奥林匹克教学辅导丛书

高中数学竞赛基础教程

刘诗雄 编著

第一册

GAO ZHONG SHU XUE JING SAI JI CHU JIAO CHENG

华中师范大学出版社

奥林匹克数学辅导丛书

高中数学竞赛基础教程

第一册

刘诗雄　编著

华中师范大学出版社

奥林匹克数学辅导丛书

高中数学竞赛基础教程

第一册

刘诗雄　编著

*

华中师范大学出版社出版发行

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所经销

孝感报社印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 8.875　字数 200 千字

1991 年 5 月第 1 版　1991 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-5622-0646-5/G・215

印数：1—32,000　定价：3.50 元

出版说明

国际数学、物理、化学、计算机奥林匹克是世界上规模和影响最大的中学生学科竞赛活动。这项活动为各国表现本民族的聪明才智提供了合适的的舞台，因而，受到越来越多的国家的重视。几年来，我国中学生在这项活动中获得了优异成绩，震惊中外。为了使中小学生开阔视野、启迪思维、发展才能，进一步推动中小学奥林匹克竞赛活动的普及开展，为了促进中小学教育的深化，为我国科学技术的腾飞做好准备，我社特约请一批热心奥林匹克事业的专家教授和中小学教师编写了这套《奥林匹克教学辅导丛书》。

这套丛书包括有数学、物理、化学、计算机、外语等五门学科。其中，中小学数学奥林匹克教学辅导书 5 册已经正式出版，物理、化学、计算机和外语等中小学奥林匹克教学辅导书也将陆续出版。本丛书的作者都是首批《中国奥林匹克高级教练员》和湖北省奥林匹克优秀教练员，他们为我国奥林匹克事业和湖北省的竞赛活动作出了富有成效的工作，这套丛书也是他们长期辅导学生经验的总结。每册均编有各层次的奥林匹克讲座和训练，内容翔实，是一套较好的奥林匹克教学辅导书，我们希望这套丛书能成为青少年学习的良师益友。

出版这样的丛书我们还是初步尝试，为了进一步充实完善，衷心希望广大读者提出建议和意见。

前　言

近几年来，我国选手在国际数学奥林匹克中成绩日益突出，今年又以“五金一银”的成绩雄居世界第一，这极大地鼓舞了全国广大中学师生。毫无疑问，数学竞赛活动将在我国更广大的范围内旷日持久地深入开展下去。

大多数准备参加数学竞赛的中学生主要是利用课余时间来进行数学竞赛方面的训练。实践证明，为了使数学竞赛训练富有成效，对于参加竞赛必须掌握的数学知识和方法要灵活处理。有些内容要在学习中学数学教材的基础上同步加深；有些内容则应适当超前学习；对那些中学数学以外的竞赛内容则必须恰当地补充。为了保证训练的系统性，避免盲目性和随意性，编写一套合适的训练教材是必不可少的。这些年来我们在数学竞赛培训工作中，对竞赛训练的形式和训练教材的实用性作了一些探索和试验，在此基础上编写了这套《高中数学竞赛基础教程》。

这套书共分三册。第一册基本与高一数学内容对应，另外增添了“计数”一章，目的是从计数角度介绍组合的一些基本知识和方法，以便在以后各章中渗透组合思想方法。第二册与高二数学内容相对应，既可与高二数学教学同步使用，也可在适当参考高二数学课本的基础上超前学习。第三册包括“初等数论”，“平面几何”，“几个典型问题”，“几个重要方法”四章，系统介绍了高中数学教材以外的竞赛内容和解答数学竞赛题的思想方法，读者可以根据自己的实际情况，在学习第一册、第二册的同时，穿插学习第三册内容。全书内容前呼后应，在

基本与高中数学教材内容同步的前提下加强了横向渗透，通过纵横联系的网络形成对高中数学竞赛内容和方法的较全面的覆盖。全书强调基础，着眼提高，力图具有较广的适用性和较强的针对性。

为了便于各地数学奥林匹克学校和数学培优班的教学，我们将全书各章都分成若干节，每一节就是一次讲座内容，每节材料略多于2小时讲授量，以便教师根据本校实际情况进行取舍。正如一位数学家所言，“学数学的最好办法是‘做数学’”。每节后我们都选编了相当数量的习题供学生练习。书中例、习题绝大多数选自国内外几十年来的优秀竞赛试题，这些题及书后解答闪耀着众多数学专家、教师和学生的智慧之光，是学习数学的极好素材。学生在理解每节内容的基础上再做后面的习题，可以获得参加各级数学竞赛所必需的数学知识、技能和方法，并使解题能力得到长足的发展。

