



普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 惯性导航

秦永元 编著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 惯 性 导 航

秦永元 编著

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书全面介绍惯性导航基本理论:1. 惯性仪表:转子陀螺力学基础;液浮积分陀螺、动力调谐陀螺、激光陀螺及摆式加速度计动力学分析及其误差补偿原理。2. 陀螺稳定平台:单轴、三轴、双轴陀螺稳定平台动力学分析、回路设计及误差分析。3. 惯性导航系统:休拉调谐原理;平台式惯性导航系统的力学编排、误差分析及自主式初始对准;在惯性仪表增量输出条件下,捷联式惯导系统姿态更新四元数算法,多子样旋转矢量算法及补偿圆锥效应的优化算法,速度解算中补偿划桨效应及位置解算中补偿涡卷效应的优化算法;捷联惯导的自主式初始对准及动基座传递对准;捷联惯性器件的冗余度技术。

本书为国家级“十五”重点立项教材,可作为惯性导航相关学科的本科生、研究生及专业厂、所、部队工程技术人员的教科书和技术参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

惯性导航 / 秦永元编著. —北京:科学出版社,2006

(普通高等教育“十五”国家级规划教材)

ISBN 7-03-016428-8

I. 惯… I. 秦… III. 惯性导航-高等学校-教材 IV. TN96

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 129717 号

责任编辑:程博原,贾瑞娜 / 责任校对:张怡君

责任印制:黄晓靖 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2006年5月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2006年5月第一次印刷 印张:25

印数:1—3 000 字数:483 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

## 前 言

惯性导航是综合了机电、光学、数学、力学、控制及计算机等学科的尖端技术,广泛应用于航空、航天、航海及重要车辆陆地导航中。由于惯性是所有质量体的基本属性,所以建立在惯性原理基础上的惯性导航系统无需任何外来信息,也不向外辐射任何信息,仅靠系统本身就能在全天候条件下、全球范围内和所有介质环境里自主地、隐蔽地进行三维定位和三维定向。这种同时具备自主性、隐蔽性和能获取运载体完备运动信息的独特优点是诸如卫星导航、无线电导航和天文导航等其他导航系统无法比拟的。尽管这些导航系统的某些导航性能远优于惯导系统,但惯导系统仍然是重要运载体不可缺少的核心导航设备。

本书为国家级“十五”重点立项教材,面向的读者是与惯性导航有关的导航、制导与控制,精密仪器及机械,检测技术与自动化装置等学科的本科生、研究生及相关专业厂、所、部队的工程技术人员。本书全面介绍了惯性仪表、惯性平台及惯性导航系统的设计理论,内容丰富,涉及面宽。全书注意了内容安排上的铺垫和连贯,阐述中采用物理概念直观解释和数学力学严格推导相结合的方法,引导读者顺利理解概念,掌握内容实质,力求提高可读性。同时,本书融入了作者的部分科研成果,对工程应用具有一定的参考价值。

全书共分三篇,第一篇(第二、三章)阐述了惯性仪表基本理论,包括陀螺力学基础、液浮陀螺、动力调谐陀螺、激光陀螺及摆式加速度计工作原理等;第二篇(第四~第六章)系统介绍了陀螺稳定平台设计和分析理论,包括单轴稳定平台工作原理分析及系统回路设计理论,三轴陀螺稳定平台隔离干扰及跟踪指令工作原理分析,传递函数矩阵及动力学分析,平台误差分析,双轴平台设计分析;第三篇(第七~九章)介绍惯性导航系统,包括地球上的定位,休拉调谐原理,平台式惯导的力学编排、误差分析及自主式初始对准,捷联式惯导姿态更新四元数算法和多子样旋转矢量算法及考虑圆锥效应补偿的优化算法,捷联惯导速度解算中考虑划桨效应补偿的优化算法及位置解算中考虑涡卷效应补偿的优化算法,捷联惯导的自主式初始对准和动基座传递对准,捷联惯性器件的余度技术。

各篇间既有一定的连贯性,又相对独立,读者可根据需要自行选用所需内容。

本书承蒙空军工程大学张宗麟教授审阅。张教授提出了许多宝贵意见,在此谨致深切谢意。

书中存在的缺点和错误,敬请读者批评指正。

作 者

2005年8月

# 目 录

## 前言

<b>第一章 绪论</b> .....	1
1.1 惯性技术的发展及现状 .....	1
1.2 常用关系式 .....	5

## 第一篇 惯性器件

<b>第二章 陀螺仪</b> .....	13
2.1 转子陀螺的力学原理.....	13
2.2 双自由度陀螺仪.....	17
2.3 单自由度陀螺仪.....	24
2.4 动力调谐陀螺仪.....	36
2.5 激光陀螺.....	61
2.6 光纤陀螺简介.....	76
<b>第三章 摆式加速度计</b> .....	78
3.1 加速度计简介.....	78
3.2 挠性摆式加速度计.....	81

