+2m=0$ 的两根之和与两根之积.

(1) 求 $m$ 的值；

(2) 求这个二次函数的解析式.

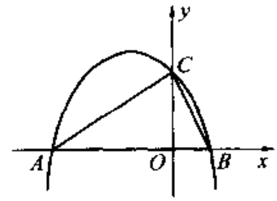


图 1-4

**分析** 通过题目所给的已知条件观察图形中的相互关系，使数形相互结合，题目中二次函数与 $x$ 轴的两个交点的横坐标实际是图中 $OA$、$OB$ 长，通过几何图形的三角函数求出 $m$ 的值. 对于要求二次函数的解析式，则也要通过图中的三角形相似求出相应的点的坐标.

**解析** (1) 设 $x_1$，$x_2$ 是关于方程 $x^2-(m-1)x+2m=0$ 两根，

则 $x_1+x_2=m-1$，$x_1\cdot x_2=2m$，

$\therefore OB=m-1$，$AC=2m$.

在 $\triangle AOC$ 中，$CO\perp AB$，$\cos\angle CAB=\frac{4}{5}$，$\therefore AO=AC\cdot\cos\angle CAB=\frac{8}{5}m$，

$AB=AO+OB=\frac{8}{5}m+(m-1)=\frac{13}{5}m-1$，

$\because \angle ACB=90^\circ$，$\therefore AC=AB\cdot\cos\angle CAB$，

即 $2m=\frac{4}{5}\left(\frac{13}{5}m-1\right)$，$\therefore m=10$.

(2) 由(1) 知 $m=10$，$\therefore AB=\frac{13}{5}m-1=\frac{13}{5}\times 10-1=25$，$AC=20$.

由勾股定理得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=15$.

$\therefore OB=m-1=9$，$OA=\frac{8}{5}m=16$.

$\because OC\perp AB$，$\therefore \triangle AOC\backsim\triangle COB$，$\therefore OC^2=OA\cdot OB=144$.

$\therefore OC=12$. $\therefore A(-16,0)$，$B(9,0)$，$C(0,12)$.

$\because y=ax^2+bx+c$ 的图像过 $A$，$B$，$C$ 三点，

$$\therefore \begin{cases}0=a(-16)^2+b(-16)+c\\0=a\cdot 9^2+b\cdot 9+c\\12=c\end{cases}，解得\begin{cases}a=-\frac{1}{12}\\b=-\frac{7}{12}.\\c=12\end{cases}$$