王后雄高效学习法
让你会学 会用 考好

高效学案

配合普通高中课程标准实验教科书

（人教版·A）

高中数学

必修1

模块 高效学案
mokuai GAOXIAOXUEAN

木乔图书
全国知名学校
高考前沿名师
联手打造

北京木乔教育科技中心/策划
延边人民出版社

木秀图书
全国知名学校
高考前沿名师
联手打造

高效学案

配合普通高中课程标准实验教科书

(人教版)

高中数学 A

(必修 1)

高效学案
GAOXIAO

延边人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

新课标·高效学案．高中数学/李木乔主编．—延吉：延边人民出版社，2005.8

ISBN 7—80698—441—0

Ⅰ．新… Ⅱ．李… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 088453 号

责任编辑：金河范　木　其

责任校对：吴　波

《新课标 高效学案》编委会

总 顾 问：王后雄

总 主 编：李木乔

执行主编：彭玉国

编　　委：李木乔　何长林　彭玉国　刘继家　孙景淮　周开正　朱　红　苗　楠　何　山　付广娟　张新光　张丽佩　程宝丽　吴　巍　苏　雨　谭井新　张慧敏　杨　君　綦偶奇　吴普林　马志刚　孙中昌　李艳芳　訾　福　刘来泉　赵蔚新　孙　力　李永华　宋大千　邵莉莉　王殿臣　申　鹏　王　丹　陆　军　喻春杰　纪少坤　杨志刚　高子惠　宋忠起　曲　梅　卢静波　阴晓梅　初海丰　朱建坤　刘　梅　赵丽娜　王　乐　魏　威

编　　者：谭井新　张慧敏　赵丽娜　王　乐　李金龙

版权所有　翻印必究

举报电话：（0431）8173028

订购电话：（0431）8191220　8807308　8807178

网址：http：//www. mqbook. com

新课标 高效学案

数学 A　必修 1（人教版）

延边人民出版社出版发行　　广州华南印刷厂印刷

880×1230 毫米　16 开本　　5.5 印张　121 千字

2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷

ISBN7－80698－441－0/G·337　　本册定价：7.60 元

致中学生朋友们

亲爱的中学生朋友：

欢迎你们翻开《模块高效学案》。为了编好这套书，我们策编人员专程赶往华中师范大学考试科学研究中心，向王后雄老师请教，在王老师的精心指导下，我们聘请了一批具有多年教学经验的一线大朋友，为你们潜心编写。我们这样做的目的，是想为你们在课堂上学好实验教材能有一个最得力的学习“帮手”。

为尊重你们的首创精神和主体地位，我们提出了“学案”式辅导方略。“学案”即以你们“学”为主的学习辅导方案，所以它体现了你们学习过程中的几个重要环节：课前预习环节、课堂学习环节和课后巩固环节，在这几个环节中为你们梳理学习思路，点拨学习方法，总结学习规律，设计应用习题。目的是发挥你们的主动性和积极性，挖掘你们的学习潜能。

“高效”说明学习是有规律可循的。有人说：“我们教育学生就像猎人学打猎一样，要教会他们如何使用猎枪，而不是光让他们带‘干粮’。”说的是教会学生学习的方法比单纯传授知识更重要，即“授人以鱼不如授人以‘渔’”。因此，在编写这套书时，我们侧重了学习方法的点拨和学习规律的总结，目的是让你们找到“钥匙”，投入较少的精力，获得丰厚的回报。

在你们正式阅读本书之前，请先浏览一下导读地图！

课节内容结构
- 教材预知信息 → 以填空、图表、问答等多种方式帮助你预习教材，整体感知学习内容，做到心中有数。
- 重点难点解疑 → 全面细致地解读教材，梳理知识，点拨方法，总结学习规律，警示学习盲点等，并辅以相应的例题将其落到实处。做到突出重点，突破难点，解决疑点，点击考点。
- 综合应用举例 → 综合、迁移、运用教材所学的知识，并辅以名题、新题、活题，点拨解题思路，总结应用规律，最终形成灵活运用所学知识的能力。
- 同步分层训练 → A级　基础知识强化训练，高考重视基础。B级　综合应用创新训练，高考考查能力。
- 趣味相关阅读 → 选取与本课内容相关的阅读材料，开阔视野，丰富积累。趣味性、知识性、科学性融为一体。

单元内容结构
- 课本习题解答 → 或详解或提示
- 高考链接扫描 → 近五年高考试题解析，明确考试方向，提高应考能力。
- 能力综合测试 → 同步综合检测，及时反馈，优化学习过程。

因学科特点不同，有的学科栏目略有不同。

同学们，王后雄高效学习法，让你会学、会用、考好！

你们的编辑大朋友

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 集合与函数概念

§1.1 集 合

§1.1.1 集合的含义和表示

教材预知信息（抓关键，提纲挈领）

◇**情境切入**

学校举行一场球类比赛，某班有5名同学参加篮球比赛，有11名同学参加足球比赛，问：这两次球类比赛本班共有多少人参加？

如果回答16人参赛，对不对？

不一定对.因为可能有的同学既参加了篮球比赛又参加了足球比赛.

运用本章我们将要学习的集合与简易逻辑的知识，就可以描述和解决上述问题.集合与简易逻辑的初步知识是高中数学学习的重要基础.

◇**问题感知**

1.①“所有三角形组成的集合”能不能表示成{所有三角形组成的集合}；

②实数集$\mathbf{R}$能不能表示成{$\mathbf{R}$}或{实数集}；

③实集$\varnothing$能不能表示为{$\varnothing$}或{空集}.

2.集合$\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$与$\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$的区别.

信息提炼

1.①不能 ②不能 ③不能

2.$\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$表示所有大于等于1的数的集合，而$\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$表示曲线$y=x^2+1$上点的集合.

重点难点解疑（学要点，以点带面）

◇**要点梳理** & ◇**对应例题及学法点拨**

在高中数学中，集合的初步知识与简易逻辑知识，与其他内容有着密切联系.它们是学习掌握和使用数学语言的基础，是高中数学学习的起点.下面我们了解一下集合.

1.集合的概念

一般地，把一些能够确定的不同的对象看作一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合（或集），它是数学中不加定义的基本概念.

2.集合的分类

按集合中元素的个数来分，可分为有限集、无限集和空集.空集是集合中的一个特定的概念，在集合关系的研究中起到不可替代的作用.

3.集合中元素的特征

（1）确定性：设A是一个给定的集合，x是某一具体对象，则x或者是A的元素，或者不是A的元素，二者中必居其一.

（2）互异性：对于一个给定的集

【例1】考查下列每组对象能否构成一个集合.

（1）著名的数学家；

（2）某校2005年在校的所有高个同学；

（3）不超过20的非负数；

（4）方程$x^2-16=0$在实数内的解.

【解析】（1）否.“著名的数学家”无明确的标准；（2）否.“高个子同学”无明确的标准；（3）能；（4）能.

【例2】集合$\{3,x,x^2-2x\}$中，x应满足的条件是________.

【解析】根据集合中元素的互异性，x应满足

$$\begin{cases}x\neq3\\x^2-2x\neq3\\x^2-2x\neq x\end{cases}$$

解得$x\neq3$，且$x\neq0$，且$x\neq-1$.

【例3】用适当的方法表示下列集合.

（1）所有正奇数组成的集合；

（2）由1，2，3这三个数字抽出一部分或全部数字（没有重复）所组成的一切自然数的集合.

【解析】（1）$\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{N}\}$；

（2）{1，2，3，12，13，21，23，31，32，123，132，213，231，312，321}.

【例4】用列举法表示下列集合.

（1）不大于10的非负偶数集；

（2）$\{x|x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b},a,b$为非零实数$\}$.

合，它的任何两个元素都是不同的.

(3)无序性：集合与其中元素的排列顺序无关，也就是说集合$\{a,b\}$和$\{b,a\}$是同一集合.

