

高中数学新课程丛书

算法设计 与 数学实验



薛维明 编著

凤凰出版传媒集团



江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

高中数学新课程丛书

算法设计与数学实验

薛维明 编著

凤凰出版传媒集团

 江苏教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

算法设计与数学实验/薛维明编著. —南京:江苏教育出版社, 2006. 5

(高中数学新课程丛书)

ISBN 7-5343-7358-1

I. 算... II. 薛... III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G633. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 047949 号

- | | |
|------|---|
| 书 名 | 高中数学新课程丛书
算法设计与数学实验 |
| 作 者 | 薛维明 |
| 责任编辑 | 胡晋宾 蔡 立 |
| 责任校对 | 李 璐 |
| 封面设计 | 刘小地 |
| 出版发行 | 凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009) |
| 网 址 | http://www.1088.com.cn |
| 集团地址 | 江苏出版集团(南京市中央路 165 号 210009) |
| 集团网址 | 凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn |
| 经 销 | 江苏省新华发行集团有限公司 |
| 照 排 | 南京理工出版信息技术有限公司 |
| 印 刷 | 江苏淮阴新华印刷厂 |
| 厂 址 | 淮安市淮海北路 44 号(邮编 223001) |
| 电 话 | 0517 - 3941427 |
| 开 本 | 787 × 1092 毫米 1/16 |
| 印 张 | 10.5 |
| 版 次 | 2006 年 5 月第 1 版
2006 年 5 月第 1 次印刷 |
| 书 号 | ISBN 7 - 5343 - 7358 - 1/G · 7043 |
| 定 价 | 20.00 元 |
| 邮购电话 | 025 - 85400774, 8008289797 |
| 批发电话 | 025 - 83260767, 83260768, 83260760 |
| 盗版举报 | 025 - 83204538 |

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
欢迎邮购, 提供盗版线索者给予重奖

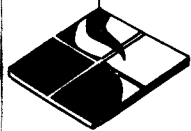


Qian Yan

在传统的观念中,学数学只需动脑,不必动手做实验.实际上,与其他自然科学一样,数学也要使用观察和实验来形成、发展及检验理论,数学家们经常利用 100 以内的正整数去验证一个命题的真假就是一个鲜明的例证.但是,数学实验与其他学科实验不同的是,它所面对的不是物质材料,而是像图形、数据那样一类非物质的材料,即所谓的“思想材料”.基于计算机的数学实验教学的目的是使学生掌握数学实验的基本思想和方法,即不仅把数学看成先验的逻辑体系,而且也把它视为一门“实验科学”,从问题出发,借助计算机,通过学生亲自设计和动手操作,体验解决问题的过程,从实验中去学习、探索和发现数学规律,从而达到解决实际问题的目的.

目前,很多大学都开设了有关数学实验的课程,它们的开设主要是帮学生学习比较实用的 Mathematica、Mathcad 以及 Matlab 等数学软件,从而使教材中涉及到的导数运算、积分计算、图象与数据处理、级数解法、矩阵运算与回归分析等内容在计算机上得以求解和处理,以期望培养学生利用数学理论在计算机上实现问题解决的能力.但是,有关中学层面的数学实验及其教学,虽然受到越来越多的关注,却都主要集中在理论探索阶段.

随着新一轮课程改革的推进和《普通高中数学课程标准(实验)》的实施,有关计算机的“算法”内容已经进入数学教材和中学课堂了,算法设计的优劣需要上机检验,算法设计的改进需要调试修正,这就直接为数学实验在中学的深入开展提供了另外一种可能.为了配合《普通高中数学课程标准(实验)》“数学 3(必修)”模块中的“算法初步”的教学,考虑到教师怎样教“算法初步”,以及学生怎样学“算法初步”等新的课题,我们编写了《算法设计与数学实验》这本书.本书根据《普通高中数学课程标准(实验)》的精神,选取了一系列引人入胜的著



名的数学问题,通过介绍这些问题的背景和发生、发展过程,以及问题的经典解法,来讲解如何设计求解这些问题的算法,并在程序语言 Visual Basic 6.0 中进行程序实现.在这些数学问题当中,重点勾勒特别体现中国古代数学算法化倾向的鲜明特征,并力图体现立足算法设计的数学实验思想.而在介绍问题求解的算法设计和程序编制中,还考虑到可接受性、算法正确性和程序的可阅读性,但在优化方面就不作过多的要求.