## 第二篇 陀螺稳定平台

<b>第四章 陀螺稳定平台工作原理</b> .....	95
4.1 各类稳定平台简介.....	95
4.2 力矩装置和平台台体的传递函数 .....	106
4.3 单轴陀螺稳定平台 .....	113
<b>第五章 三轴陀螺稳定平台</b> .....	133
5.1 三轴平台简介 .....	133
5.2 环架驱动信号的合理分配——方位坐标分解器和俯仰正割分解器 .....	134
5.3 三轴平台工作原理分析 .....	142
5.4 三轴平台的方位锁定原理 .....	148

5.5	三轴平台的动力学方程和系统的传递函数阵 .....	149
5.6	采用积分陀螺时三轴平台系统的输出轴耦合分析 .....	161
5.7	三轴平台的误差分析 .....	164
<b>第六章</b>	<b>双轴陀螺稳定平台</b> .....	<b>185</b>
6.1	稳定瞄准线的双轴稳定平台 .....	185
6.2	水平式双轴稳定平台 .....	188

### 第三篇 惯性导航系统原理

<b>第七章</b>	<b>惯导系统中的基本关系</b> .....	<b>203</b>
7.1	惯导系统的分类 .....	203
7.2	地球的描述 .....	204
7.3	休拉调谐 .....	216
7.4	惯导系统的基本方程——比力方程 .....	224
7.5	惯性高度通道的稳定性分析 .....	226
<b>第八章</b>	<b>平台式惯导系统</b> .....	<b>231</b>
8.1	平台式惯导系统的力学编排 .....	231
8.2	平台式惯导系统的误差分析 .....	245
8.3	平台式惯导系统的初始对准 .....	263
8.4	扩展导航参数解算和飞机转弯方式 .....	280
<b>第九章</b>	<b>捷联式惯导系统</b> .....	<b>287</b>
9.1	概述 .....	287
9.2	姿态更新计算的四元数算法 .....	288
9.3	姿态更新计算的等效旋转矢量算法 .....	305
9.4	锥运动环境下旋转矢量算法的优化 .....	317
9.5	姿态更新的其他算法及各种算法的比较 .....	327
9.6	捷联惯导系统的速度算法 .....	331
9.7	捷联惯导系统的位置算法 .....	340
9.8	捷联惯导系统的误差模型 .....	355
9.9	捷联惯导系统在晃动基座上的自对准 .....	361
9.10	捷联惯导系统的动基座传递对准 .....	375
9.11	捷联惯性器件的余度技术 .....	381
<b>参考文献</b>	.....	<b>390</b>

# 第一章 绪 论

## 1.1 惯性技术的发展及现状

导航是指将运动体从甲地导引到目的地乙地的技术,这门技术既古老又年轻。古罗马人利用北极星和太阳作为方位基准,横渡地中海,来往于南欧和北非之间。郑和利用指南针率领庞大的船队七下西洋,开创了茫茫大海上的远航。在古代先民的导航过程中,利用的信息资源非常直观,采用的方法和原理十分简单,所以导航精度非常低。随着人类对自然现象本质的深入认识和科学技术的发展,导航信息新资源和新理论不断被发现。麦哲伦使用六分仪的天文导航完成了环球航行。牛顿力学的创建使人们能正确认识惯性,根据惯性原理制造出在运动体内建立人工参考基准的惯性仪器,并逐步完善和发展成惯性导航系统,使人们能探索更深更远的空间。

惯性导航是一门综合了机电、光学、数学、力学、控制及计算机等学科的尖端技术,是现代科学技术发展到一定阶段的产物。由于惯性是所有质量体的基本属性,所以建立在惯性原理基础上的惯性导航系统不需要任何外来信息,也不会向外辐射任何信息,仅靠惯性导航系统本身就能在全天候条件下,在全球范围内和任何介质环境里自主地、隐蔽地进行连续的三维定位和三维定向,这种同时具备自主性、隐蔽性和能获取运载体完备运动信息的独特优点是诸如无线电导航、卫星导航和天文导航等其他导航系统无法比拟的,尽管这些导航系统的某些导航性能可能远远优于惯导系统,但惯导仍然是重要运载体不可缺少的核心导航设备。

作为一门高科技尖端技术,惯性技术是在先进科学理论和制造工艺支持条件下发展起来的。早在1687年,牛顿提出了力学三大定律,从本质上揭示了宏观力学的定量关系,为惯性导航奠定了理论基础<sup>[1]</sup>。1765年俄国科学院院士欧拉出版了著作《刚体绕定点运动的理论》,首次利用解析分析的方法对定点转动刚体作了本质解释,创立了转子陀螺仪的力学基本理论。1778年法国科学家拉格朗日在《分析力学》一书中建立了在重力力矩作用下定点转动刚体的运动微分方程组。1852年法国科学家傅科根据欧拉和拉格朗日的刚体定点转动理论制造出了用于验证地球自转运动的测量装置,并在巴黎科学院做了实验演示,傅科把这一测量装置命名为Gyroscope,在希腊文中为转动和观察的意思。虽然傅科只定性地观察到了地球的自转而未能精确测出地球的自转角速度,但傅科的研究开创了人们对工程实用陀螺仪的研究和开发。转子陀螺仪的工程应用主要利用了陀螺的定轴性和进动性,而要陀螺仪达到一定的精度,必须确保转子以恒定的角速度旋转,傅科采用人工拉动

