吉林大学研究生立项教材

GUANGBODAOMOSHILILUN

光波导模式理论

马春生 刘式墉 著

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

光波导模式理论

责任编辑／唐万新
封面设计／孙　群

ISBN 7-5601-3409-2
9 787560 134093 >

ISBN 7-5601-3409-2
定价：[illegible].00 元

吉林大学研究生立项教材

光波导模式理论

马春生　刘式墉　著

吉林大学出版社

内 容 提 要

本书以射线光学和电磁理论为基础，系统地分析了导波光学与集成光学中的三层和多层平板波导（包括周期折射率波导和多量子阱波导）、介电常数连续变化的平面波导、矩形和脊形等条形波导、介质吸收型波导、金属包层型波导、高折射率衬底波导、耦合波导、折线波导、弯曲波导、周期性波纹波导、非线性波导等各类光波导的模式特性。详细地阐述了金属包层型单模偏振器和滤波器、布拉格反射滤波器、分布反馈激光器、方向耦合器、微环谐振滤波器和波分复用器、阵列波导光栅波分复用器、相位调制器、纵向振幅调制器、横向振幅调制器、薄膜调制器、方向耦合调制器、功率开关等光电子器件的基本原理。

本书可作为导波光学、集成光学、光电子学与光电子技术、光子学与光子技术、光信息科学与技术、物理电子学等专业的理工科高等院校研究生的教学用书，同时又可作为相关专业科研工作者和工程技术人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

光波导模式理论 / 马春生，刘式墉著. —长春：吉林大学出版社，2006. 5

ISBN 7－5601－3409－2

Ⅰ. 光… Ⅱ. ①马… ②刘… Ⅲ. 光波导

Ⅳ. TN252

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 036830 号

光波导模式理论

马春生　刘式墉　著

责任编辑、责任校对：唐万新	封面设计：孙　群
吉林大学出版社出版	吉林大学出版社发行
（长春市明德路 421 号）	吉林农业大学印刷厂印刷
开本：787×1092 毫米　1/16	2006 年 4 月第 1 版
印张：32.25	2006 年 4 月第 1 次印刷
字数：689 千字	印数：1－1000 册
ISBN 7－5601－3409－2	定价：46.00 元

前　　言

随着信息科技领域日新月异的进步，以光波导模式为基础理论的导波光学、集成光学、光电子学等学科有了更深入更广泛的发展，同时从事这方面研究的科技工作者和研究生也日益增多。因此本书的编写意图有两个，一是力求能够详细地阐述有关光波导模式的基本概念、基本原理、基本理论和基本物理现象，能够为初学者特别是相关专业的研究生提供一本合适的教材，二是为了力求能够反映出近年来国内外关于光波导模式理论的某些重要研究成果和最新进展，能够为相关专业的科技工作者提供一本合适的参考用书。

在本书的编写过程中，主要参考了国内外著名的有关光波导理论、集成光学和光电子学方面的学术专著及大量的国内外核心刊物所发表的相关的学术论文，其中也包含了本书作者所公开发表的某些论文。这些论文大部分是 SCI 检索的论文，具有很高的学术水平。

本书共有以下 13 章主要内容：

第一章阐述了波导的射线理论和电磁理论基础，目的是对波导的导波原理和与之相关的某些物理概念，为读者给出直观的物理意义和清晰的理解，并给出经常应用的方程和公式，为以后运用波动光学理论分析各种结构光波导的模式特性打好基础。

第二章分别对三层平板波导导模和辐射模的模式特性进行了详细的分析。

第三章是在三层波导的基础上，对多层平板波导导模的模式特性进行了分析。在对周期折射率波导和多量子阱波导导模的模式特性的分析中，重点讨论了由阱间耦合作用引起的模式劈裂现象、等振幅基模、由量子阱效应引起的模式饱和现象以及模式双折射现象。

第四章首先对抛物型、双曲型、指数型分布等几种介电常数连续变化的平面波导的模式特性给出了精确的分析结果，然后介绍了处理介电常数连续变化的平面波导的几种重要的近似方法，即 WKB 法、微扰法、变分法和多层分割法，并给出一些具体的应用实例。