我们说,人类用智慧发明了计算机,又用智慧调教了计算机.在人类跨进信息时代的今天,计算机技术已成为时代的新宠.计算机发展到今天,能有如此广泛而神奇的应用,除了硬件水平提高以外,更重要的是依靠软件功能的更新.所以,中国工程院院士、计算机科学家李国杰说道:“……而软件的核心是算法(不是编程技巧).……算法设计是人类智慧的结晶,计算机科学中的知识创新主要就是算法的创新,创建一种新算法其意义不亚于建造一种新机型.……严格来说,不讲算法,计算机科学就无从说起.”在信息技术教育普及的今天,学习和掌握计算机程序设计的基础知识,已成为中学教与学的基本任务之一,通过学习领会算法设计和程序设计的基本思想和理念,可以提升学生的信息素养.

本书的出版,得到了江苏教育出版社的大力支持,责任编辑和责任校对在图书的出版过程中付出了辛勤的劳动.在本书的编写过程中,得到了陈志明、何险峰、冯建国、邵磊、钱建江、邹军明等老师的大力帮助和支持,薛亮同学绘制了插图,周丽萍女士进行了资料的整理、文字的录入.在写作过程中,笔者还参考了大量的国内外资料,在此一并表示由衷的感谢.

由于水平有限,书中难免存在错误,恳请专家和读者不吝指教.

薛维明

2006年3月

第 1 章

工欲善其事,必先利其器——Visual Basic 程序设计基础

- 1.1 程序设计基本步骤 / 1
- 1.2 算法 / 2
 - 1.2.1 算法的概念 / 4
 - 1.2.2 算法的描述 / 5
- 1.3 Visual Basic 语言基本知识 / 7
 - 1.3.1 Visual Basic 的启动与退出 / 7
 - 1.3.2 常量、变量、标准函数与表达式 / 11
 - 1.3.3 程序设计的三种基本结构 / 15
 - 1.3.4 数据的传送 / 16
 - 1.3.5 数组 / 25

第 2 章

晴空一鹤排云上,便引诗情到碧霄——方程集锦

- 2.1 《九章算术》与“池中之葭”问题 / 30
- 2.2 《孙子算经》与“雉兔同笼”问题 / 33
- 2.3 《九章算术》与“方程” / 36
- 2.4 《张丘建算经》与“百鸡”问题 / 38
- 2.5 《九章算术》与“五家共井”问题 / 40
- 2.6 韩信点兵,多多益善 / 42
- 2.7 勾股定理、勾股数 / 44

第 3 章

他山之石,可以攻玉——话说三角形面积

- 3.1 三角形面积 / 49
- 3.2 异曲同工——海伦公式与秦九韶“三斜求积” / 51
- 3.3 奇妙的海伦三角形 / 55



第4章 年年岁岁花相似,岁岁年年花不同——奇趣的生物数学

- 4.1 凌波仙子、水仙花数 / 59
- 4.2 花语玫瑰、玫瑰花数 / 62
- 4.3 茑萝风影、五角星数 / 64

第5章 路漫漫其修远兮,吾将上下而求索——漫话素数

- 5.1 试商法找素数 / 67
- 5.2 筛法找素数 / 72
- 5.3 靠不住的猜想——费马数 / 74
- 5.4 王冠上的明珠——哥德巴赫猜想 / 76
- 5.5 梅森数 / 79
- 5.6 最大公约数 / 82
- 5.7 最小公倍数 / 85
- 5.8 十全十美的完全数 / 88
- 5.9 心心相印的相亲数 / 90
- 5.10 二进制数 / 92
- 5.11 $3n + 1$ ——谷角猜想 / 97