4.集合的表示方法

(1)列举法：将集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法.

使用列举法时，需注意以下几点：

①元素间用分隔号“,”；

②元素不重复；

③元素无顺序；

④对于含较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法，但必须把元素间的规律显示清楚后才能用删节号.

(2)描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内的方法.的一般方法是$\{P|P$适合的条件$\}$，其中P叫做代表元素.描述法的语言形式有三种：文字语言、符号语言、图形语言，重点要注意符号语言，如表示由抛物线$y=x^2$上所有点构成的集合，其符号语言形式是$\{(x,y)|y=x^2\}$.须知：集合$\{y|y=x^2\}$.$\{x|y=x^2\}$、$(x,y)|y=x^2\}$是有区别的.

使用描述法需注意以下几点：写清楚元素的代表符号；说明该集合中元素的性质；不能出现未被说明的字母；多层描述时，应当准确应用“且”、“或”；所有描述的内容都要写在集合符号内，用于描述的语句力求简明，准确.

(3)图示法：为了形象地表示集合，我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合，例如，图1.1－1表示集合$\{1,2,3,4,5\}$.

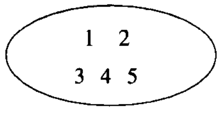


图 1.1-1

5.元素和集合的关系符号“$\in$”或“$\notin$”.

符号“$\in$”“$\notin$”是表示元素和集

【解析】(1)不大于10即小于等于10，非负即大于或等于0，由此知该集合由所有大于或等于0而小于或等于10的偶数组成.

(2)分$a>0$、$b>0$；$a<0$、$b<0$；a、b异号三种情况确定，

【答案】(1)$\{0,2,4,6,8,10\}$；(2)$\{-2,0,2\}$

【例5】用描述法表示下列集合.

(1)使$y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$有意义的实数x的集合；

(2)在坐标平面内，不在二、四象限的点集；

(3)所有被3除余2的整数集.

【解析】(1)使$y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$有意义，则须$x^2+x-2\neq0$，得：$x\neq-2$且$x\neq1$.因此用描述法表示为$A=\{x|x\neq-2$且$x\neq1,x\in\mathbf{R}\}$.

(2)坐标平面内，在二、四象限内的点(x,y)应满足$xy<0$，因而不在二、四象限内的点(x,y)满足$xy\geqslant0$.因此，用描述法表示为$A=\{(x,y)|xy\geqslant0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

(3)被3除余2的整数可表示为$x=3n+2$且$(n\in\mathbf{Z})$，因此，用描述法表示为$A=\{x|x=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$.

【例6】将下列集合改为用符号语言描述.

(1)$\{$非负奇数$\}$；

(2)$\{$能被3整除的数$\}$；

(3)$\{$第一象限和第三象限内的点$\}$；

(4)$\{$正、反比例函数在第二象限的交点$\}$.

【解析】(1)$\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\}$；

(2)$\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$；

(3)$\{(x,y)|xy>0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$；

(4)$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y=k_1x\\ y=\dfrac{k_2}{x}\end{cases},k_1k_2\neq0\text{ 且 }x<0,y>0\right.\right\}$.

【例7】已知数集M满足条件：若$a\in M$，则$\dfrac{1+a}{1-a}\in M(a\neq-1,a\neq0)$，已知$3\in M$，试把由此确定的$M$的其他元素全部求出来.

【解析】$a=3\in M$，则$\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{1+3}{1-3}=-2\in M$.

$\therefore\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}\in M$，$\therefore\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\in M$.

$\therefore\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3\in M$.

$\therefore M=\{3,-2,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\}$.

【例8】下面有三个集合：

①$\{x|y=x^2+1\}$；　　②$\{y|y=x^2+1\}$；

③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

(1)它们是不是相同的集合？

(2)它们的各自定义是什么？

【解析】(1)是不同的集合.

(2)集合①是函数$y=x^2+1$的自变量x所有允许值组成的集合，因为x可以取任意实数，所以$\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$.

集合②是函数$y=x^2+1$的所有函数值y组成的集合，由二次函数图像知$y\geqslant1$，所以$\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geqslant1\}$.

合之间的关系，一般不能用来表示集合与集合之间的关系.

6.特定集合的表示.

(1)全体非负整数的集合通常简称为非负整数集（或自然数集），记作N；

(2)非负整数集内排除0的集合，也称正整数集，表示成N^*（或N_+）；

(3)全体整数的集合通常简称为整数集，记作Z；

(4)全体有理数的集合通常简称为有理数集，记作Q；

(5)全体实数的集合通常简称为实数集，记作R.

集合③是函数$y=x^2+1$图像上所有点的坐标组成的集合.

札记

综合应用举例（重应用，举一反三）

【例1】数集A满足：若$a\in A(a\neq 1)$，则$\frac{1}{1-a}\in A$.

证明：(1)若$2\in A$，则在A中还有另外两个数，求出这两个数；

(2)集合A不可能是单元素实数集；

(3)集合A中至少有三个不同的元素.

证明：(1)$\because 2\in A,2\neq 1$，$\therefore \frac{1}{1-2}=-1\in A$.

$\therefore -1\in A,-1\neq 1$，$\therefore \frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$.

$\because \frac{1}{2}\in A,\frac{1}{2}\neq 1$，$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$.

$\therefore -1,\frac{1}{2}\in A$.

(2)若A是单元素的实数集，则$a=\frac{1}{1-a}$，

即：$a^2-a+1=0$，此方程无解.

$\therefore a\neq\frac{1}{1-a}$.

$\therefore$集合A中的元素不可能是单元素的实数.

(3)$\because a\in A,a\neq 1$时，有$\frac{1}{1-a}\in A$且$\frac{1}{1-a}\neq 1$，

即：$a\neq 0$时，有$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{a-1}{a}\in A$，

$\therefore \frac{a-1}{a}\in A$且$\frac{a-1}{a}\neq 1$，

即：$a-1\neq a$，有$\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}=a\in A$.

$\therefore$若$a\in A$，则$\frac{1-a}{a}\in A,\frac{1}{1-a}\in A$.

$\therefore$集合A中至少有三个不同的元素.

【例2】设集合$A=\{a|a=n^2+1,n\in \mathbf{N}\}$，集合$B=\{b|b=m^2-4m+5,m\in \mathbf{N}\}$，若$a\in A$，试判断$a$与集合$B$的关系.

【解析】元素与集合的关系是属于或不属于的关系，$a\in A$，则a可写成$n^2+1,n\in \mathbf{N}$的形式，判断a是否属于B，则看a是否可表示成$m^2-4m+5,m\in \mathbf{N}$形式.

$\because a\in A$，$\therefore a=n^2+1=(n^2+4n+4)-4(n+2)+5=(n+2)^2-4(n+2)+5$.

$\because n\in \mathbf{N}$，$\therefore n+2\in \mathbf{N}$，

$\therefore a\in B$.

【例3】已知集合$A=\{x|ax^2-3x+2=0,a\in \mathbf{R}\}$，若$A$中元素至多只有一个，求$a$的取值范围.

【解析】讨论方程$ax^2-3x+2=0$实数根情况，从中确定a的取值范围，依题意方程有一个实数根或有两个相等的实数根或无实数根.

(1)$a=0$时，原方程$-3x+2=0$，$x=\frac{2}{3}$符合题意.

(2)$a\neq 0$时，方程$ax^2-3x+2=0$为一元二次方程，

$\Delta=9-8a\leqslant 0$　　$\therefore a\geqslant\frac{9}{8}$也符合题意.

综合(1)(2)知$a=0$或$a\geqslant\frac{9}{8}$.