绳索驱动转子旋转是无法达到这一要求的。19世纪80年代陀螺技术有了重大突破,发明家特鲁和霍普金斯用电动机驱动陀螺转子,大大提高了陀螺转子的旋转速度和转速的稳定性,并制造出了陀螺罗经试验装置。1908年德国科学家安修茨设计了一种单转子摆式陀螺罗经,在该系统中,陀螺转子采用了三相交流电机驱动,陀螺组件用水银悬浮,支承中心偏离陀螺组件质心,使陀螺形成一个重力摆,从而制造出了世界上第一台摆式陀螺罗经,该系统依靠重力力矩自动找北。后人称颂这是陀螺技术中最巧妙的设计。陀螺罗经解决了当时舰船的远航和潜艇较长时间的潜航问题。1910年德国科学家休拉发现了陀螺罗经的无干扰条件,即当陀螺罗经的无阻尼振荡周期为84.4分钟时,陀螺罗经的指北精度不受外界加速度冲击的影响,这就是著名的休拉调谐原理。1912年安修茨对陀螺罗经原设计作了重大改进,用三个陀螺代替原设计中单个陀螺的结构,解决了原设计中舰船摇摆产生的摇摆误差。1927年安修茨将三陀螺罗经改进设计成双陀螺罗经,此即为安修茨MK-1型罗经,该罗经采用双转子液浮摆式结构,设计非常巧妙,成为两种典型的航海罗经之一,流传使用了半个多世纪,直至50年代出现了更先进的电磁控制罗经,才逐步被取代。另一类航海罗经是美国的斯派利罗经,该型罗经采用单转子钢丝悬挂式结构,其性能与安修茨罗经并驾齐驱,并列列为舰船航海仪器的两大支柱,为航海事业做出了重大贡献。

休拉对惯性技术的发展起到了关键的理论指导作用。休拉在发现陀螺罗经无干扰条件的研究基础上,进一步发现无干扰条件具有普遍性,即休拉调谐原理不光适用于陀螺罗经,也同样适用于地垂线指示系统、任何陀螺装置、任何摆和机械仪器,只要系统具有84.4分钟的无阻尼振荡周期,运载体的加速度就不会影响系统的指示精度。1923年休拉发表论文《运载工具的加速度对于摆和陀螺仪的干扰》<sup>[2,3]</sup>,以垂线指示系统为例系统阐明了休拉摆原理,为惯性导航系统的设计奠定了理论基础。

第二次世界大战期间,德国的V-2火箭采用两个双自由度陀螺和一个陀螺积分加速度计构成惯性制导系统,这是惯性技术在导弹制导上的首次应用,但由于陀螺和加速度计精度很低,惯性系统设计又十分粗糙,根本实现不了休拉调谐要求,加上控制系统十分原始,制导精度极低,在轰炸伦敦的过程中,有1/4的V-2火箭提前掉入大海。

在确保陀螺仪转子自转角速度恒定的技术问题解决后,提高陀螺仪精度的主要途径是减小沿陀螺仪支承轴的干扰力矩,特别是摩擦力矩。20世纪50年代美国麻省理工学院德雷帕实验室采用液浮支承,成功研制了单自由度液浮陀螺,有效降低了支承引起的摩擦力矩,使陀螺漂移达到了惯性级要求<sup>[4-6]</sup>,并在1949年成功研制出了命名为“菲佰”的惯性装置,这套装置安装在B29飞机上完成了从马萨诸塞州至新墨西哥州的10个小时长途全自动飞行。该系统虽然还不具备惯导系统的功能,但为惯导系统的研制打下了基础。1950年5月美国北美航空公司奥托奈蒂



克斯分公司为美国空军研制成功了第一套纯惯性导航系统 XN-1,并安装在 C47 飞机上成功进行了试飞。为了适应航海应用,XN-1 经过适当改型,成为 N6 惯性导航系统。1958 年 7 月美国海军鸚鵡螺号核潜艇进行了一次穿越北极冰盖的探险航行。鸚鵡螺号装备有一套 N6-A 惯性导航系统和一套 MK-19 平台罗经,从珍珠港出发,穿越北极冰盖,最终到达英国波特兰港,历时 21 天。其中穿越北极时以 20 海里<sup>①</sup>的时速在水下潜航 8146 海里,在即将到达目的地时潜艇浮出水面,经过测量,定位误差仅为 20 海里。这一震惊世界的成功,充分显示了惯性导航系统有别于其他导航系统的独特优点:自主性、隐蔽性、信息的完备性。这些特点在军事应用中尤为重要。