自1978年恢复数学竞赛以来，经过数学界有识之士和广大中学数学教育工作者的努力，使得数学竞赛训练工作在各地都有了一定的基础，为早发现人才和推动数学教育作出了积极的贡献，并且赢得了各级党政部门和社会各界的支持。我们深信我国数学竞赛活动必将取得更加丰硕的成果。我们衷心希望广大有志青少年积极参加到数学竞赛活动中来，把握住机会，脱颖而出，饱饮人类智慧的甘露，在科学和创造的道路上健康成长，为中华崛起作出应有的贡献。

编者

1990年12月25日

目　录

第一章　函　　数

§1.1　集合

集合是一个重要的数学概念，十九世纪末，德国数学家康托（George Cantor，1845—1918）创立了关于集合的理论．集合理论的发展是很快的，至今，集合已不仅是数学最重要的基础之一，而且是一种广泛使用的科学语言和基本的观点、方法．

在数学竞赛中，集合问题常常是与函数问题和组合问题结合在一起的．在这一章里我们先介绍一些基本的集合问题和集合在函数中的应用，而把集合在组合方面的应用留在下一章．

1．元素与集合的关系

集合元素的确定性表明，对于一个具体的对象 a 和集合 A，存在且只存在下述二关系之一：

$$a \in A \quad 或 \quad a \overline{\in} A.$$

设 $A=\{x|x$ 具有性质 $P\}$，判断一个对象 a 是否为集合 A 的元素的方法就是检验 a 是否也具有性质 P.

例1　设集合 $M=(2,3)$，$x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$，判断 x 是否为集合 M 的元素．

解　$x=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{10}=\log_3 10.$

因　$2=\log_3 9<\log_3 10<\log_3 27<3$，

故　$x\in(2,3)$. 即 x 为 M 的元素.

例 2　设 $M=\{a|a=x^2-y^2,\ x,\ y\in Z\}$，求证：

（1）一切奇数属于 M；

（2）偶数 $4k-2$（$k\in Z$）不属于 M；

（3）属于 M 的两个整数，其积仍属于 M.

证明　（1）设 a 为任意的奇数，$a=2k-1$（$k\in Z$）.

因　$2k-1=k^2-(k-1)^2$，k，$k-1\in Z$，

故　$a\in M$.

由 a 的任意性知，一切奇数属于 M.

（2）假设 $4k-2\in M$，则存在 x，$y\in Z$ 使

$$4k-2=x^2-y^2,$$

即

$$(x+y)(x-y)=2(2k-1). \quad ①$$

①式说明 $x+y$ 和 $x-y$ 必有一个是偶数，另一个是奇数. 但是 $x+y$ 和 $x-y$ 具有相同的奇偶性，这是一对矛盾. 故①式不成立.

所以　$4k-2\overline{\in} M$.

（3）设 a，$b\in M$，则

$$a=x_1^2-y_1^2,\quad b=x_2^2-y_2^2\quad (x_1,x_2,y_1,y_2\in Z)$$

因

$$\begin{aligned}ab&=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)\\&=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2\end{aligned}$$

而　$x_1x_2-y_1y_2\in Z$，　$x_1y_2-x_2y_1\in Z$

所以　$ab\in M$.

2. 两个集合之间的关系

两个集合之间的关系比两个实数之间的关系复杂得多，我们关心的主要是“集合相等”、“子集”、“真子集”这几种

关系．判断这些关系的基本依据分别是“集合相等”、“子集”、“真子集”的定义．

例 3　判断下面命题是否正确：

设 A、B 是坐标平面上的两个点集，$C_r=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$．若对任何 $r\geqslant 0$ 都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$．

解　这个命题不正确．我们可以举出下面的反例．

取 $A=\{(x,y)\mid x\in R, y\in R\}$，

$B=\{(x,y)\mid x\in R, y\in R 且 x^2+y^2\neq 0\}$．

显然　$C_r\cup A=A$．

因　$(0,0)\in C_r$，故　$C_r\cup B=A$．

所以　$C_r\cup A=C_r\cup B$．

但由 $(0,0)\in A$，$(0,0)\overline{\in} B$．

则有　$A\nsubseteq B$．

例 4　设集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l$，其中 $m, n, l\in Z\}$，$N=\{u\mid u=20p+16q+12r$，其中 $p, q, r\in Z\}$．