同步分层训练（勤练习，熟能生巧）

A 基础强化训练

1.选择题

(1)下列各组对象：

①接近于0的数的全体；

②比较小的正整数全体；

③平面上到点O的距离等于1的点的全体；

④正三角形的全体；

⑤$\sqrt{2}$的近似值的全体；

其中能构成集合的组数是（　　）.

A.2组　　B.3组　　C.4组　　D.5组

(2)设a、b都是非零实数，$y=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{ab}{|ab|}$可能取的值组成的集合为（　　）.

A.$\{3\}$　　B.$\{3,2,1\}$

C.$\{3,1,-1\}$　　D.$\{3,-1\}$

(3)下列表示同一个集合的是（　　）.

A. $M=\{(1,2)\}$，$N=\{(2,1)\}$

B. $M=\{1,2\}$，$N=\{2,1\}$

C. $M=\{y|y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$，
$N=\{y|y=x-1,x\in\mathbf{N}\}$

D. $M=\{(x,y)|\frac{y-1}{x-2}=1\}$，
$N=\{(x,y)|y-1=x-2\}$

(4)集合 $P=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$R=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$a\in P$，$b\in Q$，则有(　　).

A. $a+b\in P$

B. $a+b\in Q$

C. $a+b\in R$

D. $a+b$ 不属于 P、Q、R 中的任意一个.

(5)方程组 $\begin{cases}x+y=3\\y-x=-1\end{cases}$ 的解集(　　).

A. $\{2,1\}$　　B. $\{x=2,y=1\}$

C. $\{(2,1)\}$　　D. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

集合 $M=\{x|x=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y|y=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，若 $x_0\in M$，$y_0\in\mathbf{N}$，则 x_0y_0 与集合 M、N 的关系是(　　).

A. $x_0y_0\in M$　　B. $x_0y_0\in N$

C. $x_0y_0\notin M$　　D. $x_0y_0\notin N$

(7)由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 组成的集合，最多有(　　)个元素.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 填空题

(1)集合 $\{3,x,x^2-2x\}$ 中，x 应满足的条件是________.

(2) $\{1,-3,5,-7,9,-11,\cdots\}$ 用描述法表示为________.

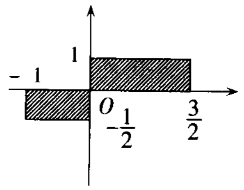
(3)关于 x 的方程 $ax+b=0$，当 a、b 满足条件________时，解集是有限集；满足________时，解集是无限集.

3. 解答题

(1)已知集合 $A=\{x|x<6$，且 $x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{$小于 10 的质数$\}$，$C=\{$24 和 36 的正公约数$\}$，用列举法表示①$\{y|y\in A$ 且 $y\in C\}$，②$\{y|y\in B$，且 $y\notin C\}$.

(2)写出非零实数 a、b、c 构成 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的集合.

(3)用描述法表示图中阴影部分(含边界)的坐标的集合.



(4)集合 $A=\{x|x^2-(2a-1)x+a^2=0\}=\varnothing$，求 a 的取值范围.

(5)用适当的方法表示下列各集合.

①能被 3 整除且小于 10 的非负整数组成的集合；

②由 4 和 6 的所有公倍数组成的集合.

(6)若 $-3\in\{a,-3,2a-1,a^2-4\}$，求实数 a.

B 应用创新训练

1. 选择题

(1)已知集合 $A=\{x|x=\frac{a^2-2a+1}{a-1},a\in\mathbf{Z},a\neq1\}$，若 $x\in A$，那么①$x\in\mathbf{N}^*$；②$x\in\mathbf{Z}$；③$x\in\mathbf{Q}$；④$x\in\mathbf{R}$. 其中正确的有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(2)方程组 $\begin{cases}x-y+1=0\\2x+y-4=0\end{cases}$ 的解集可表示为：

①$(1,2)$　②$\{(1,2)\}$　③$\{x,y|x=1,y=2\}$

④$\left\{\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$　⑤$\left\{\begin{matrix}(x,y)|x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$

其中表示正确的个数是(　　).

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

(3)已知集合 $P=\{x|ax+b-x+2=0\}$ 是无限集，则实数 a、b 的值是(　　).

A. $a=1,b=-2$　　B. $a=-1,b=2$

C. $a=1,b=2$　　D. $a=-1,b=-2$

2. 填空题

(1)被 3 除余 1 的正整数集合可表示为________.

(2)设集合 $A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{y|y=4s,s\in\mathbf{N}\}$，给出下列说法：

①若 $x_0\in\mathbf{N}$，$y_0\in\mathbf{N}$，则 $x_0y_0\in B$；

②若 $x_0\in A$，$y_0\in B$，则 $x_0+y_0\in A$；

③若 $x_0\in A$，$y_0\in B$，则 $x_0+x_0y_0\in A$；

④若 $x_0\in\mathbf{N}$，且 $x_0\notin A$，则 $x_0\in B$；

⑤若 $y_0\in\mathbf{N}$，且 $y_0\notin B$，则 $y_0\in A$.

其中正确的说法序号是________.

(3)设集合 $M=\{m|m=a+b\sqrt{3},a、b\in\mathbf{Q}\}$，已知 $x=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$y=2+\pi\sqrt{3}$，$z=\frac{1}{3-2\sqrt{3}}$，则 x、y、z 与 M 的关系依次是 x ________ M、y ________ M、z ________ M.(在横线上填上恰当的符号).

(4)用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

$\sin30°$______ $\mathbf{Q}$　　$\cos30°$______ $\mathbf{Q}$　　$\sin45°$______ $\{$正实数$\}$　　$\tan45°$______ $\mathbf{N}^*$.

3. 解答题

(1)已知 $A=\{x|\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{N}\}$，试用列举法表示集合 A.

(2)已知集合 $A=\{x|x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Z}\}$，设 $x_1\in A$，

$x_2 \in A$，求证：$x_1 x_2 \in A$.

(3)已知集合 $A=\{x|x^2+px+q=x\}$，$B=\{x|(x-1)^2+p(x-1)+q=x+1\}$

①若 $A=\{2\}$，求集合 B；

②若 $B=\{-1,2\}$，试证集合 A、B 必有一个相同的元素.

(4)已知由实数组成的集合 A 满足条件：若 $x\in A$，则必有 $\frac{1}{1-x}\in A$.

①设 A 中恰有三个元素，且 2 是其中的一个，求这时的集合 A；

②有人判断集合 A 中的元素可以有且仅有一个，请你作出判断，看他的判断是否正确？为什么？

③若集合 $A\neq\varnothing$，试证集合 A 中的元素有且只有 3 个，并给出除①问中以外的一个集合 A 来.

趣味相关阅读（常阅读，厚积薄发）

"集合"是数学王国中最抽象的概念之一，因为我们很难给它一个严密的定义，但从另一个角度来看，"集合"也体现了数学中最直观的事物——一组指定的对象.集合也是"数学大厦"的根基之一，在这一直观概念上构建了极丰富而严密的理论.

用集合解决现实生活中的实际问题是很有效的.请看如下的例子：

如果已知一个班有 30 人，其中 5 人有兄弟，5 人有姐妹，你能判断这个班有多少人是独生子女吗？如果不能判断，你能说出还需哪些条件才能对这一问题作出判断吗？

事实上，如果注意到"有兄弟的人也可能有姐妹"，我们就知道，上面给出的条件不足以判断这个班独生子女的人数.为了解决这个问题，我们还必须知道"有兄弟且有姐妹的同学的人数".从逻辑上完全搞清这一问题并非易事，但如果应用集合的知识，我们就能清晰地描述并解决上述问题了.

下面的问题体现了逻辑推理的奇妙——

一位英国探险家到非洲探险，一天夜里，营地失窃.在追捕小偷时抓住了两个嫌疑犯，并且已知两人中有一个是小偷而另外一个则是清白的(有且只有一个是小偷——数学语言).探险家问其中一个嫌疑犯："你是小偷吗?"他回答说："枯姆."(土语).另一个嫌疑犯会讲英语，解释说："他说'不是'."