惯性导航系统发展依靠三方面科学技术发展的支撑:新概念测量原理和新型惯性器件、先进制造工艺、计算机技术。

20 世纪 60 年代,在液浮陀螺臻至完善的同时,挠性陀螺的研究逐渐起步。关于挠性支承的概念首先是由英国皇家航空研究院(RAE)于 1946 年提出的,1965 年 RAE 研制了三套挠性陀螺原理样机,证明了原理的可行性<sup>[7,11]</sup>。1969 年英国费伦蒂公司根据国防合同研制了 6 个陀螺,进行了长达十年的长时间测试。挠性陀螺有两种支承形式:细颈支承和平衡环挠性接头支承。采用后一种支承的陀螺称为动力调谐陀螺,原因是陀螺达到设计转速时,平衡环扭摆产生的惯性力矩正好抵消挠性接头产生的弹性力矩,即陀螺正常工作时处于动力调谐状态。相对液浮陀螺,动力调谐陀螺结构简单,易于制造,成本低廉,因而得到了广泛应用。经过不断改进和完善,用于平台式惯导的动力调谐陀螺的漂移已达到了  $0.01^{\circ}/\text{h}$ ,精度最高的可达到  $0.001^{\circ}/\text{h}$ 。在 20 世纪的最后 20 多年时间内,用动力调谐陀螺构造的中等精度(航空标准惯导的定位精度为  $1\text{ n mile}/\text{h}$ )平台式惯性导航系统大量出现,最具代表性的是美国利登公司的 LTN-72 系列惯导系统,在当时几乎占据了世界民航飞机标准惯导的全部订单。

另一类新概念支承陀螺是静电陀螺,静电支承原理是由美国伊利诺伊大学诺特西克教授在 1952 年率先提出的<sup>[9]</sup>,20 世纪 70 年代,美国霍尼韦尔公司和罗克韦尔公司研制出了静电陀螺监控器和导航仪。该型陀螺经过不断的改进和完善,漂移误差一般都小于  $10^{-4}^{\circ}/\text{h}$ ,更高精度可达到  $10^{-6}\sim 10^{-7}^{\circ}/\text{h}$ ,在人造卫星的失重和真空环境条件下,最高精度甚至达到了  $10^{-9}\sim 10^{-11}^{\circ}/\text{h}$ ,该类陀螺据称曾在人造卫星上做过对爱因斯坦相对论的验证试验。正由于静电陀螺具有如此高的精度,所以被重点用作战略武器机动投掷平台的高精度基准,诸如战略核潜艇的静电陀螺监控器和静电陀螺惯性导航系统,远程战略轰炸机的静电陀螺惯性导航系统等。

与静电支承相似的支承还有磁悬浮支承和气浮支承。由于这些支承存在易受环境条件干扰、制造工艺复杂等缺陷,精度远不如静电陀螺,所以应用范围都很有

① 1 海里(n mile)=1.852km。

限,并未形成主流。激光陀螺和光纤陀螺的出现是惯性技术的一场大革命,这类光学陀螺与传统的机械转子陀螺的工作原理有本质的区别,后者服从解释宏观世界的牛顿力学,而前者服从解释微观世界的量子力学,因此是一种全新概念的惯性器件<sup>[10]</sup>。利用光的干涉原理测量旋转运动早在20世纪初就有人提出过。1913年法国物理学家萨格奈克研制了一种光学干涉仪<sup>[21,22]</sup>,1925年迈克耳孙根据干涉仪研制出了一种光学陀螺测量装置,用于测量地球的自转角速度<sup>[28]</sup>。该装置由300m×600m的矩形光学回路构成,但所采用的光源是普通光,相干性极差,干涉条纹的移动量仅为干涉条纹间距的1/4,测量精度极低。1960年物理学家发明了激光,1962年世界上第一台氦氛激光器问世,以美国为首的技术先进国家开始研制激光陀螺,1963年,斯派利陀螺公司首次成功演示了环形激光陀螺<sup>[25]</sup>。经过21年的不懈努力,美国霍尼韦尔公司于1982年批量生产GG1342激光陀螺,该型陀螺MTBF高达90000h,是机械转子陀螺无法比拟的<sup>[11]</sup>。抖动型激光陀螺的精度等级大致在 $10^{-2}\sim 10^{-3}$ °/h量级范围内,是构造航空标准惯导的理想惯性器件,美国利登公司生产的LTN-90系列激光捷联惯导被认定为美国民航飞机、政府运输和行政飞机的必备导航系统,取代了LTN-72而成为标准机载惯导系统。

光纤陀螺是比激光陀螺稍晚出现的另一类光学陀螺。与激光陀螺相比,光纤陀螺的体积更小,功耗更低,并且价格低廉,更便于批量生产<sup>[11]</sup>。尽管光纤陀螺的精度还赶不上激光陀螺,目前还只能满足战术武器的精度要求,但随着光纤制造技术和集成光学器件性能的不断改善,其潜在的优势将逐渐显露出来。