第6章 江山代有才人出,各领风骚数百年——在探索 π 的道路上

- 6.1 另辟蹊径的刘徽“割圆术” / 103
- 6.2 搜炼古今的“祖率” / 106
- 6.3 模拟探索的蒙特卡罗法 / 109
- 6.4 逐渐逼近,妙用级数 / 115
- 6.5 上下求索,各领风骚 / 117
- 6.6 神秘的无理数 / 118

第7章 锲而不舍,金石可镂——数列一瞥

- 7.1 斐波那契数列 / 127
- 7.2 尼可马克问题 / 130

7.3 国际象棋与麦子 / 133

第 8 章

衣带渐宽终不悔,为伊消得人憔悴——漫游数阵

8.1 杨辉三角形 / 138

8.2 帕斯卡三角形 / 141

8.3 洛书与幻方 / 143

参考答案 / 148

参考文献 / 158

第 1 章 工欲善其事,必先利其器

——Visual Basic 程序设计基础

工 欲善其事,必先利其器. 要让计算机帮助解决实际问题,比如说要进行数学实验,一个非常重要的工作就是要进行算法设计和程序调试. 本章中,我们主要介绍基于 Visual Basic 6.0 的程序设计语言的基本知识与基本技能,为后续的算法设计与数学实验打好基础.

1.1 程序设计基本步骤

为了更好地学习算法设计,我们必须了解程序设计的基本方法. 下面给出程序设计通常采用的 5 个基本步骤.

1. 需求分析

要借助计算机去解决实际问题,首先要进行审题,即要认真分析题目,考察需要解决什么问题,思考达到什么目标,然后从已知条件(注意题目的隐含条件)出发,分析经过哪些处理才能够解决问题. 只有这样正确地分析需求,才能更好地为以下的步骤打好基础,否则就会“差之毫厘,失之千里”.

2. 算法设计

简单地说,算法设计主要研究解决问题的方法和步骤. 例如,用 ATM(自动取款机)取款的一般步骤如下(S 是英文 step 的第一个字母):

- S1 插卡;
- S2 输入密码;
- S3 输入金额;
- S4 确认;
- S5 取款;
- S6 取卡;
- S7 结束.

这些处理过程可以看做是在 ATM 上取款的算法. 当然, 这是很简单的算法, 利用计算机解决问题时所采用的算法往往要复杂得多. 算法设计的重点是研究如何对一个给定的问题设计出解决它的有效算法以及探讨算法设计的一般技巧, 它是计算机科学的一个重要分支.

算法设计不仅是指计算的方法, 而且还包含从何处着手解决问题、解决问题的步骤以及问题结果处理等全过程. 计算机科学家已经创建出许多行之有效的通用算法, 而且许多算法还在日新月异地发展着. 可以说, 算法设计是程序设计过程中, 也是整个解决问题过程中很关键的一步.

3. 画流程图

算法设计好了, 为了将它比较清晰、直观地描述出来, 常常需要将设计方案表示出来, 画流程图就是一种常用的表示方法. ATM 取款算法的流程图可以用图 1-1 来表示.

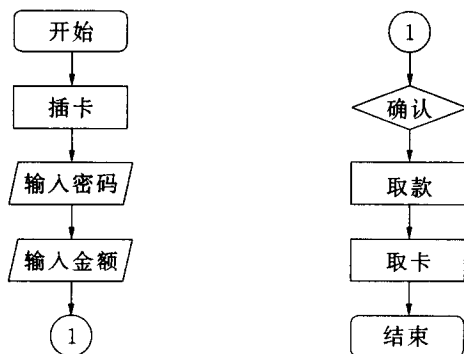


图 1-1

由此可见, 画流程图是应用计算机解决实际问题之前理清思路的一个行之有效的方法.