请你判断谁是小偷.

首先，让我们假设小偷一定说谎，而清白者一定讲实话.如果第一个回答探险家问题的疑犯是小偷，他将回答"不是"，如果他不是小偷，他更应理直气壮地回答"不是".因此，不论第一位疑犯是不是小偷，他都将回答"不是".而第二个的回答说明他自己没有说谎.由此判定，第一个回答探险家问题的嫌疑犯是小偷.

在上面的分析中，我们已在不知不觉中运用了逻辑推理和数学中的一些基本思考方式.

§1.1.2 集合间的基本关系

教材预知信息（抓关键，提纲挈领）

◇情境切入

集合和集合的关系，学生初次接触感到抽象，以致解题时无处下手，如果能以数形结合的思想为指导，借助图形进行思考，不仅可以使集合之间的相互关系直观明了，而且也便于将各元素的归属确定下来，使抽象的集合问题，通过直观形象思维解决、为问题的解决创设有益的情景.

分类讨论的通俗说法是按照一定的标准把研究对象分成几个情况，而采取的是一种"化整为零、各个求解"的策略，通过这种策略，可以达到将一个复杂的问题分解成若干个简单的问题，从而获得完整解答的目的.

◇问题感知

1. 已知 $A=\{x|x<-1,或\ x>2\}$，$B=\{x|4x+p\geq 0\}$，当 $A\supseteq B$ 时，实数 p 的取值范围是________.

2. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$\complement_I A=\{5\}$，则实数 a 的值是________.

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+2=0\}$，若 $A\cap B=B$，则 a 的取值范围是________.

信息提炼

1. $\{p|p<-8\}$
2. 2
3. $\{a|a=3 或 -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}\}$

重点难点解疑（学要点，以点带面）

◇要点梳理 & ◇对应例题及学法点拨

1. 子集的概念

一般地，对于两个集合 A、B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 为集合 B 的子集(subset)，记作 $A\subseteq B$，（或 $B\supseteq A$），读作"A 包含于 B"（或"B 包含 A"）.

在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 Venn 图.

如果集合 A 是集合 B 的子集，($A\subseteq B$)，且集合 B 是集合 A 的子集($B\subseteq A$)，此时，集合 A 与集合 B 中的元素是一样的，因此，集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，我们称集合 A 是集合 B 的真子集(proper subset)，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）.

2. 空集

我们把不含任何元素的集合叫做空集(empty set)，记作 $\varnothing$，并规定：空集是任何集合的子集.

【例 1】写出满足 $\{a,b\}\subseteq A\subseteq\{a,b,c,d\}$ 的所有集合 A.

【解析】由题设的包含关系知，一方面 A 是集合 $\{a,b,c,d\}$ 的子集，与此同时又包含集合 $\{a,b\}$，A 中必至少含有元素 a，b，而 c，d 两个元素可不含、含一个或含两个.

解：满足条件的集合 A 有：$\{a,b\}\{a、b、c\}\{a、b、d\}\{a、b、c、d\}$.

【例 2】若集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，且 $B\subsetneqq A$，求 m 的值.

【解析】要解决此问题，首先要搞清楚 A 集合的元素是什么，然后根据 $B\subsetneqq A$，求 m 值.

解：$A=\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3,2\}$

$\because B\subsetneqq A$，$\therefore mx+1=0$ 的解为 -3 或 2 或无解.

当 $mx+1=0$ 的解为 -3 时，由 $m\cdot(-3)+1=0$ 得 $m=\frac{1}{3}$；

当 $mx+1=0$ 的解为 2 时，由 $m\cdot 2+1=0$ 得 $m=-\frac{1}{2}$；

当 $mx+1=0$ 无解时，$m=0$.

综上所述，$m=\frac{1}{3}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$，或 $m=0$.

札记

综合应用举例（重应用，举一反三）

【例 1】判断下列各组中两集合间的关系：

①$P=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，
$Q=\{x|x=4n,n\in\mathbf{Z}\}$

②$P=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，
$Q=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{N}^*\}$

③$P=\{x|x=2n-1,N\in\mathbf{Z}\}$，
$Q=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$

④$P=\{x|x^2-x=0\}$，
$Q=\{x|x=\frac{1+(-1)^n}{2},n\in\mathbf{Z}\}$

【解析】对问题中给出的集合，要仔细审明元素的意义是什么，构成集合的元素的整体状况如何.

解：①中，P 是偶数集，Q 是 4 的倍数，$\therefore Q\subsetneqq P$.

②中，P 是由 1，3，5，…所有正奇数组成的集合，Q 是由 3，5…（不含 1）的所有正奇数组成的集合，$\therefore Q\subsetneqq P$.

③中，P 与 Q 都是全体奇数组成的集合. $\therefore P=Q$

④中，$P=\{x|x(x-1)=0\}=\{0,1\}$，$Q=\left\{x\middle|x=\begin{cases}0,n\text{ 为奇数时}\\1,n\text{ 为偶数时}\end{cases}\right\}=\{0,1\}$，$\therefore P=Q$.

【例 2】已知集合 $A=\{a,a+b,a+2b\}$，$B=\{a,ac,ac^2\}$，若 $A=B$，求 c 的值.

【解析】欲求 c 的值，可列关于 c 的方程或方程组，根据两集合相等的意义及集合中元素的互异性，有下列两种情况：(1)$a+b=ac$ 且 $a+2b=ac^2$. (2)$a+b=ac^2$ 且 $a+2b=ac$.

解：(1)$a+b=ac$，且 $a+2b=ac^2$，消去 b 得：$a+ac^2-2ac=0$，

$\because a=0$ 时，集合 B 中的三个元素均为零，根据集合元素的互异性，舍去 $a=0$，$\therefore c^2-2c+1=0$.

即 $c=1$，但 $c=1$ 时，集合 B 中的三个元素也相同，舍去 $c=1$，此时无解.

(2)若 $a+b=ac^2$ 且 $a+2b=ac$，消去 b 得：$2ac^2-ac-a=0$.

$\because a\neq 0$，

$\therefore 2c^2-c-1=0$，即 $(c-1)(2c+1)=0$.

又 $\because c\neq 1$，$\therefore c=-\frac{1}{2}$.

【例 3】集合 $X=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，
$Y=\{y|y=4k\pm 1,k\in\mathbf{Z}\}$. 试证明 $X=Y$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

【解析】要证明 $X=Y$，按集合相等的定义，应证明 $X\subseteq Y$，且 $Y\subseteq X$.

证明：(1)设 $x_0\in X$，则 $x_0=2n_0+1$，$n_0\in\mathbf{Z}$.

①若 n_0 是偶数，可设 $n_0=2m$，$m\in\mathbf{Z}$，则

$x_0=2\cdot 2m+1=4m+1$，$\therefore x_0\in Y$.

②若 n_0 是奇数，可设 $n_0=2m-1$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $x_0=2(2m-1)+1=4m-1$，$\therefore x_0\in Y$. $\therefore$ 无论 n 是偶数还是奇数，都有 $x_0\in Y$，$\therefore X\subseteq Y$.

(2)又设 $y_0\in Y$，则 $y_0=4k_0+1$，或 $y_0=4k_0-1$，$k_0\in\mathbf{Z}$.

$\because y_0=4k_0+1=2(2k_0+1)-1$，$y_0=4k_0-1=2(2k_0-1)+1$，

$2k_0$ 和 $2k_0-1$ 都属于 $\mathbf{Z}$，$\therefore y_0\in X$，$\therefore Y\subseteq X$.

由(1)、(2)可知，$X=Y$.

【例 4】设 $A=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$，

$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $B\subsetneqq A$，求实数 a 组成的集合.

【解析】解方程 $x^2-8x+15=0$，得

$x_1=3$，　$x_2=5$，$\therefore$ 集合 $A=\{3,5\}$.