求证：$M=N$．

证明　任取 $u\in M$，则存在 $m, n, l\in Z$ 使

$$\begin{aligned}u&=12m+8n+4l\\&=20n+16l+12(m-n-l),\end{aligned}$$

$\because$　$m-n-l\in Z$，$\therefore$　$u\in N$．

故　$M\subset N$．

又任取 $u\in N$，存在 $p, q, r\in Z$ 使

$$\begin{aligned}u&=20p+16q+12r\\&=12r+8(2q)+4(5p),\end{aligned}$$

而 $2q\in Z$，$5p\in Z$，则有 $u\in M$．

所以　$N\subset M$

所以　$M=N$．

例 5 S_1，S_2，S_3 为非空整数集合，对于 1、2、3 的任意一个排列 i，j，k，若 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$.

(1) 证明三个集合中至少有两个相等.

(2) 三个集合中是否可能有两个集无公共元素？

证明 (1) 若 $x\in S_i$，$y\in S_j$，则

$$y-x\in S_k,(y-x)-y=-x\in S_i.$$

所以每个集合中均有非负元素.

当三集合中的元素都为零时，命题显然成立.

否则设 S_1，S_2，S_3 中最小正元素为 a，不妨设 $a\in S_1$. 设 b 为 S_2，S_3 中最小的非负元素，不妨设 $b\in S_2$，则 $b-a\in S_3$.

若 $b>0$，则 $0\leqslant b-a<b$，与 b 的取法矛盾.

所以 $b=0$.

任取 $x\in S_1$，因 $0\in S_2$，故

$$x-0=x\in S_3.$$

所以 $S_1\subseteq S_3$.

同理 $S_3\subseteq S_1$.

所以 $S_1=S_3$.

(2) 可能. 例如 $S_1=S_3=$ {奇数}，$S_3=$ {偶数}，显然满足条件，但 S_1 和 S_2 与 S_3 都无公共元素.

3. 交集，并集和补集

中学教材介绍了两个集合的交集，并集和集合的补集三种集合运算. 交集、并集运算的交换律和结合律是显然的，利用文氏图，容易验证下面的结论.

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

摩尔根法则：$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

在这里我们将注意力放在集合的交、并、补的实际含义

上，而将集合之间的运算留在后面的练习之中.

例 6 设 A 和 B 是两个集合，又设集合 X 满足 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$，$A\cup B\cup X=A\cup B$，求集合 X.

解 由 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$ 知

$$X\supseteq A\cap B.$$

由 $A\cup B\cup X=A\cup B$ 知

$$X\subseteq A\cup B.$$

假设 $x\in X$ 但 $x\overline{\in} A\cap B$. 因 $X\subseteq A\cup B$，故 $x\in A$ 且 $x\overline{\in} B$，或 $x\in B$ 且 $x\overline{\in} A$. 这时总有 $A\cap X\neq B\cap X$. 这与题设矛盾.

所以 $x\in X$ 时，必有 $x\in A\cap B$.

从而 $X\subseteq A\cap B$.

所以 $X=A\cap B$.

例 7 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$，问

(1) 当 a 取何值时，$(A\cap B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2) 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有三个元素的集合？

解 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$. $A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (\text{I})$$

和

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (\text{II})$$

的解集. 解得（I）的解为 $(0,\ 1)$，$\left(\frac{2a}{1+a^2},\ \frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$；（II）的解为 $(1,\ 0)$，$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\ \frac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能：

① $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1,\end{cases}$ 解得 $a=0$；

② $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

故当 $a=0$ 或 1 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素.

(2) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素的情况是

$$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2},$$

解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，$(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素.

4. 有限集的元素的个数

对于一个用描述法给定的有限集，根据它的元素的属性判断其元素的个数常常是一件有趣的工作. 有限集 A 的元素的个数一般记作 $|A|$（或 $n(A)$）.

例 8 试指出集合 $A=\{$有一边长为 4，一内角为 50°的等腰三角形$\}$ 的元素个数.

解 根据下面的作图可知 $|A|=4$.