4. 编写程序

编写程序就是用计算机语言(机器语言、汇编语言、高级语言)来描述或实现算法, 也就是告诉计算机如何一步步地去解决问题的一系列命令或语句. 因为目前高中信息技术教材中介绍的编程软件是 Visual Basic, 所以本书采用 Visual Basic 程序设计语言来编写程序.

5. 上机调试

程序编好以后, 应该进行严格的调试, 如果不经调试, 就直接运行, 往往会发现许多错误. 因此, 要在调试过程中发现和纠正错误, 直到程序顺利通过, 并运行出正确结果.

1.2 算 法

中世纪阿拉伯数学家阿尔·花拉子米(al-Khowārizmī, 约 780~约 850)科学研究的范围十分广泛, 涉及数学、天文学、历史学和地理学等领域. 花拉子米一生撰写了许多重要的科学

著作,在数学方面,他编著了传世之作《花拉子米算术》(Liber Algorithmi),书中主要介绍印度传入的十进制记数法和以此为基础的算术知识.现代数学中的算法(algorithm)一词来源于这部著作的书名,即花拉子米的人名.

纵观数学发展史,各国数学家对算法都有研究,特别是中国古代数学的发展就是以创造算法为主线的.中国的传统数学著述多从问题出发,为了解决问题,一步一步地计算、探究.用现在的思维方式来诠释,每个问题的求解就是一个算法.根据这个算法,就能够编成程序,告诉计算机如何操作,从而用计算机这个实验工具进行数学实验.因此,中国古代数学具有明显的算法化、机械化的倾向和特征.这些辉煌的成就是中华民族古老文明的重大成果,它们丰富了世界数学宝库.

对于算法的研究,值得一提的是英国数学家阿兰·图灵(Alan Mathison Turing, 1912~1954).图灵(图1-2)进行了计算机方面的开拓性研究,并于1936年发表了关于理想计算机的论文,提出了理想计算机的理论.后来,人们称这种理想的计算机为“图灵机”(图1-3).图灵机由一条带子、一个读写头和一个控制装置等三个部分组成.带子分成许多小格,每小格可存一位数;相对带子来说,读写头可以左右移动,每次移动一小格读出一个符号或在带子上印出一个符号.“图灵机”的设想并非是制造机器的具体方案,而是从理论上解决了“任何步骤不论有多么复杂,只要可以将解题步骤描述为算法,都可以用图灵机来完成”这一根本问题,而图灵机的概念使得我们能给“算法”一个确切的定义.



图 1-2

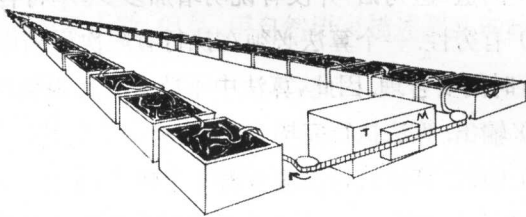


图 1-3

图灵 1912 年 6 月 23 日出生于英国伦敦,在中学读书的时候已经显示出他在数学方面的天赋,一些题目他一眼就能看出答案,令人刮目相看.在他身上时时会体现出探索精神,例如他到球场去,不是在场上踢球,而是在场边观察并计算球飞出边线的速度.1931年,图灵考入剑桥皇家学院攻读数学专业,大学毕业后留校任教,不到一年功夫,他就发表了几篇很有分量的数学论文,被选为皇家学院的研究员.图灵为人善良、诚实、谦虚,忠于人类的自由解放事业,曾在第二次世界大战中建立了不可磨灭的功勋.在第二次世界大战期间,他是破译德军密

码的主要成员,战后获得了英国政府授予的最高荣誉勋章.1950年,图灵发表了《机器能思考吗?》的论文,并设计了著名的图灵测试,这是通过问答来测试计算机是否具有同人相等的智力,从而奠定了人工智能的基础.

为了纪念图灵在计算机研究方面的巨大功绩,从20世纪60年代开始,美国计算机协会设立了一年一度的“图灵奖”,表彰那些对计算机科学作出重大贡献的科学家.

