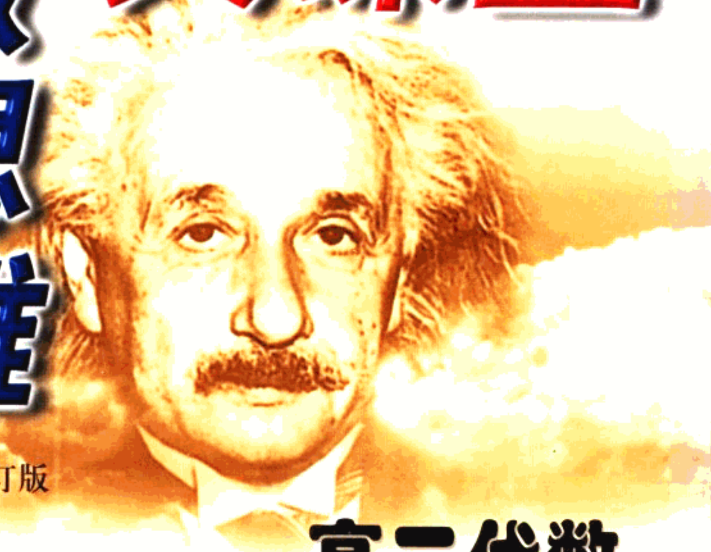
同步最新教材　导引思维发散
点燃智慧火花　培养创新能力

丛书主编　希扬

发散思维大课堂



第二次修订版

高二代数

本书主编　源　流

高要求　新角度　大视野　广思路

龍門書局

发散思维大课堂

（第二次修订版）

高二代数

源流 主编

源 流 陈明铸 陈民胜 编著
齐 健 叶畋田 郭晓红

龍 門 書 局

2001

发散思维大课堂(第二次修订版)

高二代数

源　流　主编

责任编辑　张启男　张明学

龍門書局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国人民解放军第1201工厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

1999年6月第一版　开本：850×1168 1/32

2001年6月第二次修订版　印张：15 1/2

2001年9月第十三次印刷　字数：486 000

印数：234 001—244 000

ISBN 7-80111-638-0/G·553

定价：16.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

开启思维宝库　提高创新能力

——《发散思维大课堂》第二次修订版序

《发散思维大课堂》第二次修订版，将以更加崭新、完美、准确、适用的姿态呈现于读者面前，其特点表现在：

其一，在原修订版丛书的基础上，第二次修订版增加了题组评论、创造巧解、高考样题分析等栏目及与现行教材同步的最新内容，同时，增加了2000年高考后的新动态、新信息，删除了一些陈旧、过时的内容和题型，使其更加贴近教学与高考要求。

其二，原版丛书根据统编教材编写，第二次修订版则根据十省、市教材增编了初一、初二、高一、高二的最新试用修订版教材内容，使大课堂双轨化与完美化，更加适应广大读者的要求。

其三，第二次修订版对上版的部分内容作了调整，对全部例题、习题进行了检查演算，使其更加准确、合理；对训练题的设计更新、更精当，突出了“知识转化能力”的特色，高三突出了3+X的高考特点，强化了知识应用与创新能力的培养。

阅读《发散思维大课堂》第二次修订版，将更加拓展你的视野，塑造你的慧心与灵气。他会引导你多向思维，将知识由课内“发散”到课外，由死知识“发散”为活知识；它将提高你的逻辑思维和形象思维能力，培养出自觉探索知识的兴趣，从而挖掘出你的智慧和潜能。

希　扬

2001年3月

《发散思维大课堂》丛书

编委会

启动发散思维　挖掘深层智能

——《发散思维大课堂》序

《发散思维大课堂》是我们奉献给广大读者的涵盖中学主要课程且与现行教材同步的素质教育辅导丛书。培养和造就无数有慧心、有灵气、会学习、能创新的人才，是我们教育和出版工作者的神圣使命；而引导中学生学会科学思维的方法，借以挖掘自身潜能，提高学习质量、效率和整体素质，是我们研究的重大课题。

思维是人类特有的一种脑力活动。孔子说"学而不思则罔"。"罔"即迷惑而无所得。意思是说，只读书而不思考，就等于没有读书。哲学家哥德也曾风趣地说："经验丰富的人读书用两只眼睛。一只眼睛看到纸面上的话，另一只眼睛看到纸背面的话。""纸背面的话"就是指思维，指要思要想，要多思多想。这些至理名言深刻地揭示了思维与学习的辩证关系。