第五章分析了矩形波导的模式特性，然后以矩形波导、脊形波导和加载条形波导为例，介绍了两种处理某些结构更加复杂的条形波导的近似方法，即有效折射率法和微扰法。

第六章考虑了介质的吸收作用，运用微扰法和微分法给出了三层平板波导、矩形波导、脊形波导、周期折射率波导、多量子阱波导等介质吸收型波导模的吸收损耗系数的计算公式。

第七章首先对金属的光频特性和等离子体表面模的形成条件进行了分析，然后应用

微分法给出了金属包层型三层、四层和五层波导导模的吸收损耗系数的计算公式。模式特性分析的重点放在金属包层型波导中 TE0 基模的单模偏振和传输、金属包层的有限厚度对模式特性的影响、形成 TM 模共振吸收时金属包层的厚度和氧化物缓冲层的厚度的选择上。

第八章主要是对高折射率衬底引起的平板波导模式的泄漏损耗、平板波导端面耦合、矩形波导偏折时引起的模式的耦合效率和辐射损耗，以及波导弯曲时所引起的弯曲损耗进行了分析。

第九章首先导出了一般形式的耦合模方程，然后用它去处理无源和有源周期性波纹波导中的耦合现象，并阐述了布拉格反射滤波器、分布反馈（DFB）激光器、双波导方向耦合器等重要的光电子器件的工作原理。

第十章详细地阐述了多种结构的微环谐振（MRR）滤波器和单环、三环波分复用器的工作原理，给出了相关的参数优化和结构设计的方法，并对其传输光谱、插入损耗、信道间的串扰等特性进行了分析和讨论。

第十一章详细地阐述了阵列波导光栅（AWG）波分复用器的工作原理，给出了相关的参数优化和结构设计的方法，并对其传输光谱、插入损耗、信道间的串扰等特性进行了分析和讨论。

第十二章重点讨论了电光调制，给出了外加电场下晶体折射率主轴的变换方法，并对相位调制器、纵向振幅调制器、横向振幅调制器、薄膜调制器、双波导方向耦合调制器和光开关等电光调制器件的工作原理进行了分析。

第十三章是对三层和多层非线性光波导结构中的非线性模式特性进行了分析，给出了相应的 TE 导模和表面模的场分布函数、特征方程和传输功率的表达式，并进行了实例计算和讨论。

本书具有下述特点：

1. 本着适于研究生学习的特点，本书的内容按着由浅入深、由简单到复杂的过程进行编写，是一本适用于初学者特别是研究生学习用的教材。

2. 本书把当前国内外他人和本人的某些重要研究成果编写进去，又是一本内容丰富、充分反应当前在光波导模式理论研究方面最新成果和水平的学术专著。

3. 本书对光波导模式理论的基本概念、基本原理、基本理论和基本物理现象作了深入系统的论述，物理概念清楚、系统性强、涉及面广、前沿性突出、文献详实。

4. 在本书中，除了某些原始性公式外，作者对所有公式都进行了详细的推导，除了某些结构图和示意图外，作者对每一条曲线都进行了计算机编程计算和绘制，可以说本书给出的计算公式、计算数据和相关曲线是准确和可靠的。

本书的部分内容，如周期折射率波导、多量子阱波导、金属包层型波导、阵列波导光栅（AWG）波分复用器、微环谐振滤波器和波分复用器等研究工作曾得到国家 973、863、国家自然科学基金、中国科学院百人计划等项目的资助，其中关于周期折射率波导、多量子阱波导、金属包层型波导等研究成果曾获 1998 年国家教育部科技进步二等奖。

本书为吉林大学“十五”规划教材。本书在立项过程中，得到了吉林大学教务处和

吉林大学研究生院的大力支持，并受到了吉林大学出版基金的资助。本书在编辑和出版过程中，得到了吉林大学出版社的热情协助。研究生王现银、阎欣、徐元哲、张海明、孙东明、王国东、李德禄博士和陈宏起、李晗、汪玉海、刘越硕士对书稿进行了耐心细致的校对。在此作者对他们表示衷心的感谢。