$\because B\subsetneqq A$，故有 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两种情况时，当 $B=\varnothing$ 时，得 $a=0$；当 $B\neq\varnothing$ 时，则 $3\in B$，得 $a=\dfrac{1}{3}$；或 $5\in B$，得 $a=\dfrac{1}{5}$.

综上可知，实数 a 的值组成的集合为 $\left\{0,\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{3}\right\}$.

【小结】这种题型易忽略的问题是 $B=\varnothing$ 的情况，空集 $\varnothing$ 是一个特殊的集合，它是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，在集合的运算时，必须充分注意予以考虑.

【例 5】已知集合 $P=\{1,x,y\}$，$Q=\{x,x^2,xy\}$.

(1)若集合 $M=\{4\}$ 是 Q 的一个真子集，求实数 x、y 应满足的关系；

(2)若 $P=Q$，求实数 x、y 的值.

【解析】(1)若 $x=4$，则 $x^2=16$，$\therefore xy\neq 4$，且 $xy\neq 16$，此时 $y\neq 1$，且 $y\neq 4$；$\therefore x$、y 应满足的关系是 $x=4$，且 $y\neq 1$，$y\neq 4$；若 $x^2=4$，则 $x=2$ 时，$y\neq 2$；或 $x=-2$ 时，$y\neq -2$；若 $xy=4$ 时，则 $x\neq 4$，$x^2\neq xy$，且 $x^2\neq x$，$\therefore x\neq 0$，$x\neq 1$，$x\neq 4$，且 $x\neq y$.

(2)若 $P=Q$，由于已知有公共元素 x，所以必有

$\begin{cases}x^2=1\\ xy=y\end{cases}$ 或 $\begin{cases}xy=1\\ x^2=y\end{cases}$，

又 $x\neq 1$ 且 x 为实数，$\therefore x=-1$，$y=0$.

【小结】在逐一讨论时，既要注意不要遗漏情况，同时也可以观察，再列式，以避免不必要的讨论；如本题中，可以在观察出 $x\neq 1$ 后，直接解第一个方程组，而不考虑第二种情况.

同步分层训练　（勤练习，熟能生巧）

A 基础强化训练

1. 选择题

(1)设 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{10}\}$，给出下列关系：① $a\subsetneqq M$；② $M\supseteq\{a\}$；③ $\{a\}\in M$；④ $\{\varnothing\}\subseteq\{a\}$；⑤ $a\notin M$.

其中正确的关系式共有(　　).

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

(2)下列各组的两个集合相等的一组是(　　).

A. $P=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}$，$Q=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2=0\}$

B. $P=\{y\in\mathbf{R}\mid y=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$，

$Q=\{t\in\mathbf{R}\mid t=y^2-2y+2,y\in\mathbf{R}\}$

C. $P=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x\mid x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $P=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，

$Q=\{(x,y)\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$

(3)设 $P=\{x\mid -1<x<2\}$，$Q=\{x\mid x+a<0\}$，若 $P\subsetneqq Q$，实数 a 的取值范围是(　　).

A. $a\leqslant -2$　　B. $a\geqslant 2$　　C. $a\geqslant -2$　　D. $a\leqslant 2$

(4)已知集合 P 的非空真子集共有 15 个，而集合 Q 的子集共有 8 个，则 P 中的元素比 Q 中的元素多(　　).

A. 7 个　　B. 8 个　　C. 2 个　　D. 1 个

(5)若集合 $A=\{a\mid a=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{b\mid b=3n-1,n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{c\mid c=6n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则这三个集合之间的关系是(　　).

A. $A\supsetneqq B\supsetneqq C$　　B. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$

C. $A=B\supsetneqq C$　　D. $A=B=C$

2. 填空题

(1)已知集合 A 满足条件：$\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$，则这样的集合 A 共有________个.

(2)方程组 $\begin{cases}ax+y=b\\ x+by=-a\end{cases}$ 的解集 $\{(1,1)\}$，则点 (a,b) 是________.

(3)若集合 $A=\{x\mid 2x-a=0,x\in\mathbf{Z}\}\subsetneqq\{x\mid -1<x<3\}$，则由实数 a 的值组成的集合是________.

3. 解答题

(1)已知集合 $A=\{x,xy,x-y\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x、y 的值.

(2)对于集合 $A=\{1,3,-x^3\}$ 与集合 $B=\{1,x+2\}$，若存在实数 x 使得 B 可以成为 A 的子集，试求这样的集合 A、B.

(3)设 $A=\{-1,1\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+b=0\}$，$B\neq\varnothing$，且 $B\subseteq A$，求实数 a、b 的值.

B 应用创新训练

1. 选择题

(1)下列命题:(1)①空集没有子集;②任何集合至少有两个子集;③空集是任何集合的真子集;④若$\varnothing \subsetneqq A$,则$A \neq \varnothing$,其中正确的有(　　).

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

(2)下列四个集合中,表示空集的是(　　).

A. $\{0\}$

B. $\{(x,y)\mid y^2=-x^2, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$

C. $\{x\mid |x|=5, x\in \mathbf{Z}, x\notin \mathbf{N}\}$

D. $\{x\mid 2x^2+3x-2=0, x\in \mathbf{N}\}$

(3)满足$\{a\}\subseteq M \subsetneqq \{a,b,c,d\}$的集合$M$共有(　　).

A. 6 个　　B. 7 个　　C. 8 个　　D. 15 个

(4)已知集合A、B、C中$A\subseteq B$,$A\subseteq C$,若$B=\{0,1,2,3,4\}$,$C=\{0,2,4,8\}$,则A的子集最多有(　　).

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 6 个　　D. 8 个

(5)若集合$A=\{x\mid x=2k+1, k\in \mathbf{Z}\}$,$B=\{x\mid x=4k\pm 1, k\in \mathbf{Z}\}$则$A$与$B$之间的关系是(　　).

A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. $A\neq B$

(6)集合$M=\{x\mid x=1+a^2, a\in \mathbf{N}^*\}$,$P=\{x\mid x=x^2-4a+5, a\in \mathbf{N}^*\}$,下列关系中正确的是(　　).

A. $M\subsetneqq P$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M=P$　　D. $M\subsetneqq P$且$P\subsetneqq M$

(7)已知$\{a,b\}\subsetneqq A\subseteq \{a,b,c,d,e\}$,则满足条件的集合$A$的个数是(　　).

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

2. 填空题

(1)设x、$y\in \mathbf{R}$,$A=\{(x,y)\mid y-3=x-2\}$,$B=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$,则$A$、$B$的关系是________.

(2)已知$A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$,$B=\{x\mid ax-1=0\}$,若$B\subsetneqq A$,则a的值为________.

(3)设$A=\{x\mid 1<x<2\}$,$B=\{x\mid x-a<0\}$,若$A\subsetneqq B$,则a的取值范围是________.

(4)设集合$A=\{2,a\}$,$B=\{2,a^2-2\}$,若$A=B$,则a的值为________.

(5)若集合$M=\{x\mid x=m+\frac{1}{6}, m\in \mathbf{Z}\}$,

$N=\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n\in \mathbf{Z}\}$　$P=\{x\mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}, P\in \mathbf{Z}\}$,则$M$、$N$、$P$的关系是________.

3. 解答题

(1)设集合$A=\{x\mid x^2+4x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0, a\in \mathbf{R}\}$,若$B\subseteq A$,求实数$a$的值.

(2)设集合$A=\{x\mid x$是菱形$\}$,$B=\{x\mid x$是平行四边形$\}$,$C=\{x\mid x$是正方形$\}$,提出A、B、C之间的关系.

(3)已知集合$A=\{x\mid 1<ax<2\}$,$B=\{x\mid |x|<1\}$,若$A\subseteq B$,求实数a的取值范围.