发散思维，即求异思维。它包括横向思维、逆向思维及多向思维。它要求你放开眼界，对已知信息进行分析、综合，并科学加工，从而收到"一个信息输入，多个信息产出"的功效。它的特色，表现在思维活动的多向性；它的功能，表现为可以开启心扉，震撼心灵，挖掘深层信息，架设起由已知，经可知，达未知的桥梁，创造出新的思路和解法；它的操作，要求从一点出发，向四周辐射，"心骛八极，思接千载"，从而编织起信息网络，达到思维的预想目标。

近年来，笔者发现一些具有远见卓识的学者、教师、出版家，已将"发散思维"引入中学课堂，取得可喜成果。师生们称赞说，运用发散思维"进行思维与灵魂的对话"，使我们深深体味到了"纸上得来终觉浅，心中悟出方知深"的真谛；不仅开阔了视野，而且取得了举一反三、触类旁通的效果。

鉴于发散思维的良好效应，我们特邀了对这方面有建树的老师，将这种创新思维运用到语文、英语、数学、物理、化学等教学之中，并精心设计出学生易于接受的独具特色的这套素质教育丛书。

这套丛书具有显著的四大特点，每一个特点都体现创新意识。

1. 高标准　指在如林的教辅读物中，它博采众家之长，自成体系。它不仅传播知识信息，更着意进行科学思维与方法的点拨，能促使学生学会思考，学会分析，学会应用。

2. 新角度　指它在中学主要课程中对教材的处理和试题的设计运用了发散思维，对重点难点的点拨与导练，呈现出新的模式和跨越，蕴涵着对学生智能的深层开发。

3. 大视野　指丛书眼界开阔，立足课内，向课外拓展，知识面宽，信息量大，涵盖率高；且以人才开发为动力，坚持“一切为了学生，为了一切学生”的原则；体现了智力开发的针对性与具体操作的实用性。

4. 广思路　指引导学生从多角度思考和切入问题，并向纵深发展。它不仅探索了多种信息的深邃内涵，也着力探索了信息的广阔外延；力图培养与规范学生驾驭信息的能力，激发他们去寻找自己新的增长点。

好书凭借力，送君上青云。古人说，“君子爱人，必教之以其方”。这套丛书会教你：“博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃学之。”尤其能助你学会思考！

寸有所长，尺有所短。发散思维教学毕竟是近年来在教学百花园中出现的新事物，目前尚难尽善尽美。万望朋友们不吝赐教。

希　扬

2001 年 5 月

前　言

发散思维即求异思维，它从一点出发沿着多方向达到思维目标。用图表示，它就是从一点出发向知识网络空间发出的一束射线，使之与两个或多个知识点之间形成联系。它包含横向思维、逆向思维及多向思维。发散思维具有多向性、变通性、流畅性、独特性的特点，即思考问题时注重多思路、多方案，解决问题时注重多途径、多方式。它对同一个问题，从不同的方向、不同的侧面、不同的层次，横向拓展，逆向深入，采用探索、转化、变换、迁移、构造、变形、组合、分解等手法，开启学生心扉，激发学生潜能，提高学生素质，这对造就创造性人才至关重要。

本套丛书力求贴近整个教学环节，立足于培养学生的创造思维能力，增强学生思维的灵活性、拓展性，以便提高学生解决实际问题的能力。为此，我们紧密联系学生学习实际，全面深入反映近年来特别是2000年的全国高考、各省市中考的试题。紧扣教学大纲和现行教材，从初一到高二，按现行教材同步到每个章节或单元。高三作为高考总复习，综合了高中三个年级的内容，以"决胜高考"的形式推出。初一至高二每章(或每单元)均由以下六个部分组成。