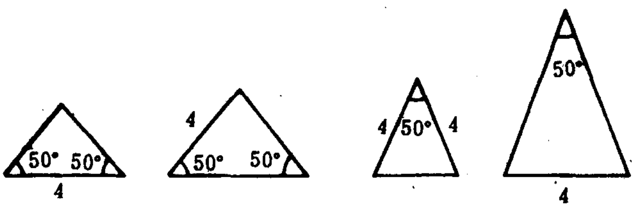

图 1-1

例 9 已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，对 $X\subseteq A$. 定

义 $S(X)$ 为 X 中所有元素之和．求全体 $S(X)$ 的总和 S.

解 将集合 A 看作全集.

因 $$X \cup \overline{X} = A, X \cap \overline{X} = \Phi,$$

所以 $S(X)+S(\overline{X})=S(A)=1+2+3+4+5+6=21$.

设 $Y \subseteq A$，且 $X \neq Y$．则显然有

$$\overline{X} \neq \overline{Y}.$$

作集合 $M=\{X \mid X \subseteq A\}$．显然 $f: X \to \overline{X}$ 为 M 到 M 上的一一映射.

所以 $S=\frac{1}{2}|M| \cdot S(A)=\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot |M|$.

现在来求 $|M|$．对于集合 A 的子集 X，A 的每一个元素只有属于或不属于 X 两种情况，由于集合 A 有 6 个元素，所以 A 的子集共有

$$|M| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64.$$

所以 $S=\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 21=672$.

关于若干个有限集的并集和交集的元素的个数．我们将在后面容斥原理的应用中讨论.

下面我们来讨论一个看似与集合无关的问题.

例 10 某地区网球俱乐部有 20 名成员，举行 14 场单打比赛，每人至少上场一次．求证，必有六场比赛，其 12 个参赛者各不相同.

证明 以无序对 (a_j, b_j) 表示参加第 j 场的比赛选手，并记

$$S = \{(a_j,b_j) \mid j = 1,2,\cdots,14\}.$$

设 M 为 S 的一个非空子集，且 M 中所含选手对中出现的所有选手互不相同．显然这样的子集存在有限多个．设这种子集中元素个数最多的一个为 M_0，$|M_0|=r$．显然，只须

证明 $r\geqslant 6$.

假设 $r\leqslant 5$. 由于 M_0 是 S 的选手互异的集合中元素最多的集合，故 M_0 中未出现过的 $20-2r$ 名选手之间互相没有比赛，否则与 M_0 的定义矛盾. 这意味着这 $20-2r$ 名选手所参加的比赛一定是同 M_0 中 $2r$ 名选手进行的. 由于已知每名选手至少参加一场比赛，故除了 M_0 中的 r 场比赛之外，至少还要进行 $20-2r$ 场比赛. 即总的比赛场数至少为

$$r+(20-2r)=20-r\geqslant 15.$$

这与比赛总场次为 14 矛盾. 这就证明了 $r\geqslant 6$.

例 10 的证明，用集合的语言和方法解决了一个似乎与集合不相干的问题. 这并不奇怪，在数学的各个领域尤其是组合数学中，我们将随时感觉到集合思想方法的神奇作用.

习题 1.1

1. 选择题

(1) 从 $A\cup B=A\cup C$ 能够推出（　　）.

(A) $B=C$　　(B) $A\cap B=A\cap C$

(C) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$　　(D) $\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$

(2) 已知 $x\in R$，使代数式 $x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ 的值为有理数的全体 x 的集合是（　　）.

(A) 整数集　　(B) 有理数集

(C) 实数集　　(D) 使 $\sqrt{x^2+1}$ 为有理数的集合

(E) 使 $x+\sqrt{x^2+1}$ 为有理数的集合

(3) 对集合 M、N，定义 $M-N=\{x|x\in M \text{ 且 } x\notin N\}$，则 $M-(M-N)$ 等于（　　）.

(A) $M\cup N$　　(B) $M\cap N$

(C) M　　(D) N

(4) 已知 $P=\{x|x=3k,\ k\in Z\}$，$Q=\{x|x=3k+1,\ k\in Z\}$，$S=\{x|x=3k-1,\ k\in Z\}$，若 $a\in P$，$b\in Q$，$c\in S$，则有（　　）.