书中难免存在一些差错和不当之处，敬请广大读者批评指正，并提出宝贵意见。

作　者

2005 年 5 月于吉林大学

目　　录

第 1 章　波导的电磁和射线理论基础 ……（1）
1.1　麦克斯韦方程组 ……（2）
1.2　波动方程 ……（3）
1.3　亥姆霍兹方程 ……（4）
1.4　横向亥姆霍兹方程 ……（4）
1.5　电磁场的边界条件 ……（6）
1.6　TE 模电磁场分量及其边界条件 ……（7）
1.7　TM 模电磁场分量及其边界条件 ……（9）
1.8　平均能流密度和传输功率 ……（11）
1.9　模式类型 ……（13）
1.10　全反射相移 ……（16）
1.11　穿透深度和有效波导芯厚度 ……（18）
1.12　特征方程 ……（21）
1.13　导模的传输与截止 ……（23）
1.14　远截止近似法 ……（25）
1.15　近截止近似法 ……（28）
1.16　模式的正交性和归一化 ……（29）
参考文献 ……（35）

第 2 章　三层平板波导 ……（36）
2.1　对称三层平板波导的 TE 导模 ……（36）
2.2　对称三层平板波导的 TM 导模 ……（41）
2.3　对称三层平板波导导模的总结及讨论 ……（43）
2.4　非对称三层平板波导的 TE 导模 ……（47）
2.5　非对称三层平板波导的 TM 导模 ……（50）
2.6　非对称三层平板波导导模的总结与讨论 ……（53）
2.7　辐射模互功率的一般公式 ……（57）
2.8　对称三层平板波导的 TE 空间辐射模 ……（60）
2.9　对称三层平板波导的 TM 空间辐射模 ……（64）
2.10　对称三层平板波导空间辐射模的总结与讨论 ……（66）

2.11 非对称三层平板波导的 TE 衬底辐射模 …… (68)
2.12 非对称三层平板波导的 TM 衬底辐射模 …… (71)
2.13 非对称三层平板波导衬底辐射模的总结与讨论 …… (74)
2.14 非对称三层平板波导的 TE 空间辐射模 …… (76)
2.15 非对称三层平板波导的 TM 空间辐射模 …… (79)
2.16 非对称三层平板波导空间辐射模的总结与讨论 …… (81)
参考文献 …… (84)

第 3 章 多层平板波导 …… (86)
3.1 非对称四层平板波导 …… (86)
3.2 非对称五层平板波导 …… (91)
3.3 对称五层平板波导 …… (94)
3.4 对称五层 W 型波导 …… (103)
3.5 多层平板波导 …… (105)
3.6 周期折射率波导和多量子阱波导的递推法 …… (108)
3.7 周期折射率波导和多量子阱波导的传输矩阵法 …… (113)
3.8 周期折射率波导和多量子阱波导的平均折射率法 …… (115)
3.9 周期折射率波导中的模式劈裂现象 …… (117)
3.10 周期折射率波导中的等振幅基模 …… (118)
3.11 多量子阱波导中的模式饱和现象 …… (120)
3.12 多量子阱波导中的模式双折射 …… (121)
参考文献 …… (123)

第 4 章 介电常数连续变化的平面波导 …… (124)
4.1 TE 和 TM 模的波动方程 …… (124)
4.2 对称抛物型分布 …… (126)
4.3 对称双曲型分布 …… (130)
4.4 对称指数型分布 …… (134)
4.5 非对称指数型分布 …… (139)
4.6 WKB 法 …… (141)
4.7 对称抛物型分布的 WKB 分析 …… (144)
4.8 对称双曲型分布的 WKB 分析 …… (145)
4.9 对称指数型分布的 WKB 分析 …… (147)
4.10 非对称指数型分布的 WKB 分析 …… (149)
4.11 费米型分布的 WKB 分析 …… (150)
4.12 微扰法 …… (153)
4.13 有包层的抛物型分布的微扰分析 …… (156)
4.14 对称四次多项式型分布的微扰分析 …… (159)

4.15 变分法 …………………………………………………… (163)
4.16 对称四次多项式型分布的变分分析 ………………………… (165)
4.17 多层波导分割法 ………………………………………… (167)
参考文献 …………………………………………………… (170)