基本目标要求　使学生会运用目标管理的方法，掌握学习重点和方向，做到有的放矢，学习每章(或每单元)可达到预期的学习目的和效果。

基础知识导引　高度概括每章(或每单元)的内在知识体系，精辟分析高、中考的知识点。

重点难点点拨　以画龙点睛之笔突出重点、难点，以此作为展开发散思维的主线。

发散思维导练　是本套丛书的主体结构，它分为以下两部分：

发散思维分析　从知识点、重点、难点出发，分析本章(或本单元)的知识内容、相互关系，并运用发散思维方法揭示思维规律，突出解题规律，以达到融会贯通的目的。

发散思维应用　精选典型例题，通过重点问题的多角度、多侧面、多层次的发散思维，透析、培养学生概念辨析、综合概括、转化变换、思维迁移、逆向运用、实验设计、书写表达、多解多变的全方位能力。

巩固基础训练　提高能力测试　可以帮助学生借此检验课堂学习效果;同时家长可借此考查学生对课本各章节知识的掌握程度。

为了紧扣高考,配合普通高考向 3 + X 大综合高考过渡,在每册书后附 2000 年 3 + X 高考综合试题,并在正文中增设了题组评论、高考样题分析、创造巧解等栏目内容,另附三套"发散思维综合能力测试题",以供学生针对高、中考题型进行综合训练。为配合二省一市教材在全国的推广使用,本套丛书根据教材改革精神及时调整、增编了高一、高二数学、物理、化学、英语、语文(通用)等学科试验修订版本。并配有高三总复习内容,每章(或单元)由**考点精析　三基导引　范例研展　反馈测试**等栏目组成。

本书用到如下各种发散思维:

题型发散　是将典型问题,变换其题型的一种发散思维。

解法发散　是通过一题多法、多题一法进行变通训练的发散思维。

纵横发散　是通过两个或多个发散点间的联系以及发散点与其它知识点间的联系,借助例题形成发散思维。

转化发散　是通过保持原命题的实质而变换其形式的发散思维。

组合发散　将多个发散点组合起来形成的一种发散思维。

迁移发散　是用信息迁移或方法迁移解决新情景问题的一种发散思维。

分解发散　是把一个复杂命题分解成一些单纯命题,并逐个加以分析和解决的发散思维。

逆向发散　是由目标至条件的定向思考的一种发散思维。

创造发散　是克服思维定势,不按常规思维解决问题的一种发散思维。

综合发散　是通过教材各章发散点之间的联系,一个学科与其它学科之间的联系综合思考的一种发散思维。

总之,本套丛书由浅入深,精析多练,学练结合,阶梯训练,逐步提高,并揭示中、高考的测试规律,使学生的复习与应试实际更贴近,从而提高学生灵活运用知识,增强迁移应变能力和创造性思维能力。

由于本套丛书编写时间紧迫和编者水平所限,不妥之处,祈望读者不吝赐教。

源　流

2001 年 5 月

目　录

第五章　不　等　式

基本目标要求

一、掌握不等式的性质和几种常用的证明方法，并能运用有关的性质、定理和方法解决一些问题.

二、在熟练掌握一元一次不等式(组)、一元二次不等式解法的基础上，掌握分式不等式、无理不等式、指数与对数不等式、绝对值不等式的解法.

三、会用不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$解决一些简单的问题.

基础知识导引

一、不等式的概念及性质

1. 两个实数a与b之间的大小关系：
$$\begin{cases}(1)\ a-b>0\Leftrightarrow a>b;\\(2)\ a-b=0\Leftrightarrow a=b;\\(3)\ a-b<0\Leftrightarrow a<b.\end{cases}$$

若a、$b\in R^{+}$，则
$$\begin{cases}(4)\ \dfrac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b;\\(5)\ \dfrac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b;\\(6)\ \dfrac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b.\end{cases}$$

2. 不等式的定义：

(1) 用不等号($<,>,\leqslant,\geqslant,\neq$)表示不等关系的式子叫做不等式，记作$f(x)>g(x)$，$f(x)\leqslant g(x)$等等，用“$<$”或“$>$”号连结的不等式，叫做严格不等式；用“$\leqslant$”或“$\geqslant$”号连结的不等式，叫做非严格不等式.

(2) 设$f(x)$和$g(x)$的共同定义域为M，不等式$f(x)>g(x)$的解集为N，当$M=N$时，这个不等式叫做绝对不等式；当$M\supset N$时，叫做条件不等式；当$N=\varnothing$时，叫做矛盾不等式.

(3) 如果不等式两边的解析式都是代数式,那么这个不等式叫做代数不等式;如果不等式两边的解析式中至少有一个是超越式,那么这个不等式叫做超越不等式(指数不等式、对数不等式和三角不等式都是超越不等式).