(A) $a+b-c\in P$　　　(B) $a+b-c\in Q$

(C) $a+b-c\in S$　　　(D) $a+b-c\in P\cup Q$

(5) 已知 $S=\{(x,\ y)\ ||x-\lg y|=x+\lg y\}$，则 S 等于（　　）.

(A) $\{(x,\ y)\ |y=1$ 且 $x\geqslant 0\}$

(B) $\{(x,\ y)\ |x=0$ 且 $y\geqslant 1\}$

(C) $\{(x,\ y)\ |x\ (y-1)\ =0$ 且 $y>0\}$

(D) $\{(x,\ y)\ |y=1$ 且 $x\geqslant 0\}\cup\{(x,\ y)\ |x=0$ 且 $y>0\}$

2. 填空题

(1) 已知 A、B、M、N 为非空集，$A\cap B=\Phi$，$M=\{A$ 的真子集$\}$，$N=\{B$ 的真子集$\}$，那么 $M\cap N=$______.

(2) 已知 $M=\{x|x=a^2+1,\ a\in N\}$，$P=\{x|x=b^2-4b+5,\ b\in N\}$，则 M 与 N 的关系是______.

(3) 设 $M=\{(x,\ y)\ |1\leqslant x\leqslant 10,\ 1\leqslant y\leqslant 10,\ x\leqslant y,\ x,\ y\in Z\}$，则 $|M|=$______.

(4) 设 $A=\left\{x|5-x\geqslant\sqrt{2\ (x-1)}\right\}$，$B=\{x|x^2-ax<x-a\}$. 已知 $B\subseteq A$，则 a 的取值范围是______.

(5) 已知集合 $M=\{x,\ xy,\ \lg(xy)\}$ 及 $N=\{0,\ |x|,\ y\}$，并且 $M=N$. 那么，$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$ 的值等于______.

3. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b(a、b\in R)$，集合 $A=\{x|x=f(x),\ x\in R\}$，$B=\{x|x=f\ [f(x)],\ x\in R\}$.

(1) 证明：$A\subseteq B$；

(2) 当 $A=\{-1,\ 3\}$ 时，求 B.

4. 设集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$，$B=\{a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_5^2\}$，其中 $a_n\ (1\leqslant n\leqslant 5)$ 是正整数，且 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，并满足 $A\cap B=\{a_1,\ a_4\}$，$a_1+a_4=10$，又 $A\cup B$ 中所有元素的和为 224，求集合 A.

5. 已知集合 $A=\left\{(x,\ y)\ |\frac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，

$B=\{(x, y) \mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，

问当 a 取什么实数时，$A\cap B=\Phi$？

6. 设 $M=\{(x, y, z) \mid x^3+y^4=z^5, x, y, z\in N\}$，试问 M 是有限集还是无限集？

7. n 为正奇数，x_{jk} 为整数，$1\leqslant j\leqslant n$，$1\leqslant k\leqslant n$，满足

(1) $x_{jk}=x_{kj}$；

(2) 对任意的 j，$\{1, 2, \cdots, n\}\subseteq\{x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn}\}$.

求证：$\{1, 2, \cdots, n\}\subseteq\{x_{11}, x_{22}, x_{33}, \cdots, x_{nn}\}$.

8. 设 $n\in N$ 且 $n\geqslant 15$，A，B 都是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的真子集，$A\cap B=\Phi$，且 $\{1, 2, \cdots, n\}=A\cup B$.

证明：A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

9. 在某次竞选中各政党作出 n 种不同的诺言（$n>0$），有些政党可以作某些相同的诺言. 现知其中每两个政党都至少作了一个相同的诺言. 但没有两个政党的诺言完全相同. 求证：政党个数 $\leqslant 2^{n-1}$.

10. 设 S 是数集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 1989\}$ 的一个子集合，且 S 中任意两个数的差不等于 4 或 7. 问：S 最多可以包含多少个数？

§1.2 函数

十七世纪上半叶，人们在对运动问题的研究中萌发了关于函数概念的认识. 经过了大约 200 年的努力，德国数学家迪里赫勒（P. G. L. Dirichlet，1805—1859）给出了函数的现代定义（见中学数学课本）. 在数学的庞大的家族中，主要以函数为研究对象的数学分支有“微积分学”，“实变函数论”，“复变函数论”等；而函数思想方法作为一种基本的数学观念已渗透到数学、自然科学、经济科学和管理科学的各个领域.

尽管函数内容丰富多彩，但是作为出发点的基本初等函