(4)求满足$\{x\mid x^2+1=0, x\in \mathbf{R}\}\subsetneqq M\subseteq \{x\mid x^2-1=0, x\in \mathbf{R}\}$的集合$M$的个数.

(5)已知三元素集合$A=\{x, xy, x-y\}$,$B=\{0, |x|, y\}$,$A=B$,求x与y的值.

(6)若集合$A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$,$B=\{x\mid mx+1=0\}$,$B\subsetneqq A$,求m的值.

趣味相关阅读(常阅读,厚积薄发)

无限集

在19世纪末,德国数学家康托系统地描绘了一个能够为全部数学提供基础的通用数学框架.他创立的这个学科一直是我们数学发展的根植地.这个学科就叫集合论.它的概念和方法已经有效地渗透到所有的现代数学中,尽管我们生存的世界是有限的,但是,为了研究它,我们却总是要涉及无限,所有自然数的集合就是一个无限集,圆周率的精确值表示需要无限多位小数,等等.对于无限集,可以得到一些意想不到的结论.例如,设集合A是所有正整数的集合,集合B是所有正偶数的集合.直观地,B中的元素个数恰好是A中元素个数的一半.但是,根据集合论的观点,它们的个数是一样的.这可以用"配对"的方法来验证:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \cdots \end{array}$$

这里没有矛盾——如果有的话也只是出于我们的成见.对此的阐释最好莫过于"希尔伯特旅馆",这个理想化的建筑物有无限多个房间,以所有正整数1,2,3,…来编号.一天晚上,碰巧所有房间都住满了(在这个故事中人数也是无限多).这时新来了一个客人,正在老板无法安置的时候,一个聪明的服务员想出了一个办法,她提出将1号房的客人安排到2号房,2号房的客人安排到3号,3号房的客人安排到4号房,由此类推……这样就腾出了1号房供新客人使用.而且即使来了不止一个客人,也可以同样妥善安置,比如说来了新客人10个,她说:"只需将1号房的客人安排到11号房,2号房的客人安排

到 12 号房，3 号房的客人安排到 13 号房…，由此类推，这样就腾出了前十个空房供新客人使用.”这时，有人提出新的问题，如果后来的客人有无数个怎么办呢？这难不倒我们的这位服务员，她提出将 1 号房的客人安排到 2 号房，2 号房的客人安排到 4 号房，3 号房的客人安排到 6 号房…，由此类推，这样不就腾出了 1 号，3 号，5 号…无数个房间了吗.

§1.1.3 集合的基本运算

教材预知信息（抓关键，提纲挈领）

◇情境切入

正确掌握交集与并集的概念能准确区分一元数集和二元数集，并能综合运用所学有关集合的知识，在给定的不同类型的集合条件下，熟练地进行集合的子集、交、并、补运算，并了解集合运算的有关性质.

◇问题感知

1. 设 $A=\{x|x>-2\}$，$B=\{x|x<3\}$，求 $A\cap B$.

2. 设 $A=\{x|x$ 是等腰三角形$\}$，$B=\{x|x$ 是直角三角形$\}$，求 $A\cap B$.

3. 设 $A=\{4,5,6,8\}$，$B=\{3,5,7,8\}$，求 $A\cup B$.

信息提炼

1. $A\cap B=\{x|-2<x<3\}$

2. $A\cap B=\{x|x$ 是等腰直角三角形$\}$

3. $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8\}$

重点难点解疑（学要点，以点带面）

◇要点梳理 & ◇对应例题及学法点拨

1. 交集的定义

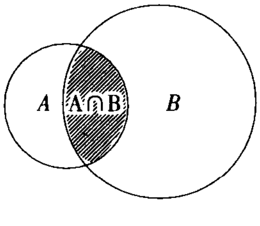
一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集.

记作：$A\cap B$，读作“A 交 B”.

符号语言表达式为：

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$

文氏图（图像语言）表示为：



关于定义的理解：

对于“$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$”，不能仅认为 $A\cap B$ 中的任一元素都是 A 与 B 的公共元素，同时还有 A 与 B 的公共元素都属于 $A\cap B$ 的含义，这就是文字定义中“所有”二字的含义，而不是“部分”公共元素，还有并不是任何两个集合都有公共元素，当集合 A 与 B 没有公共元素时，不能说 A 与 B 没有交集，

【例 1】已知集合 $M=\{x|y^2=x+1\}$，$P=\{x|y^2=-2(x-3)\}$，那么 $M\cap P=$(　　).

A. $\{(x,y^2)|x=\frac{5}{3},y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\}$　　B. $\{x|-1<x<3\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|x\leqslant 3\}$

解法 1：直接法

$\because M:x=y^2-1\geqslant -1$，即 $M=\{x|x\geqslant -1\}$.

$P:x=-\frac{1}{2}y^2+3\leqslant 3$，即 $P=\{x|x\leqslant 3\}$.

$\therefore M\cap P=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$\therefore$ 应选 C.

解法 2：排除法

$\because M\cap P$ 的元素是 x，而不是 (x,y)，$\therefore$ 排除 A.

比较 B 与 C，如取 $x=-1$，$\because -1\in M$，$-1\in P$，

$\therefore -1\in M\cap P$，　$\therefore$ 排除 B.

再比较 C 与 D，取 $x=-2$.

$\because -2\notin M$　$\therefore$ 排除 D. $\therefore$ 应选 C.

【例 2】已知集合 A、B、C 为非空集合，$M=A\cap C$，$N=B\cap C$，$P=M\cup N$，则(　　).

A. 一定有 $C\cap P=C$　　B. 一定有 $C\cap P=P$

C. 一定有 $C\cap P=C\cup P$　　D. 一定有 $C\cap P=\varnothing$

【解析】如图所示：

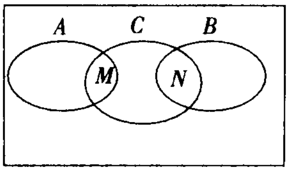
$\because M=A\cap C$，$N=B\cap C$，

$P=M\cup N$，

则必有 $M\cup N\subseteq C$，

则 $P\subseteq C$，

$\therefore C\cap P=P$　选 B.



而是 $A\cap B=\varnothing$.

2. 交集的运算性质

对于任何两个集合 A,B 有

(1) $(A\cap B)\subseteq A,(A\cap B)\subseteq B$

(2) $A\cap A=A$

(3) $A\cap\varnothing=\varnothing$

(4) $A\cap B=B\cap A$

3. 全集的概念

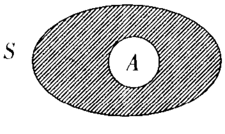
如果一个集合中含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就看作是一个全集，全集通常用 U 来表示. 一般地，若在研究某一类问题时，涉及到某个集合，那么我们就把以这些集合为其子集的一个集合作为全集，在许多情况下，全集可以临时具体给出，也可以遵从预先的约定，如：在不等式解集的研究中，我们通常以实数 **R** 为全集，而在平面图形的研究中，则以平面点集为全集等(注意：在一些老的教辅书中，全集符号是 I).

4. 补集的概念

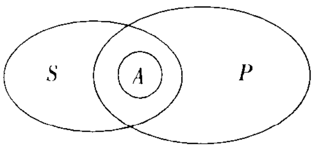
一般地设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$)，由 S 中对所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集(或余集)，记作 $\complement_S A$，读作"A 在 S 中的补集"或"S 中 A 的补集"，用数学符号表示这一概念，即：

$\complement_S A=\{x\mid x\in S 且 x\notin A\}$

它的图形表示则为下图(1)，其中的阴影部分即表示 $\complement_S A$.