随着制作集成电路的硅半导体工艺的成熟和完善,20世纪80年代开始出现了微型机械、微型传感器和微型执行器的微机械制造技术,这种采用微型机械机构和控制电路工艺制造微机电系统的技术常称为MEMS技术。MEMS技术在惯性技术领域中的成果体现是硅微陀螺及硅微加速度计。1991年麻省理工学院德雷帕实验室成功研制出微型惯性测量组合,包括三个陀螺仪,三个加速度计以及相应的控制电路,陀螺精度已达到漂移小于 $10^{\circ}/h$ ,而整个惯性测量组合的体积仅为 $2cm\times 2cm\times 0.5cm$ ,质量仅为5g,并已在增程制导炮弹上作了试验<sup>[12]</sup>。MEMS惯性器件不仅具有因为体积小、重量轻、易于安装、高可靠、耐冲击而应用广泛的特点,而且可以实现大批量的生产,在成本上具有优势,因此距离在民用领域及战术武器领域内普及应用的时间不会太久。

惯性技术水平的标志一方面反映在惯性器件的性能及制造工艺水平上,另一方面反映在系统设计理论及工程实现水平上。平台式惯性导航系统中,用机电控制方法建立起物理实体平台,用于模拟所要求的导航坐标系。由于有惯性平台隔离了运载体的角运动,导航坐标系的旋转又十分缓慢,所以平台式惯导系统中陀螺的动态范围可以很小,导航计算机的解算负担也比较轻,针对20世纪60~70年代计算机水平还不高,陀螺的施矩电流还不能太大的实际情况,采用物理平台构造惯性导航系统是合适的。平台式惯导的最大缺点是结构复杂、体积大、重量重、可靠性

差,所以随着激光陀螺批量制造技术的成熟,捷联式惯性导航系统正在各个领域逐步取代平台式惯性导航系统,特别是诸如飞机、导弹等中低精度应用领域几乎都采用捷联式惯导系统。利登公司在十年前就推出 LTN-92 激光捷联式惯导系统,作为替换挠性陀螺平台式惯导 LTN-72 的换代产品,波音和空中客车民航机几乎都装备 LTN-92 激光捷联式惯导系统。

捷联式惯导系统的最大特点是依靠算法建立起导航坐标系,即平台坐标系以数学平台形式存在,这样省略了复杂的物理实体平台,结构简单、体积小、重量轻、成本低、维护简便、可靠性高,还可通过冗余技术提高系统的容错能力。但这些好处是用复杂的算法设计和繁重的计算负荷换取的。姿态更新解算是捷联式惯导的关键算法。传统的姿态更新算法有欧拉角法、方向余弦法和四元数法,其中四元数皮卡算法简单、计算量小,因而在工程实际中常采用。但四元数皮卡算法仅为单子样算法,不可交换误差补偿不彻底,特别是运载体姿态变化剧烈时,这种误差更加严重。1971 年 Bortz 和 Jordan 提出了等效旋转矢量概念<sup>[13]</sup>,将运载体的姿态四元数更新转化为姿态变化四元数的更新,为姿态更新的多子样算法提供了理论依据。1980 年 Gilmore 提出了在快速计算回路内迭代解算旋转矢量,在慢速计算回路内解算姿态四元数<sup>[14]</sup>。1983 年 Miller 探讨了锥运动条件下等效旋转矢量的三子样优化算法,优化指标是圆锥误差影响达到最小<sup>[15]</sup>。在此基础上, Lee 和 Yoon 研究了四子样算法<sup>[16]</sup>, Jiang 研究了利用本更新周期内的三子样及前更新周期内的角增量计算旋转矢量的优化算法<sup>[17]</sup>。1995 年 Musoff 提出了圆锥补偿算法的优化指标,分析了算法误差与补偿周期的关系<sup>[18]</sup>。对于运动状态变化剧烈和导航定位精度要求特别高的应用场合,除对圆锥运动效应作补偿计算外,还要对划桨运动效应和涡卷运动效应作补偿计算,对此, Savage 作了系统研究<sup>[19,20]</sup>。

## 1.2 常用关系式

在本书的分析和推导中经常用到一些运算关系式,此处列出一部分。

### 1.2.1 坐标变换

设坐标系  $O-X_1Y_1Z_1$  绕  $OZ_1$  轴旋转  $\alpha$  角后得到坐标系  $O-X_2Y_2Z_2$ , 空间矢量  $r$  在  $O-X_1Y_1Z_1$  (简称坐标系 1) 内的投影为  $[r_{x_1} \ r_{y_1} \ r_{z_1}]^T$ , 在  $O-X_2Y_2Z_2$  (简称坐标系 2) 内的投影为  $[r_{x_2} \ r_{y_2} \ r_{z_2}]^T$ , 要求推导出两组坐标值间的关系。由于旋转轴绕  $OZ_1$  轴进行, 所以  $Z$  坐标未变, 即有  $r_{z_1} = r_{z_2}$ , 由图 1.2.1 得

$$\begin{aligned} r_{x_2} &= OA + AB + BC \\ &= OD\cos\alpha + BD\sin\alpha + BF\sin\alpha \\ &= r_{x_1}\cos\alpha + r_{y_1}\sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{Y_2} &= DE - AD \\
 &= DF \cos \alpha - OD \sin \alpha \\
 &= r_{Y_1} \cos \alpha - r_{X_1} \sin \alpha \\
 r_{Z_2} &= r_{Z_1}
 \end{aligned}$$