代数不等式又可分为有理不等式和无理不等式,有理不等式包括整式不等式和分式不等式,无理不等式也叫做根式不等式.

3. 不等式的性质:

(1) 对称性:$a>b\Leftrightarrow b<a$.

(2) 传递性:$a>b,b>c\Leftrightarrow a>c$.

(3) 加法单调性:$a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

(4) 移项法则:$a+b>c\Rightarrow a>c-b$.

(5) 同向不等式相加:$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(6) 异向不等式相减:$a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$.

(7) 乘法单调性:$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

(8) 同向正值不等式相乘:$a>b>0$, $c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(9) 正值不等式两边可以同时取 n 次幂:$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N})$.

(10) 正值不等式两边可以同时取 n 次算术根:

$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

(11) 正值不等式两边取倒数:$a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(12) 正值异向不等式可以相除:$a>b>0$, $0<c<d\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

4. 含有绝对值的不等式的性质:

(1) $|a|\geqslant a$;$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$

(2) 如果 $a>0$,那么

$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$;

$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

(3) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

(4) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq0)$.

(5) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

(6) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

(7) $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

二、解不等式

1. 解不等式问题一般分作九类：

(1) 解一元一次不等式；(2) 解一元二次不等式；

(3) 解一元高次不等式；(4) 解分式不等式；

(5) 解无理不等式；　(6) 解指数不等式；

(7) 解对数不等式；　(8) 解带绝对值的不等式；

(9) 解不等式组.

2. 解不等式时应特别注意下列几点：

(1) 正确应用不等式的基本性质；

(2) 正确应用幂函数、指数函数和对数函数的单调性；

(3) 注意代数式中未知数的取值范围.

3. 不等式的同解性：

(1) $f(x)\cdot g(x)>0$ 与 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 同解.

(2) $f(x)\cdot g(x)<0$ 与 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$ 同解.

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 与 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 同解.

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 与 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$ 同解.

(5) $|f(x)|<g(x)$ 与 $-g(x)<f(x)<g(x)$ 同解.

(6) $|f(x)|>g(x)$ ①与 $f(x)>g(x)$，或 $f(x)<-g(x)$ (其中 $g(x)\geqslant 0$)同解；②与 $g(x)<0$ 同解.

(7) $\sqrt{f(x)}>g(x)$ 与 $\begin{cases}f(x)>[g(x)]^2\\g(x)\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\g(x)<0\end{cases}$ 同解.

(8) $\sqrt{f(x)}<g(x)$ 与 $\begin{cases}f(x)<[g(x)]^2\\g(x)>0\\f(x)\geqslant 0\end{cases}$ 同解.

(9) 当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ 与 $f(x)>g(x)$ 同解，当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ 与 $f(x)<g(x)$ 同解.

(10) 当 $a>1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)$ 与 $\begin{cases}f(x)>g(x)\\g(x)>0\end{cases}$ 同解.

当$0<a<1$时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)$与$\begin{cases}f(x)<g(x)\\f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$同解.

重点难点点拨

本章重点是解不等式(组)和不等式的证明.本章难点是将各类不等式通过同解变形转化为有理不等式求解;均值不等式使用的条件及等号成立的条件;用讨论的方法解含有参数的不等式.为了掌握重点、难点,必须注意以下问题.

一、解不等式(见表5-1)

表5-1

类型			解集	
一元一次不等式 $ax>b$			$a>0$	$\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$
			$a<0$	$\left(-\infty,\frac{b}{a}\right)$
			$a=0$，$b\geqslant0$	$\varnothing$
			$a=0$，$b<0$	**R**
一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 其中 $\Delta=b^2-4ac$，x_1,x_2是方程的两个根，且$x_2<x_1$	$a>0$	$\Delta>0$	$(-\infty,x_2)\cup(x_1,+\infty)$	
	$a>0$	$\Delta=0$	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$	
	$a>0$	$\Delta<0$	**R**	
	$a<0$	$\Delta>0$	(x_2,x_1)	
	$a<0$	$\Delta=0$	$\varnothing$	
	$a<0$	$\Delta<0$	$\varnothing$	
一元一次不等式组 $(\alpha<\beta)$		$\begin{cases}x>\alpha\\x>\beta\end{cases}$	$(\beta,+\infty)$	
		$\begin{cases}x<\alpha\\x<\beta\end{cases}$	$(-\infty,\alpha)$	
		$\begin{cases}x>\alpha\\x<\beta\end{cases}$	(α,β)	
		$\begin{cases}x<\alpha\\x>\beta\end{cases}$	$\varnothing$	