第5章 条形波导 ………………………………………… (172)
5.1 条形波导和矩形波导 …………………………………… (172)
5.2 横向亥姆霍兹方程 ……………………………………… (174)
5.3 E^y_{mn}模电磁场分量及其边界条件 ……………………… (175)
5.4 E^x_{mn}模电磁场分量及其边界条件 ……………………… (178)
5.5 矩形波导的 E^y_{mn} 导模 ………………………………… (181)
5.6 矩形波导的 E^x_{mn} 导模 ………………………………… (185)
5.7 矩形波导导模的总结及讨论 …………………………… (188)
5.8 远截止近似法 …………………………………………… (192)
5.9 矩形波导的有效折射率法 ……………………………… (194)
5.10 脊形波导的有效折射率法 ……………………………… (196)
5.11 加载条形波导的有效折射率法 ………………………… (198)
5.12 梯形波导的微扰法 ……………………………………… (200)
参考文献 …………………………………………………… (203)

第6章 介质吸收型波导 …………………………………… (204)
6.1 波导的损耗 ……………………………………………… (204)
6.2 介质吸收型三层平板波导 ……………………………… (206)
6.3 介质吸收型矩形波导 …………………………………… (214)
6.4 介质吸收型脊形波导 …………………………………… (219)
6.5 介质吸收型周期折射率波导 …………………………… (223)
6.6 介质吸收型多量子阱波导 ……………………………… (229)
参考文献 …………………………………………………… (233)

第7章 金属包层型波导 …………………………………… (234)
7.1 金属的复介电常数 ……………………………………… (234)
7.2 金属的光频特性 ………………………………………… (236)
7.3 等离子体表面波 ………………………………………… (239)
7.4 金属芯型对称三层平板波导 …………………………… (241)
7.5 金属包层型对称三层平板波导 ………………………… (246)
7.6 金属包层型非对称三层平板波导 ……………………… (252)
7.7 金属包层型非对称四层平板波导 ……………………… (259)
7.8 MOS 型五层平板波导 …………………………………… (266)

参考文献……(272)

第8章 波导的辐射损耗……(274)
8.1 高折射率衬底上的平板波导……(274)
8.2 平板波导的端面耦合……(285)
8.3 矩形波导的偏折……(292)
8.4 波导的弯曲损耗……(298)
参考文献……(304)

第9章 耦合模理论及应用……(305)
9.1 耦合模方程……(305)
9.2 周期性波纹波导……(308)
9.3 布拉格反射滤波器……(314)
9.4 周期性波纹增益波导……(317)
9.5 分布反馈激光器……(320)
9.6 双波导定向耦合器……(322)
9.7 双平板波导定向耦合器的耦合系数……(329)
9.8 双矩形波导定向耦合器的耦合系数……(332)
参考文献……(334)

第10章 微环谐振器……(335)
10.1 基本原理和基本功能……(335)
10.2 波导间的弯曲耦合……(339)
10.3 平行信道单环谐振滤波器……(347)
10.4 平行信道并联双环谐振滤波器……(352)
10.5 平行信道并联多环谐振滤波器……(355)
10.6 平行信道串联双环谐振滤波器……(361)
10.7 平行信道串联多环谐振滤波器……(365)
10.8 竖直信道单环谐振波分复用器……(369)
10.9 竖直信道串联三环谐振波分复用器……(375)
参考文献……(382)

第11章 阵列波导光栅波分复用器……(384)
11.1 基本原理和基本功能……(384)
11.2 参数优化……(392)
11.3 结构设计……(395)
11.4 传输特性……(399)
11.5 损耗特性……(409)

参考文献 …… (416)

第 12 章 电光调制 …… (417)
12.1 介电常数张量和折射率椭球 …… (417)
12.2 电光效应和电光张量 …… (422)
12.3 外加电场引起的折射率椭球的变化 …… (425)
12.4 电场作用下晶体主轴坐标变换（一） …… (427)
12.5 相位调制器 …… (434)
12.6 纵向振幅调制器 …… (435)
12.7 电场作用下晶体主轴坐标变换（二） …… (437)
12.8 横向振幅调制器 …… (444)
12.9 薄膜调制器 …… (446)
12.10 双波导定向耦合调制器和光开关 …… (448)
参考文献 …… (456)

第 13 章 非线性光波导 …… (457)
13.1 介质的光学非线性 …… (457)
13.2 NNN 型三层非线性光波导 …… (458)
13.3 LNL 型三层非线性光波导 …… (468)
13.4 NLL 和 NLN 型三层非线性光波导 …… (470)
13.5 NLL 和 NLN 型三层非线性光波导的计算实例 …… (476)
13.6 NLL 型双芯非线性光波导 …… (481)
13.7 NLN 型非线性周期折射率光波导 …… (485)
参考文献 …… (491)