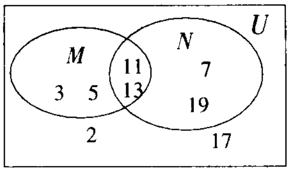
(1)



(2)

全集的概念具有某种"绝对性"，即所研究的集合必须是全集的子集，无一例外；而补集的概念则具有"相对性"，即只有认准相对的集合 S，才能确定补集；换言之，一个

【例 3】已知全集 $U=\{$不大于 20 的质数$\}$，M、N 是 U 的两个子集，且满足 $M\cap(\complement_U N)=\{3,5\}$，$(\complement_U M)\cap N=\{7,19\}$，$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=N\{2,17\}$，求 M、N.



【解析】如右图所示，由 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=(2,17)$，可知 M、N 中没有元素 2、17，由 $(\complement_U M)\cup N=\{7,19\}$. 可知 $\complement_U N$ 中有元素 2，17，M 中没有元素 7，19，由 $M\cap(\complement_U N)=\{3,5\}$，可知 M 中有元素 3，5，N 中没有元素 3，5，剩下的元素 11，13 不在 $(\complement_U M)\cap N$，$M\cap(\complement_U N)$，$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 三部分中，只有 $11\in M\cap N$，$13\in M\cap N$.

所以 $M=\{3,5,11,13\}$，$N=\{7,11,13,19\}$.

【例 4】设 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{b,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 和 b 的值.

思路：$\complement_U A=\{x\mid x\in U 且 x\notin A\}$，由此可知 U 中哪个元素是 5，A 中的 $b=3$.

【解析】$\complement_U A=\{5\}$，$\therefore b=3$，$a^2+2a-3=5$，

$a^2+2a-8=0$，$(a+4)(a-2)=0$，$a=-4$ 或 $a=2$.

【小结】补集的概念是本节的学习重点，另外关于补集还有这样的结论：对于集合 A，$\complement_S(\complement_S A)=A$，回顾 S 中 A 的补集 $\complement_U A$ 的定义可以知道，$\complement_S A\subseteq S$，，这样 S 中元素按是否属于 A 可分作两大类：一类属于 A，另一类属于 $\complement_S A$，别无其他，也就是说，不是属于 $\complement_S A$ 的元素都属于 A，那 $\complement_S(\complement_S A)=A$.

【例 5】设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$B\subseteq A$.

(1)若集合 $\complement_A B=\{3\}$，求集合 B 与集合 U；

(2)若 $\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 的值.

思路：在 A 中的补集与在 U 中的补集是不同的，且补集都有两层含义，即其中的元素应该在一个集合中而不在另一个集合中，具体到第一小题即是 3 在 A 中且 3 不存在 B 中，第二小题则为 5 在 U 中而不存在 A 中，解题的出发点也基于此.

【解析】(1)依题意，$3\in A$，且 $3\notin B$，$\therefore$ 必有 $|2a-1|=3$　$\therefore a=2$ 或 $a=-1$；当 $a=2$ 时，$a^2+2a-3=5$，$\therefore B=\{2\}$，且 $U=\{2,3,5\}$；当 $a=-1$ 时，$a^2+2a-3=-2$，$\therefore B=\{2\}$，且 $U=\{-2,2,3\}$；

(2)同理，有 $5\in U$，且 $5\notin A$，$\therefore a^2+2a-3=5$，解得 $a=2$ 或 $a=-4$；当 $a=2$ 时，$A=\{2,3\}$ 适合题意，而当 $a=-4$ 时，$|2a-1|=9\notin U$，$\therefore a\neq-4$，即所求的 $a=2$.

【小结】此类问题中的一个十分重要的隐含条件是各个给定的集合都只能是全集的子集，从而在问题中所出现的各个元素都必须首先是全集中的元素，不考虑这一点，将导致错误. 而作为一种考虑，可以采用代入检验的方式.

札记

集合总是全集的子集，而可以是不同集合的补集. 如图(2)，我们可以清楚地看见 $\complement_P A \neq \complement_S A$.

5. 空集、全集与补集的关系

一般地，若 S 是一个非空集合，则全集 U，S 中 A 的补集 $\complement_S A$ 与 U 中 A 的补集 $\complement_U A$ 之间满足下列关系：$\complement_S A \subseteq \complement_U A$.

又若集合 A，B 都是 U 的子集，且满足 $A \subseteq B$，则 $\complement_U A \supseteq \complement_U B$，特别地，全集 U 在 U 中的补集是空集 $\varnothing$，而空集 $\varnothing$ 在全集 U 中的补集则为全集 U.

综合应用举例（重应用，举一反三）

【例 1】设集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x|(x+1)(x-5)>0\}$，$a$ 为何值时，(1) $A\cap B=\varnothing$；(2) $A\cap B\neq\varnothing$；(3) $A\cap B=A$；(4) $A\cup \complement_R B=\complement_R B$.

【解析】(1) $A\cap B=\varnothing$ 是指集合 A 与 B 没有公共元素，或者说，A 是由不属于 B 的元素构成的；(2) $A\cap B\neq\varnothing$，说明集合 A 与 B 有公共的元素；(3) $A\cap B=A$ 说明凡属于 A 的元素一定属于 B；(4) $A\cup \complement_R B=\complement_R B$ 说明集合 A 的元素一定是不属于 B 的元素.

解：$\because B=\{x|(x+1)(x-5)>0\}=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$；

$\therefore$(1) 当 $a\geqslant -1$ 时，且 $a+3\leqslant 5$ 时，即当 $-1\leqslant a\leqslant 2$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

(2) 当 $a<-1$ 时，或 $a>2$ 时，$A\cap B\neq\varnothing$.

(3) 当 $a+3<-1$ 或 $a>5$ 时，即当 $a<-4$ 或 $a>5$ 时，$A\cap B=A$.

(4) $\because \complement_R B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$，

$\therefore$ 当 $a\geqslant -1$ 且 $a+3\leqslant 5$ 时，即当 $-1\leqslant a\leqslant 2$ 时 $A\cup \complement_R B=\complement_R B$.

【例 2】设集合 $A=\{|a+1|,3,5\}$，集合 $B=\{2a+1,a^2+2a,a^2+2a-1\}$，当 $A\cap B=\{2,3\}$ 时，求 $A\cup B$.

【解析】欲求 $A\cup B$，关键在于求出 a，这由条件 $A\cap B=\{2,3\}$，根据交集的意义，$|a+1|=2$ 而求出.

解：$|a+1|=2$，$\therefore a=1$ 或 $a=-3$.

当 $a=1$ 时，集合 B 的元素 $a^2+2a=3$，$2a+1=3$，由于集合的元素应具有互异性的要求，因此 $a\neq 1$.

当 $a=-3$ 时，集合 $B=\{-5,3,2\}$.

$\therefore A\cup B=\{-5,2,3,5\}$.

【例 3】设集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=B$，求 a 的值；

(2) 若 $A\cup B=B$，求 a 的值.

【解析】明确 $A\cap B=B$ 和 $A\cup B=B$ 的含义，根据问题的需要，将 $A\cap B=B$ 和 $A\cup B=B$ 转化为等价的关系式：$B\subseteq A$ 和 $A\subseteq B$，是解决本题的关键. 同时，在包含关系式 $B\subseteq A$ 中，不要漏掉 $B=\varnothing$ 时的情况.

解：首先化简集合 A，得 $A=\{-4,0\}$.

(1) 由于 $A\cap B=B$，则有 $B\subseteq A$ 可知集合 B 或为 $\varnothing$，或为 $\{0\}$，$\{-4\}$，$\{0,-4\}$

①若 $B=\varnothing$，由 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，得 $a<-1$.

②若 $0\in B$，代入得 $a^2-1=0$，$a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，$B=\{x|x^2+4x=0\}=\{0,-4\}=A$，合题意；

当 $a=-1$ 时，$B=\{x|x^2=0\}=\{0\}\subsetneqq A$，也合题意；

③若 $-4\in B$，代入 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$，得 $a^2-8a+7=0$，$a=7$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，②中已讨论，合题意；

当 $a=7$ 时，$B=\{x|x^2+16x+48=0\}=\{-12,-4\}$，不合题意.