1.2.1 算法的概念

《计算机科学技术百科全书》(清华大学出版社)指出:“算法(algorithm),解题过程的精确描述,由有限条可完全机械执行的、有确定结果的指令(或命令、语句)构成.……设计算法与分析算法是计算机科学的核心问题.从应用范围来看,算法可分成数值算法和非数值算法两大类.”由此可见,算法就是指解决问题的方法和思路.虽然处理任何问题都有相应的算法,例如,发送电子邮件、在ATM上取款、制定一天的学习计划等,但是,在本书中,我们讨论的是计算机算法,即计算机中解决问题的方法和思路.

早在20世纪70年代,美国著名计算机科学家克努特(D. E. Knuth)教授就提出了“计算机科学是研究算法的学问”的著名论断,并在他所著的《计算机程序设计技术丛书》第一卷中归纳了计算机算法的5个性质.

(1) 可行性.算法中的每一个操作都应该是计算机可以执行的,这些操作通常是计算机基本运算所包含的内容,例如算术运算、关系运算、逻辑运算等.

(2) 确定性.算法中的每一步必须有清楚的定义,不能有二义性或模棱两可的解释.例如“增加X的值”这句话,并没有说明增加多少,不符合确定性原则.

(3) 有穷性.一个算法必须在执行有限次后结束.就是说,一个算法应在有限的时间内完成,执行时间要合理.因此,算法中不能含有无限循环.

(4) 输出.算法执行完毕,至少要有有一个输出.

(5) 输入.算法执行前应有若干个输入,也可以没有输入.

在教学中,我们可以结合生活中的实例或数学史上的经典问题来讲解算法,使学生在感性上形成算法的概念,并注意以下几个问题:

(1) 学生刚接触计算机时,由于不了解计算机,往往会产生一种错误认识,以为只要把问题原封不动地交给计算机,计算机就会自动得出结果或结论.例如,若要从上海乘车到武汉,希望选择一条中转次数最少的路线,以为只要把地图扫描进计算机,计算机就会自动给出这样一条路线.这是一种常识性的错误认识.实际上,计算机并不能代替人做所有的事情,现在使用的计算机还只能按照人们事先给定的步骤工作.因此,拿到一个问题后,首先要搞清楚做什么,其次设计好一步一步怎么做,也就是设计解决这个问题的算法,最后选择一种合适的计算机语言编写程序,使计算机工作,得到正确的结果.所以,从根本上说,解决任何问题,都必须设计算法、编写程序.

(2) 本书介绍的问题均不复杂,相应算法也较简单,学生拿到题目后,往往不认真考虑算法,一开始就把注意力集中到程序语言的语法规则和语句学习上.要知道,学习程序设计时,如果只知道计算机语言的语法规则,不知道解决问题的算法,就不可能编写出好的程序.语言只是工具,算法才是程序设计的灵魂.只要算法正确,流程图无误,就可以用任何一种语言编写程序.因此,在学生刚开始学习程序设计时,我们就要注意加强算法设计和流程图的教学,而把计算机语言作为程序设计的载体.

1.2.2 算法的描述

1. 算法的类型

计算机算法可分为数值运算算法和非数值运算算法两大类.数值运算算法是指以数学方式表示的问题数值解的方法,例如求方程的根、求函数的定积分、矩阵计算、求最大公约数等;非数值运算算法通常为非数值解的方法,例如排序、查找、文字处理、排列、模拟等.

2. 描述算法的几种方法

算法可以用以下几种方法描述:自然语言,流程图,N-S流程图,伪代码,等等.