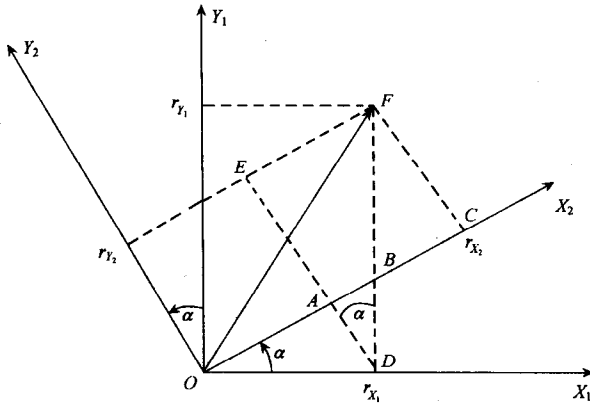


图 1.2.1 坐标系间的变换关系

将上述三式写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} r_{X_2} \\ r_{Y_2} \\ r_{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{X_1} \\ r_{Y_1} \\ r_{Z_1} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

记

$$r^1 = \begin{bmatrix} r_{X_1} \\ r_{Y_1} \\ r_{Z_1} \end{bmatrix}, \quad r^2 = \begin{bmatrix} r_{X_2} \\ r_{Y_2} \\ r_{Z_2} \end{bmatrix}, \quad C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则式(1.2.1)可写成

$$r^2 = C_1^2 r^1$$

该式描述了同一矢量在不同坐标系内投影间的变换关系， $C_1^2$  称为从坐标系 1 至坐标系 2 的变换矩阵。经观察后可发现  $C_1^2$  的诸元是坐标系 1 各轴上的单位 1 在坐标系 2 各轴上的投影，其中投影关系可用图 1.2.2 来表示。

上述变换关系分析中，坐标系 2 是经坐标系 1 仅绕  $Z_1$  轴旋转  $\alpha$  角后获得的，为便于叙述，称仅绕一根轴的旋转为基本旋转。两坐标系间任何复杂的角位置关系都可以看作有限次基本旋转的复合，变换矩阵等于基本旋转确定的变换矩阵的连乘，连乘顺序依基本旋转的先后次序由右向左排列。例如运载体的空间姿态可看作

依次绕航向轴、俯仰轴、横滚轴作基本旋转后的复合结果,如图 1.2.3 所示。图中, $n$  坐标系为地理坐标系, $X_n$  指东、 $Y_n$  指北、 $Z_n$  指天, $b$  坐标系为机体坐标系, $X_b$  指右、 $Y_b$  指前、 $Z_b$  指上。飞机的空间角位置由下述依次基本旋转确定:

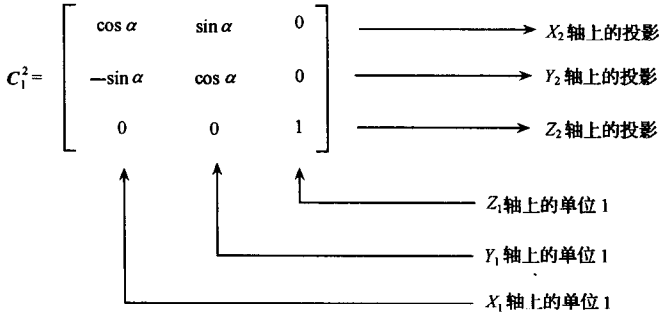


图 1.2.2 坐标系 1 和坐标系 2 之间的投影关系

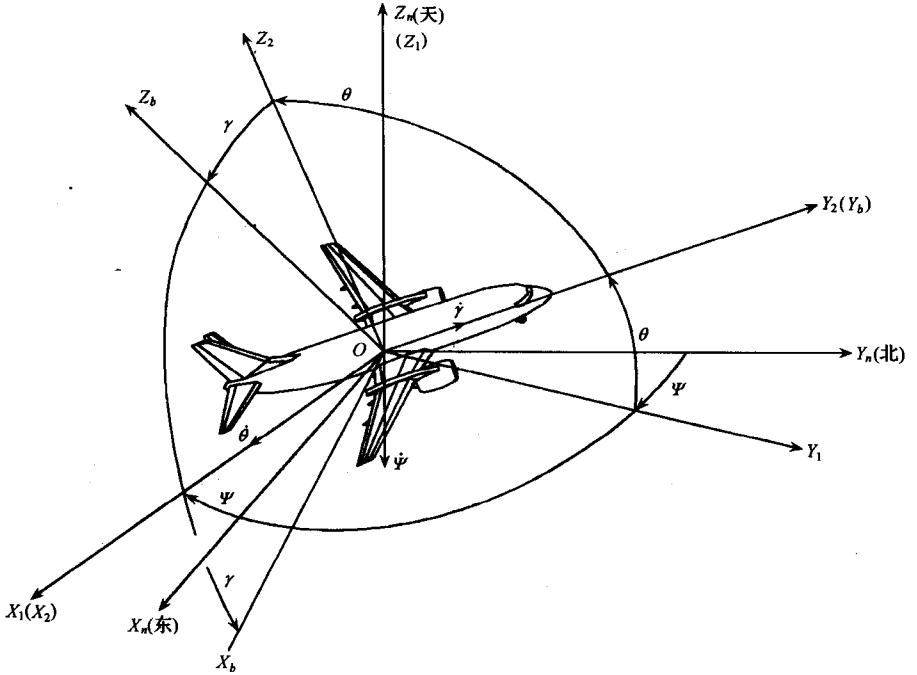


图 1.2.3 飞机空间角位置的确定

$$O-X_n Y_n Z_n \xrightarrow[\text{旋转 } \psi]{\text{绕 } -Z_n \text{ 轴}} O-X_1 Y_1 Z_1 \xrightarrow[\text{旋转 } \theta]{\text{绕 } X_1 \text{ 轴}} O-X_2 Y_2 Z_2 \xrightarrow[\text{旋转 } \gamma]{\text{绕 } Y_2 \text{ 轴}} O-X_b Y_b Z_b$$

各次基本旋转对应的变换矩阵为

$$C_n^1 = \begin{bmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$C_2^b = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

所以姿态矩阵为

$$C_n^b = C_2^b C_1^2 C_n^1 = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\Psi + \sin\gamma\sin\Psi\sin\theta & -\cos\gamma\sin\Psi + \sin\gamma\cos\Psi\sin\theta & -\sin\gamma\cos\theta \\ \sin\Psi\cos\theta & \cos\Psi\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\gamma\cos\Psi - \cos\gamma\sin\Psi\sin\theta & -\sin\gamma\sin\Psi - \cos\gamma\cos\Psi\sin\theta & \cos\gamma\cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

式中,  $C_n^b$  与旋转次序有关, 即当旋转角  $\Psi, \theta, \gamma$  不都为小角时, 对应于不同的旋转次序, 坐标系  $b$  的最终空间位置是不同的, 这就是常说的有限转动的不可交换性。但当  $\Psi, \theta, \gamma$  都为小角时, 忽略小角间的高阶小量

$$C_n^b = \begin{bmatrix} 1 & -\Psi & -\gamma \\ \Psi & 1 & \theta \\ \gamma & -\theta & 1 \end{bmatrix}$$

其中  $\Psi, \theta, \gamma$  的单位为弧度。此时由  $\Psi, \theta, \gamma$  构成的列向量  $[\Psi \ \theta \ \gamma]^T$  可视为三维空间矢量, 各分量正负号的规定为: 当产生小角的旋转方向与坐标轴指向相同时该小角取正, 否则取负。此时旋转后坐标系的最终角位置与旋转次序无关, 这就是常说的无限转动与旋转次序无关。

根据上述分析, 可得出如下一般关系: 设坐标系  $P$  偏离坐标系  $T$  的偏离角  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$  均为小角, 则

$$C_T^P = \begin{bmatrix} 1 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 1 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

由于直角坐标系间的变换矩阵为单位正交矩阵, 所以如果在坐标系  $n$  至坐标系  $b$  的等效旋转中各坐标系都保持为直角坐标系, 则根据单位正交矩阵的性质有

$$C_b^n = (C_n^b)^{-1} = (C_n^b)^T$$

### 1.2.2 矢量的叉乘

矢量是既有大小又有方向的量,常用两种方式来描述矢量。设有矢量  $r$ , 可用  $r$  的模  $r = |r|$  和  $r$  的单位矢量  $u = \frac{r}{r}$  来描述:  $r = ru$ , 如此描述的矢量常称为物理矢量。也可以用  $r$  在坐标系  $n$  的各轴上的投影来描述:  $r^n = [r_x^n \ r_y^n \ r_z^n]^T$ , 如此描述的矢量称为数学矢量。矢量的叉乘可用物理矢量和数学矢量来表示。

设有物理矢量  $r$  和  $s$ , 则  $t = r \times s$  的方向由右手定则确定, 大小为  $t = |t| = |r| \cdot |s| \sin(\widehat{r, s})$ 。

设有数学矢量  $r^n = [r_x^n \ r_y^n \ r_z^n]^T$ ,  $s^n = [s_x^n \ s_y^n \ s_z^n]^T$ ,  $t^n = r^n \times s^n$ , 则

$$\begin{bmatrix} t_x^n \\ t_y^n \\ t_z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z^n & r_y^n \\ r_z^n & 0 & -r_x^n \\ -r_y^n & r_x^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x^n \\ s_y^n \\ s_z^n \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