附录 专业术语索引 …… (493)

第 1 章 波导的电磁和射线理论基础

光束在介质中传输时,由于介质的吸收和散射而引起损耗,由于绕射(衍射)而引起发散,这些情况都会导致光束中心部分的强度不断地衰减.因此,有必要设计制作某种器件,它能够引导光束的传播,从而使光束的能量在横的方向上受到限制,并使损耗和噪声降到最小,这种器件通常称为光波导,简称波导.结构最简单的波导是由三层均匀介质组成的,中间的介质层称为波导层或芯层,芯两侧的介质层称为包层.芯层的介电常数要比两侧包层的介电常数大,使得光束能够集中在芯层中传输,从而起到导波的作用.这种波导的介电常数分布是陡变的,也称为阶梯式变化,常称这种波导为平板波导.对波导模式特性的分析,应用两种理论,即波动光学理论和射线光学理论.

光在本质上是一种电磁波.讨论光在波导中传播的最基本的方法是电磁理论方法,亦即波动光学方法.这种方法是从麦克斯韦方程组出发导出波动方程和亥姆霍兹方程,在一定的边界条件下求其解.一般而言,若想全面、正确地分析各种结构波导的模式特性,必须采用波动理论,才能够给出波导模式全面、正确的解析结果或数值结果.

对光波导模式特性的分析,还可以采用射线光学理论.光射线,简称射线或光线,可以这样理解:一条很细很细的光束,它的轴线就是光射线.它的方向沿着光能流的方向.光线与光束是不同的,光线是无限细的、光束则有一定的尺寸.光线在均匀介质中的传输轨迹是一条直线,在非均匀介质中的传输轨迹是一条曲线.用射线去代表光能量传输路线的方法称为射线光学.射线光学是忽略光波长的光学,亦即射线理论是光波长趋于零的波动理论.射线光学理论的优点是对平板波导的分析过程简单直观,对某些物理概念能给出直观的物理意义,容易理解.缺点是对于其他结构更为复杂的波导射线光学理论不便于应用,或只能得出粗糙的结果.早期以光波导为题材的专著有两本,一本是 Kapany 和 Burke 的著作[1],另一本是 Marcuse 的著作[2].之后随着导波光学和集成光学的发展,又陆续出版了一些相关的具有较高学术水平的专著[3~6].在这些著作中,对光波导模式的分析以 Marcuse[2]和 Adams[4]的著作最具代表性.

本章的目的是对后续的章节提供波导的电磁理论基础,并给出经常应用的方程和公式.然后应用射线光学的基本理论对三层平板波导加以分析,目的是对波导的导波原理和与之相关的某些物理概念,为读者给出直观的物理意义和清晰的理解,并为以后运用波动光学理论分析各种结构光波导的模式特性打好基础.有关波导的电磁理论基础和应用射线理论对波导模式的分析可参见文献[1~17]及所引的相关文献,其中 Maurer 和 Felsen[9]、Lotsch[10]和 Tien[11]等人曾较早地应用射线理论对平板波导的模式进行过分析和讨论.

1.1　麦克斯韦方程组

电磁运动的基本规律由麦克斯韦方程组来描述,它是电磁理论的基础,其表达式为:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1-2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.1-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1-4}$$

式中,$\boldsymbol{E}$ 为电场强度,$\boldsymbol{D}$ 为电位移,$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度,$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度,$\boldsymbol{J}$ 为电流密度,ρ 为电荷密度,t 为时间,∇ 为微分算符,在直角坐标系 $o\text{-}xyz$ 中,$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为 x、y、z 方向的单位矢量.