(1) 自然语言描述

用自然语言描述算法即用汉语、英语或其他人类自然语言表达算法,它的优点是容易被人们理解和接受.下面我们用汉语来描述“输入三个不相同的数,求出其中的最小数”的算法:先设置一个变量 $\min$,用于存放最小数,当输入 a, b, c 三个不相同的数后,先将 a 与 b 进行比较,把两个数中的小数赋给变量 $\min$,再把 c 与 $\min$ 进行比较,若 c 小于 $\min$,则将 c 的数值赋给 $\min$,最后 $\min$ 中存放的就是三个数中的最小数.但是,用自然语言描述算法的缺点也是非常明显的.

① 如果算法复杂一些,叙述就显得繁琐和冗长.

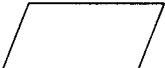
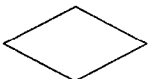
② 在叙述中容易出现“二义性”.例如,“这个人连小王也不认识”,学生可能会有“小王不认识这个人”和“这个人认识小王”这两种理解.

③ 在进行自然语言描述时,语句基本上是线性排列的,因此,对于分支结构和循环结构语句很难清晰地表达出来.

(2) 流程图描述

虽然采用流程图来描述算法不如自然语言灵活自如,但是能够将解决问题的步骤清晰、直观地表示出来,因此,一般在中学信息技术教科书中均采用流程图描述算法.一般地,我们用一组几何图形表示各种类型的操作,在图形上注明扼要的文字和符号表示具体的操作,并用带有箭头的流程线表示操作的先后次序.用流程图描述算法不是线性的,而是二维的,并且它不依赖于特定的计算机和特定的程序设计语言而变化.流程图的基本符号及含义如表 1-1 所示.

表 1-1

图形符号	符号名称	含 义
	起始、终止框	表示一个算法的开始或结束
	输入、输出框	表示输入、输出的内容
	处理框	算法的各种处理操作
	判断框	算法的条件转移
	流程线	表示流向
	连接圈	表示流程的继续

现在我们就用流程图描述“输入三个不相同的数,求出其中的最小数”的算法:

S1 输入 a, b, c ;

S2 将 a 与 b 进行比较,若 $a < b$, 则 $\min \leftarrow a$, 否则 $\min \leftarrow b$;

S3 将 $\min$ 与 c 进行比较,若 $c < \min$, 则 $\min \leftarrow c$;

S4 输出结果 $\min$.

根据上述步骤,我们可以画出如图 1-4 所示的流程图.

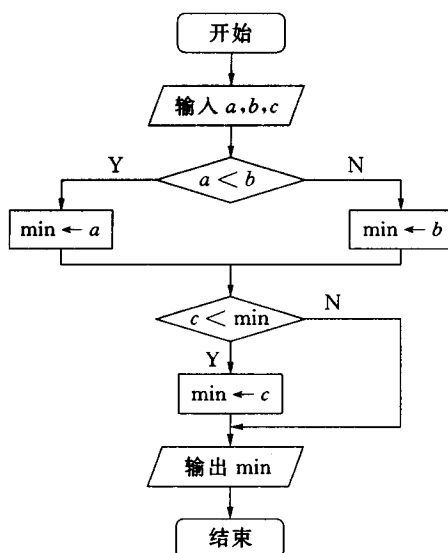


图 1-4

(3) N-S 流程图描述

1973 年,美国学者 I. Naiss 和 B. Shneiderman 提出一种新的流程图表示方法,这种流程图省略了流程线,全部算法写在一个大矩形框中,在大矩形框中又包含许多小的矩形框.这种新型的流程图称为 N-S 流程图,又称为盒图.有兴趣的同学可以自己去寻找这方面的资料.

(4) 伪代码描述

伪代码是指用汉语或者英语(也可以两者同时混合使用)中的词汇模拟一种结构化的程序设计语言(如 Pascal 语言、Visual Basic 语言等)来描述算法,它介于自然语言和计算机语言之间.一般说来,伪代码没有明确的、严格的语法规则,表达比较自由,书写比较紧凑,比较容易理解,所以转化为任何一种程序设计语言也比较方便.

但是,伪代码有它的不足之处,它没有流程图描述的算法直观,如果出现逻辑错误也不便排查.因为计算机语言的种类很多,所以伪代码的语句很难规范,有时会产生误解.