其中,  $t^n = [t_x^n \ t_y^n \ t_z^n]^T$ 。

### 1.2.3 哥氏定理

哥氏定理用于描述绝对变化率与相对变化率间的关系。设有矢量  $r, m$  和  $n$  是两个作相对旋转的坐标系, 则哥氏定理可描述为

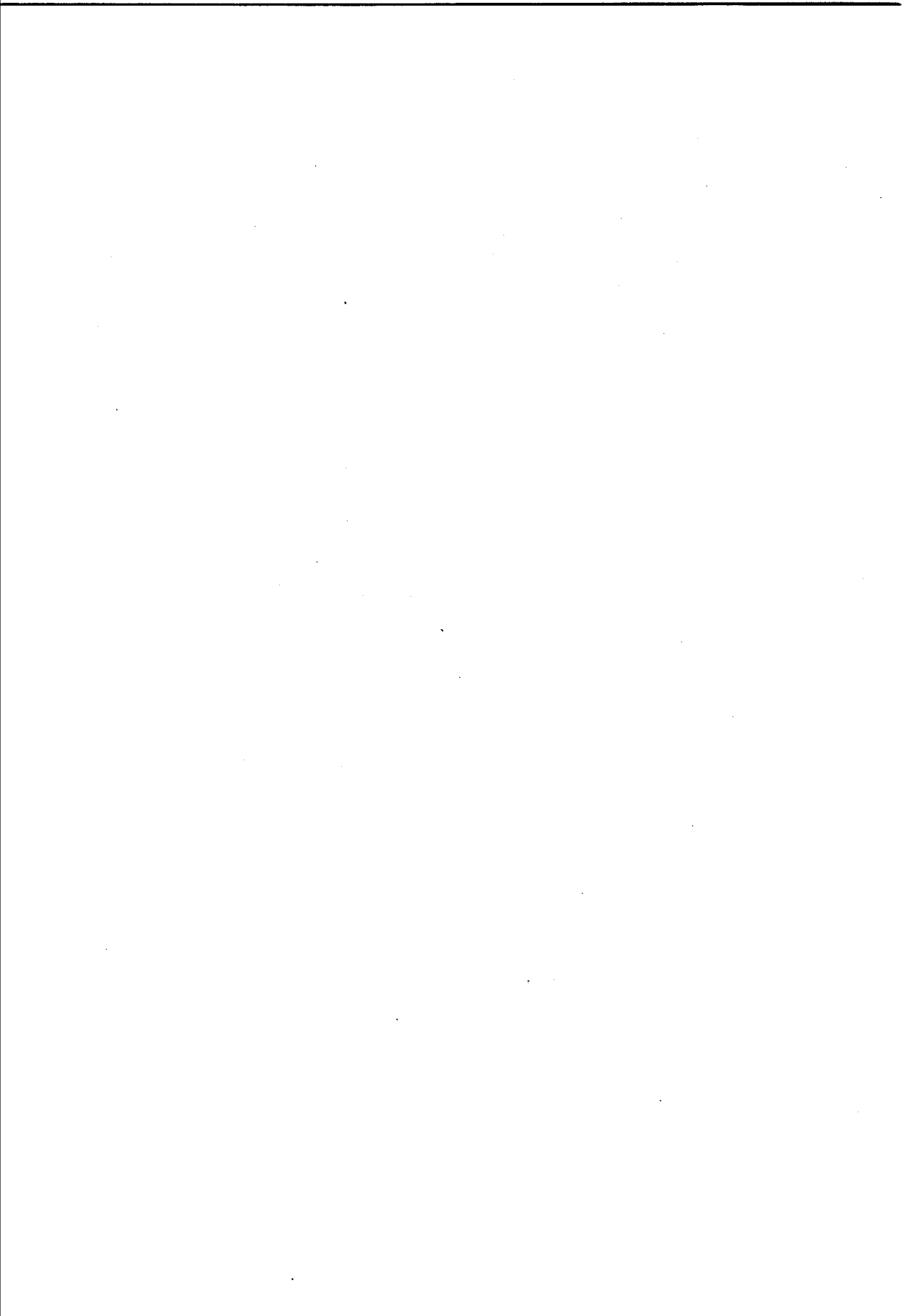
$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_m = \left. \frac{dr}{dt} \right|_n + \omega_{mn} \times r \quad (1.2.5)$$

其中,  $\left. \frac{dr}{dt} \right|_m$  和  $\left. \frac{dr}{dt} \right|_n$  是分别在  $m$  坐标系和  $n$  坐标系内观察到的  $r$  的时间变化率,  $\omega_{mn}$  是坐标系  $n$  相对坐标系  $m$  的旋转角速度。如果将式(1.2.5)两边的矢量都向  $m$  坐标系投影, 则有

$$\dot{r}^m = C_n^m \dot{r}^n + \omega_{mn}^m \times r^m \quad (1.2.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{r}^m &= [\dot{r}_x^m \ \dot{r}_y^m \ \dot{r}_z^m]^T \\ \dot{r}^n &= [\dot{r}_x^n \ \dot{r}_y^n \ \dot{r}_z^n]^T \end{aligned}$$





# 第一篇 惯性器件

惯性器件或称惯性仪表,即陀螺仪和加速度计。陀螺仪用来测量运载体的角运动,或在控制角运动的伺服回路中用作控制环节,加速度计用来测量运载体的加速度。其中,“惯性”具有两重含义:陀螺和加速度计服从牛顿力学,基本工作原理是动量矩定理和牛顿第二定理,即基本惯性原理;作为测量元件时输出量都是相对惯性空间的测量值,如角速度输出是相对惯性空间的角速度,加速度输出是绝对加速度,陀螺作为控制元件时,产生的角速度是相对惯性空间的角速度。

本篇主要对陀螺仪和加速度计作系统介绍。