解决实际问题时,除了上述基本方程外,还必须引入下述关于介质电磁性质的实验关系,称为介质方程,它们反映了介质的宏观电磁性质.对于各向同性和线性介质,这些关系为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1.1-5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H} \tag{1.1-6}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.1-7}$$

式中,ε_0 为真空电容率,ε 为介质的相对介电常数,μ_0 为真空磁导率,μ 为介质的相对磁导率,σ 为电导率.对于各向同性、线性、非导电(电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和电荷密度 ρ 皆为零)和非磁性(相对磁导率 μ 近似等于 1)介质,进一步有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1.1-8}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{1.1-9}$$

$$\boldsymbol{J} = 0 \tag{1.1-10}$$

$$\rho = 0 \tag{1.1-11}$$

此时麦克斯韦方程组(1.1-1)~(1.1-4)变为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1.1-12}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.1-13}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0 \tag{1.1-14}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{1.1-15}$$

注意,一般情况下相对介电常数 ε 是坐标的函数,$\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r})$,因此在式(1.1-14)中 ε 要放在括号里面,受微分算符的作用.

1.2 波动方程

式(1.1-12)两端取旋度,并利用式(1.1-13),可得到

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})=-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\tag{1.2-1}$$

式中 $c=\dfrac{1}{(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}}$为真空中光速.利用恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\tag{1.2-2}$$

式(1.2-1)变为

$$-\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})=-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\tag{1.2-3}$$

由式(1.1-14)得到

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=(\nabla\varepsilon)\cdot\boldsymbol{E}+\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\tag{1.2-4}$$

即有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\tag{1.2-5}$$

上式代入式(1.2-3)得到电场 $\boldsymbol{E}$ 满足的矢量波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\right)=\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\tag{1.2-6}$$

类似地,式(1.1-13)两端取旋度可得到

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})&=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times(\varepsilon\boldsymbol{E})]=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}[(\nabla\varepsilon)\times\boldsymbol{E}+\varepsilon\nabla\times\boldsymbol{E}]\\&=\varepsilon_0(\nabla\varepsilon)\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E})\end{aligned}\tag{1.2-7}$$

利用式(1.1-12)、(1.1-13)得到

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})&=\varepsilon_0(\nabla\varepsilon)\times\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}(\nabla\times\boldsymbol{H})-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}\\&=\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon)\times(\nabla\times\boldsymbol{H})-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{1.2-8}$$

利用(1.1-15)有

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=-\nabla^2\boldsymbol{H}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H})=-\nabla^2\boldsymbol{H}\tag{1.2-9}$$

代入式(1.2-8)得到

$$-\nabla^2\boldsymbol{H}=\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon)\times(\nabla\times\boldsymbol{H})-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}\tag{1.2-10}$$

由此得到磁场 $\boldsymbol{H}$ 满足的矢量波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon)\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}\tag{1.2-11}$$

式(1.2-6)和式(1.2-11)即为矢量波动方程,重写如下:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \nabla\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.2-12}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon)\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{1.2-13}$$

在介电常数 ε 陡变或缓变的情况下，即 $\nabla\varepsilon = 0$ 或 $\nabla\varepsilon \approx 0$，矢量波动方程(1.2-12)、(1.2-13)简化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.2-14}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{1.2-15}$$

1.3　亥姆霍兹方程

设电磁场 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 为时谐函数，对时间的依赖为 $\exp(\mathrm{j}\omega t)$，式中 ω 为光波的角频率，此时 $\frac{\partial}{\partial t} = \mathrm{j}\omega$，$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$，则式(1.2-12)、(1.2-13)变为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \nabla\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\right) = -\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} \tag{1.3-1}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon)\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) = -\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\boldsymbol{H} \tag{1.3-2}$$

令 $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$，式中 k_0 称为真空中波数，λ_0 为真空中光波长，代入式(1.3-1)、(1.3-2)，则矢量波动方程可表示为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \nabla\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\right) + k_0^2\varepsilon\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.3-3}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon)\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) + k_0^2\varepsilon\boldsymbol{H} = 0 \tag{1.3-4}$$

在介电常数 ε 陡变或缓变的情况下，即 $\nabla\varepsilon = 0$ 或 $\nabla\varepsilon \approx 0$，矢量波动方程(1.3-3)、(1.3-4)简化为下述的矢量亥姆霍兹方程，

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k_0^2\varepsilon\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.3-5}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k_0^2\varepsilon\boldsymbol{H} = 0 \tag{1.3-6}$$

矢量亥姆霍兹方程(1.3-5)、(1.3-6)含有 6 个分量方程，可统一地用下述的标量亥姆霍兹方程来表示，

$$\nabla^2 \phi(x,y,z) + k_0^2\varepsilon(x,y,z)\phi(x,y,z) = 0 \tag{1.3-7}$$

式中 ϕ 代表电磁场 6 个分量 E_x、E_y、E_z、H_x、H_y、H_z 中的任何一个分量.