尽管本节列举的例子比较简单,但算法仍是学生较难理解和掌握的内容.本节只是开始,要求不能过高,随着学习的深入和算法积累的增多,学生的理解就会逐步加深.为此,教师在教学中应注意循序渐进,稳扎稳打.

1.3 Visual Basic 语言基本知识

Visual Basic 是 Microsoft 公司于 1991 年推出的基于 Windows 环境的 Basic 语言,简称“VB”.“Visual Basic”意为“可视的 Basic”,即图形界面的 Basic. Visual Basic 是在早期 Basic 语言基础上发展起来的一种可视的、面向对象的、采用事件驱动方式的结构化高级程序设计语言,是目前广泛使用的一种程序设计语言.下面介绍 Visual Basic 6.0 的使用及其程序设计方法(以下如无特别说明,VB 和 Visual Basic 均指 Visual Basic 6.0).

1.3.1 Visual Basic 的启动与退出

1. Visual Basic 的启动和退出

(1) Visual Basic 6.0 的启动和退出

Visual Basic 的启动步骤如下:

S1 单击任务栏中的“开始”按钮,将指针指向“程序”选项;

S2 将指针指向“Microsoft Visual Basic 6.0”选项,然后单击“Visual Basic 6.0”,启动 Visual Basic 6.0.

(2) 进行数学实验的 Visual Basic 工作环境

S1 在“新建”页面中选取“标准 EXE”(图 1-5);

S2 单击“打开(O)”,进入 Visual Basic 后,屏幕上显示如图 1-6 所示的工作环境界面;