由①、②、③得 $a=1$ 或 $a\leqslant -1$.

(2) 因为 $A\cup B=B$，所以 $A\subseteq B$，又 $A=\{-4,0\}$，而 B 至多只有两个根，因此应有 $A=B$.

由(1)知，$a=1$.

【例 4】设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么 $\complement_I M\cap\complement_I N$ 等于（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

【解析】集合 M、N 的元素都是点集，集合 M 中的关系式可变形为 $y=x+1(x\neq 2)$，它的几何意义是直线 $y=x+1$ 上去掉点(2,3)后所有点的集合；集合 N 表示直线 $y=x+1$ 外所有点的集合，可知 $\complement_I M=\{(x,y)|y\neq x+1$，或$(2,3)\}$，表示直线 $y=x+1$ 外所有点及直线上点(2,3)的集合；$\complement_I N=\{(x,y)|y=x+1\}$，表示直线 $y=x+1$ 上所有点的集合. 推知其交集是只有一个公共元素(2,3)的集合.

根据上面，可得 $\complement_I M\cap\complement_I N$ 只有一个公共元素(2,3).

$\therefore$ 应选 B.

【例 5】已知集合 $A=\{x|x^2-4mx+2m+6=0\}$，$B=\{x|x<0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

【解析】$A\cap B\neq\varnothing$，说明集合 A 是由方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ ①的实根组成的非空集合，并且方程①的根有：(1) 两负根；(2) 一负根，一零根；(3) 一负根，一正根.

三种情况，分别求解十分麻烦，这时我们从求解问题的反面考虑，采用“正难则反”的解题策略，即先由 $\Delta\geqslant 0$，求出全集 U，然后求方程①两根均为非负时 m 的取值范围，最后再利用“补集”求解.

解：设全集 $U=\{m|\Delta=(-4m)^2-4(2m+6)\geqslant 0\}=\{m|m\leqslant -1$ 或 $m\geqslant \frac{3}{2}\}$，若方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ 的二根

x_1、x_2 均非负，则

$$\begin{cases}m\in U\\ x_1+x_2=4m\geqslant 0\\ x_1x_2=2m+6\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow m\geqslant\frac{3}{2}$$

$\because\{m|m\geqslant\frac{3}{2}\}$关于$U$的补集为$\{m|m\leqslant -1\}$，

$\therefore$实数 m 的取值范围为$\{m|m\leqslant -1\}$.

【例 6】已知 $A=\{(x,y)|x=n,y=an+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$，问是否存在实数 a、b 使得(1)$A\cap B=\varnothing$；(2)$(a,b)\in C$ 同时成立？

【解析】假设存在 a、b，使得(1)成立，得到 a 与 b 的关系后与 $a^2+b^2\leqslant 144$ 联立，然后讨论联立的不等式组.

解：假设存在实数 a、b，使得 $A\cap B=\varnothing$，则集合 $A=\{(x,y)|x=n,y=an+b,n\in\mathbf{Z}\}$与 $B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$分别对应集合 $A_1=\{(x,y)|y=ax+b,x\in\mathbf{Z}\}$与 $B_1=\{(x,y)|y=3x^2+15,x\in\mathbf{Z}\}$，$A_1$ 与 B_1 对应的直线 $y=ax+b$ 与抛物线 $y=3x^2+15$ 至少要有公共点，所以方程组

$\begin{cases}y=ax+b\\ y=3x^2+15\end{cases}$ 有解，

即方程 $3x^2+15=ax+b$ 必有解，

因此 $\Delta=a^2-12(15-b)\geqslant 0$.

即：$-a^2\leqslant 12b-180$ ①

又$\because a^2+b^2\leqslant 144$ ②

①、②相加得 $b^2\leqslant 12b-36$，

即$(b-6)^2\leqslant 0$，$\therefore b=6$.

将 $b=6$ 代入①得 $a^2\geqslant 108$，

再将 $b=6$ 代入②得 $a^2\leqslant 108$.

因此 $a=\pm 6\sqrt{3}$，再将 $a=\pm 6\sqrt{3}$，$b=6$ 代入方程 $3x^2+15=ax+b$ 得 $3x^2\pm 6\sqrt{3}x+9=0$，解集 $x=\pm\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$，这与 $x\in\mathbf{Z}$ 相矛盾，所以不存在实数 a、b 使得(1)、(2)同时成立.

同步分层训练 （勤练习，熟能生巧）

A 基础强化训练

1. 选择题

(1)若集合 $M=\{(x,y)|x+y=0\}$，$P=\{(x,y)|x-y=2\}$，则 $M\cap P$ 等于(　　).

A. $(1,-1)$　　B. $\{x=1\}$或$\{y=1\}$

C. $\{1,-1\}$　　D. $\{(1,-1)\}$

(2)已知集合 $M=\{x|-3<x<2\}$，集合 $P=\{x|x<-\sqrt{2}$或 $x>\sqrt{2}\}$，那么 $M\cap P$ 等于(　　).

A. $\{x|-3<x<-\sqrt{2}$或$\sqrt{2}<x<2\}$

B. R

C. $\{x|-3<x<\sqrt{2}\}$

D. $\{x|-\sqrt{2}<x<2\}$

(3)设集合 $A=\{x|-5\leqslant x<1\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B$ 等于(　　).

A. $\{x|-5\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|-5\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|x<1\}$　　D. $\{x|x\leqslant 2\}$

(4)下列四个推理：(1)$a\in A\cup B\Rightarrow a\in A$；(2)$a\in A\cap B\Rightarrow a\in A\cup B$；(3)$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$；(4)$A\cup B=A\Rightarrow A\cap B=B$，其中正确的个数为(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

2. 填空题

(1)已知集合 $A=\{x|-4\leqslant x<2\}$，$B=\{x|-1<x\leqslant 3\}$，$C=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant\frac{5}{2}\}$，那么 $A\cap B\cap C=$________.

(2)已知 $A=\{x|x^2+px+12=0;x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=0,x\in\mathbf{N}\}$，全集 $U=\mathbf{N}$，$(\complement_U A)\cap B=\{2\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{4\}$，那么 $p+q$ 的值为________.

(3)已知集合 $P=\{x|-1<x<3\}$，$M=\{x|a<x<2a,a>0\}$，且 $P\cap M=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

3. 解答题

(1)已知集合 $A=\{x|x^2+(m-2)x+m+1=0\}$，$A\cap\{$正实数$\}=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

(2)若集合 $A=\{x|-2<x<1$ 或 $x>1\}$，$B=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$A\cup B=\{x|x>-2\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，求 a，b 的值.

(3)设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-1<x<4\}$，$B=\{y||y|=x+1,x\in A\}$，求 $\complement_U B$，$A\cap B$，$A\cup B$，$A\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

B 应用创新训练

1. 选择题

(1)已知集合 $M=\{-1,2\}$，集合 $P=\{1,-1\}$和集合 $S=\{y|y=-x,x=2\}$中有且仅有一个是方程组 $\begin{cases}ax+by=1\\ bx-ay=5\end{cases}$的解集，则实数 a、b 的值依次是(　　).

A. $-\frac{11}{5},-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{2},1$

C. $3,2$　　D. $\frac{7}{5},\frac{9}{5}$

(2)已知全集 $U=\mathbf{N}^*$，$M=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$P=\{x|x=4n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，则(　　).

A. $U=M\cup P$

B. $U=(\complement_U M)\cup P$

C. $U=M\cup(\complement_U P)$

D. $U=(\complement_U M)\cup(\complement_U P)$

(3)若集合 P、S 满足条件：$P\cup S=\{1,2\}$，则这样的有序集合对(P,S)共有(　　).

A. 6 个　　B. 7 个　　C. 8 个　　D. 9 个

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com