1.4　横向亥姆霍兹方程

对于平板波导，其相对介电常数 ε 只是坐标 x 的函数，$\varepsilon = \varepsilon(x)$，此时电磁场某一横

向分量 $\phi=\phi(x,y,z)$满足的标量亥姆霍兹方程(1.3-7)取下述形式

$$\nabla^2\phi(x,y,z)+k_0^2\varepsilon(x)\phi(x,y,z)=0 \tag{1.4-1}$$

应用分离变量法求解上方程,可令

$$\phi(x,y,z)=\psi(x)\eta(y)\zeta(z) \tag{1.4-2}$$

上式代入式(1.4-1)得到

$$\frac{1}{\psi(x)}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+k_0^2\varepsilon(x)+\frac{1}{\eta(y)}\frac{\mathrm{d}^2\eta(y)}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{\zeta(z)}\frac{\mathrm{d}^2\zeta(z)}{\mathrm{d}z^2}=0 \tag{1.4-3}$$

上式中的第一、二项只是 x 的函数,第三项只是 y 的函数,第四项只是 z 的函数,三者之和为零,因此应各自等于某一常数,于是可令

$$\frac{1}{\eta(y)}\frac{\mathrm{d}^2\eta(y)}{\mathrm{d}y^2}=-\gamma^2 \tag{1.4-4}$$

$$\frac{1}{\zeta(z)}\frac{\mathrm{d}^2\zeta(z)}{\mathrm{d}z^2}=-\beta^2 \tag{1.4-5}$$

式中,γ 为波矢 $\boldsymbol{k}$ 沿 y 方向的分量,称为 y 方向传播常数,β 为波矢 $\boldsymbol{k}$ 沿 z 方向的分量,称为 z 方向传播常数.注意,方程(1.4-4)、(1.4-5)的右端不能出现正号的情况,因为出现正号时,其一组特解为 $\eta(y)\propto\exp(\gamma y)$、$\zeta(z)\propto\exp(\beta z)$,则当 y 或 z 趋于正无限大时,$\eta(y)$、$\zeta(z)$变为无限大,这是场的有限性所不能允许的;与此相类似,其另一组特解为 $\eta(y)\propto\exp(-\gamma y)$、$\zeta(z)\propto\exp(-\beta z)$,则当 y 或 z 趋于负无限大时,$\eta(y)$、$\zeta(z)$亦变为无限大,这也是场的有限性所不能允许的.方程(1.4-4)、(1.4-5)的解取为

$$\eta(y)\propto\exp(-\mathrm{j}\gamma y) \tag{1.4-6}$$

$$\zeta(z)\propto\exp(-\mathrm{j}\beta z) \tag{1.4-7}$$

式(1.4-6)、(1.4-7)代入式(1.4-2),并考虑到电磁场对时间 t 的依赖,$\phi(x,y,z,t)$可表示为

$$\phi(x,y,z,t)=\psi(x)\exp[\mathrm{j}(\omega t-\gamma y-\beta z)] \tag{1.4-8}$$

式中,$\psi(x)$为振幅,是坐标 x 的函数,称为沿 x 方向的横向场分布函数.式(1.4-4)、(1.4-5)代入式(1.4-3)则可得到横向场分布函数 $\psi(x)$满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+[k_0^2\varepsilon(x)-\gamma^2-\beta^2]\psi(x)=0 \tag{1.4-9}$$

对于 $\varepsilon=\varepsilon(x)$的情况,常选 z 轴为光的传播方向,则 y 方向传播常数 $\gamma=0$,则式(1.4-8)简化为

$$\phi(x,z,t)=\psi(x)\exp[\mathrm{j}(\omega t-\beta z)] \tag{1.4-10}$$

而式(1.4-9)简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+[k_0^2\varepsilon(x)-\beta^2]\psi(x)=0 \tag{1.4-11}$$

上式即为平板波导的横向亥姆霍兹方程,此时 z 方向传播常数 β 简称为传播常数.在一定的电磁场边界条件下可求出其一系列特解 $\psi_m(x)$和 β_m,这些特解称为本征模.