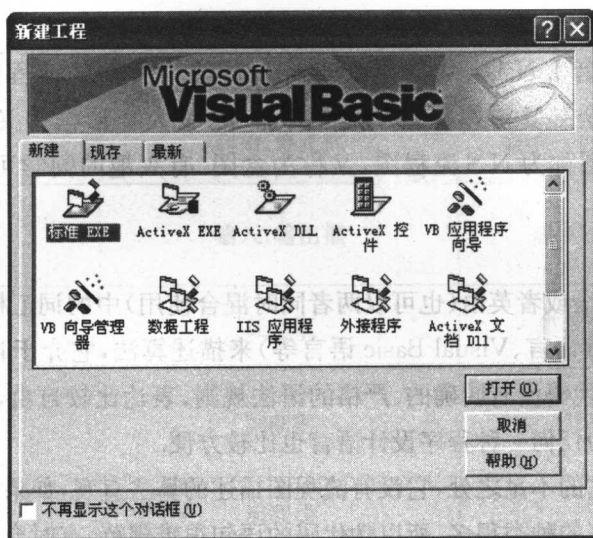


图 1-5

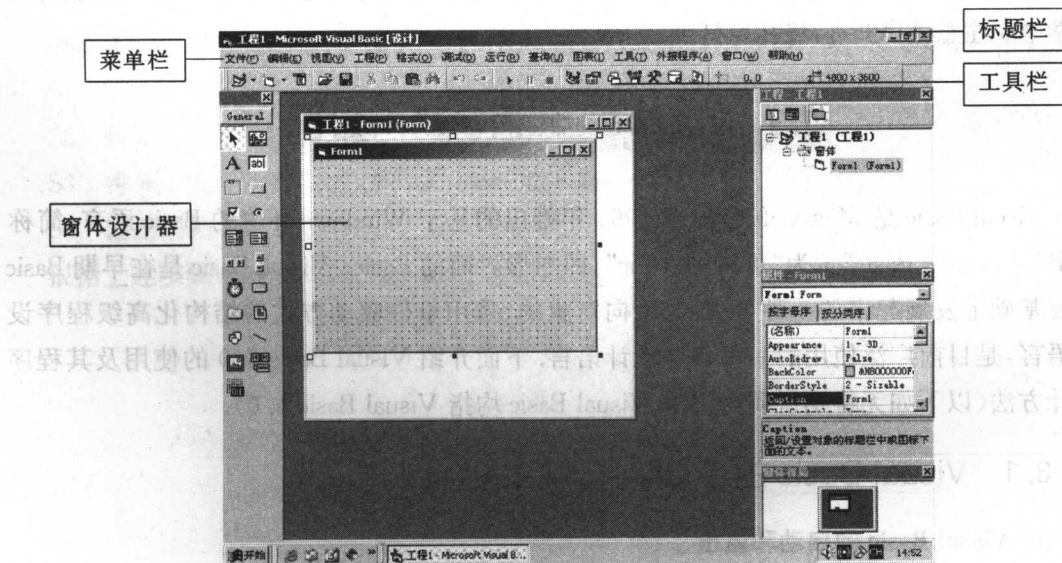


图 1-6

S3 单击“菜单栏”上的“视图(V)”，然后选中下拉菜单中的“代码窗口(C)”并单击；

S4 单击“(通用)”对象列表框，选中“Form”并单击(图 1-7)；

S5 单击“(Load)”过程列表框按钮，选中“Click”并单击(图 1-8)，在这个窗口中，我们可以在“Private Sub Form_Click()”与“End Sub”两行之间输入程序语句进行数学实验了(图 1-9)。

如果要退出实验，只要单击☒按钮即可。

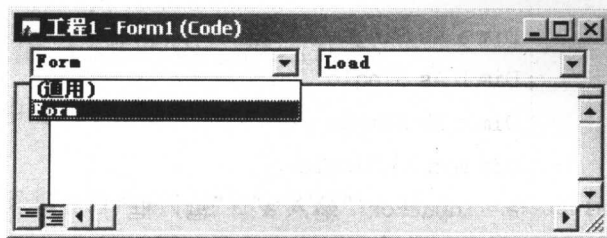


图 1-7

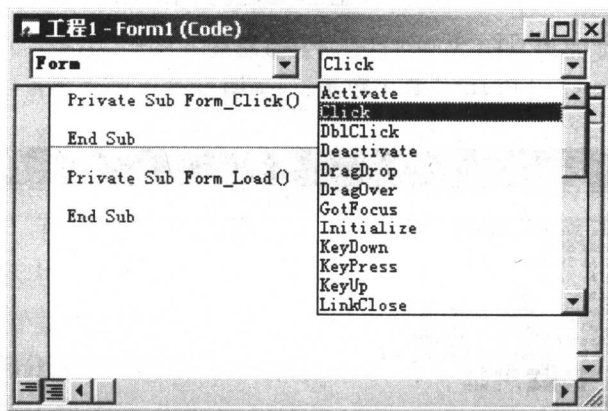


图 1-8

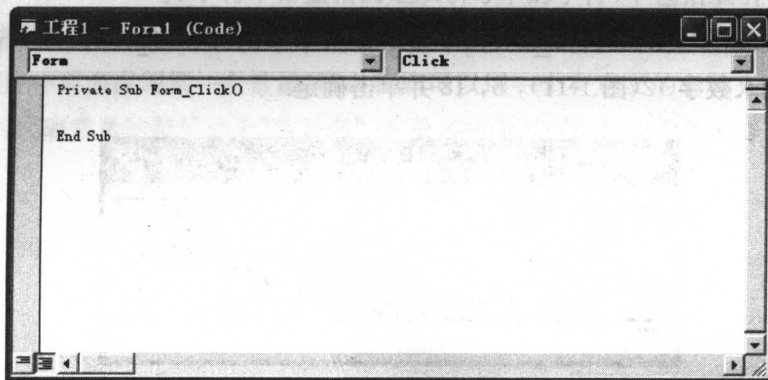


图 1-9

现在,我们就用“输入三个不相同的数,求出其中的最小数”的例子一起来体验如何用计算机进行数学实验.

数学实验室

根据上面的算法设计和流程图,把下列程序输入计算机(图 1-10):