续表

类 型		解 集
含有绝对值符号的不等式	$\|x\|>a$	$a>0$,解集$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$;$a=0$,解集$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;$a<0$,解集$\mathbf{R}$
	$\|x\|<a$	$a>0$,解集$(-a,a)$;$a=0$,$\varnothing$;$a<0$,$\varnothing$
高次不等式	$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n>0$ $(a_n\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N},a_0>0)$	可以化为 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0$ (其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$)的形式来求解,一般先在数轴上标区间$(-\infty,x_1)$,(x_1,x_2),$\cdots$,$(x_n,+\infty)$,由于 $f(x)$的值在上述区间自右至左依次为$+$,$-$,$+$,$-$,$\cdots$,正值区间为 $f(x)>0$

二、证明不等式的方法

1. 证明不等式时,常用的已知不等式

(1) $(a-b)^2\geqslant 0\quad(a,b\in\mathbf{R})$; $a^2+b^2\geqslant 2ab\quad(a,b\in\mathbf{R})$;

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\quad(ab>0)$.

(2) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.$(a>0,b>0)$

(即平均方根不小于算术平均数,算术平均数不小于几何平均数,几何平均数不小于调和平均数).

(3) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ $(a,b,c\in\mathbf{R}^+$,当且仅当 $a=b=c$ 时取等号).

(4) $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ $(a,b,c\in\mathbf{R}^+$,当且仅当 $a=b=c$ 时取等号).

(5) $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}(n>0)$, $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}\quad(n\in\mathbf{N},n>2)$.

(6) $a>b>c,c>0\Rightarrow\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$; $0<a<b,c>0\Rightarrow\frac{b}{a}>\frac{b+c}{a+c}$.

*(7) $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ $(a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

特别要注意已知不等式的灵活变形.

如 $a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow(a+b)^2\geqslant 4ab$，若 $a+b=1$，得 $1\geqslant 4ab$，即 $ab\leqslant\frac{1}{4}$.

2. 不等式的证法

(1) 比较法：

① 比差法：要证不等式 $f(x)>g(x)$（或 $f(x)<g(x)$），只需证 $f(x)-g(x)>0$（或 $f(x)-g(x)<0$）即可.

② 比商法：当 $g(x)>0$，欲证 $f(x)>g(x)$，只须证 $f(x)/g(x)>1$ 即可；反之，欲证 $f(x)<g(x)$，只须证 $f(x)/g(x)<1$.

(2) 综合法（即顺证法）：从题设或一个已知能够成立的不等式或定理出发，逐步推出结论成立.

(3) 分析法（即逆推法）：从结论出发，执果索因，推到与已知条件、某个定理相符合或显然成立，但应注意每步推理的可逆性.

(4) 放缩法：利用不等式的传递性，欲证 $A\leqslant B$，若知 $A\leqslant C$，只需证 $C\leqslant B$ 即可.

注意 应用此法时应注意放大或缩小不等式的范围，用舍掉一些正（负）项而使不等式各项之和变小（大），或在分式放大或缩小分式的分子、分母等方法达到其目的.

(5) 公式法：根据不等式的性质及有关公式证明不等式.

(6) 判别式法：有理分式函数去分母整理成关于 x 的二次方程，利用判别式求函数的值域达到证明不等式的目的.

(7) 反证法：否定结论，推出矛盾，从而肯定结论.

(8) 函数法（利用二次函数、三角函数、函数单调性）.

(9) 变量代换法（换元法）.

*(10) 数学归纳法：当不等式是关于自然数命题时，常用数学归纳法证明.

*(11) 用逆推法证数列不等式.

3. 不等式的应用

(1) 利用不等式比较大小.

(2) 利用不等式讨论算术根和绝对值.

(3) 利用不等式求函数定义域.

(4) 利用不等式判断一元二次方程根的情况.

(5) 利用不等式研究二次函数性质.