新教材　新思维

丛书主编　吴万用

知识点与能力训练手册

高中数学

主编　马岩峰　杜晓彦

大连理工大学出版社

新教材 新思维

知识点与能力训练手册

高中数学

主　编　马岩峰　杜晓彦

副主编　刘　宇　张俊松

编者　马岩峰　刘　宇　黄　岩　张雅丽　王舒娟　周兆南
程　林　杜晓彦　刘菁华　李宏生　李凯峰　郭　威
吕　柱　申玉明　张计祥　孟昭侠　庞宏全　臧学志
郭伟敏　张　清

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学知识点与能力训练手册 / 马岩峰，杜晓彦主编．— 7版．
大连 ：大连理工大学出版社，2005.6
ISBN 7-5611-1626-8

Ⅰ．高… Ⅱ．①马… ②杜… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 05915 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市凌水河 邮政编码：116024
电话：0411-84708842 传真：0411-84701466 邮购：0411-84707961
E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn
大连华伟印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm 印张：22.75 字数：716千字
1999年6月第1版 2005年6月第7版
2005年6月第10次印刷

责任编辑：郭继涛 责任校对：白金华
封面设计：丰 收

定 价：25.00元

• Qian yan

·前言

本丛书自1999年出版以来，深受广大中学生读者的喜爱，已经成为他们的良师益友。究其原因是编写此丛书的指导思想与课程改革的指导思想同出一辙：充分体现知识学习与能力培养的高度统一，力求在解决问题的思路、方法和技能上给学生以指导，培养学科悟性和创造性思维能力。

新课程标准要求学生能够运用已学知识解决实际问题，这不是一朝一夕可以练就的。但如何才能在尽可能短的时间内提高这种能力，是广大师生、家长们共同关心的问题。这套书正是针对于此为大家提供了可操作且卓有成效的方法和途径。

这次修订主要突出了以下三点：

第一，知识点剖析中增加了拓展的内容。将规律、定理、定律内容的外延拓展，并对其应用进行了深入分析。

第二，与现实生活结合得更加密切。书中提供了许多具体的情境，有意识地训练学生综合运用知识、解决实际问题的能力。

第三，精心筛选和设计强化训练，并在强化训练中增加了易错易混的分析内容。

本丛书分初中和高中两个系列，初中包括数学、物理、化学三个学科，高中包括数学、语文、英语、物理、化学五个学科。其中数学、物理、化学三个分册均分为概念篇、规律篇、实验篇和综合篇。

各篇栏目设有**知识点剖析、品牌题解析和品牌题训练**。

知识点剖析：对所列概念和知识点既注重内在本质的阐释，又注重相关知识间联系与区别的归纳，并对重难点给以深入解析，以便使

学生对本部分内容有一个清晰的认识，形成较强的学科认知能力。

品牌题解析：概念篇、规律篇及综合应用篇均设置了此栏目，但各有所侧重，内容均有所不同。概念篇中的知识点应用包括考纲要求和典型题例析，侧重于结合考纲的基本要求，选择最基础的典型例题进行讲解；规律篇中的知识点应用包括命题方向分析和典型题例析，注重对命题方向的分析，从知识的规律性方面将其联系起来，选择相应的典型例题予以精析；综合应用篇中的知识点应用包括高（中）考热点分析和综合题型例析，侧重把握高（中）考中综合能力检测的热点，强调学科内或学科之间知识的融会贯通，通过相应试题提高学生运用所学知识解决具体问题的综合能力。

品牌题训练：各篇均设置了此栏目，针对各篇的不同要求，从不同层次、不同角度给出相应的训练题，使学生在解题思路、解题技巧方面能有一个立体交叉式的综合提高。

同学们，本套丛书符合新的课程标准，以科学的脉络将高（初）中的知识重点串联起来，做到了知识点与实际能力训练相结合，扎实的基本功与必要的应试训练相结合。只要从开始使用这本书，就会在不知不觉中发现你的视野在扩大，你的能力在增强，你的水平在提高。

有计划地使用本书，持之以恒，金榜题名大有希望。

·目录

•Mu lu

概念篇

规律篇

综　合　篇

概念篇

GAI NIAN PIAN

第一章 集合与简易逻辑

一、集合

知识点剖析

1 集合

集合是一个不定义的概念或原始概念。对集合，我们只能作描述性说明：一组对象的全体形成一个集合（有时也简称集）。集合里的各个对象叫做这个集合的元素。

例如小于5的自然数就形成一个集合，其中1，2，3，4都是这个集合的元素。

集合常用大写字母$A,B,C\cdots$表示，元素常用小写字母$a,b,c\cdots$表示。

2 集合具有以下特征

(1)确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象或者是这个集合中的元素，或者不是它中的元素。这是集合的最基本特征。

(2)互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的（即互不相同的），相同的对象归入任何一个集合时，只能算做这个集合的一个元素。

(3)无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，也就是说由a,b两个元素组成的集合与由b,a两个元素组成的集合是相同的。

■ **说明** 当集合中的元素可以用省略符号表示时，必须强调顺序，例如：

集合$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

集合$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$等。

3 空集

不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$。

4 属于

如果a是集合A的一个元素，就说a属于集合A，记作$a\in A$；如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，记作$a\notin A$（或$a\bar{\in}A$）。根据空集的定义，对任何元素a都有$a\notin\varnothing$。

5 集合的表示法

集合常用的表示法有列举法、描述法与图形法。

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫列举法，例如$A=\{$指南针，造纸，火药，印刷$\}$。

把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做描述法，它的一般形式为$\{x\mid p(x)\}$，符号前面的x表示集合中元素的一般形式，而后面的$p(x)$表示集合元素x的公共属性，例如：$A=\{n\mid n\in\mathbf{Z},n<8\}$。在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可省去竖线及左边的部分，例如由所有圆组成的集合，可表示为$\{$圆$\}$。

■ **说明** ①列举法可以看清集合的元素，描述法可以看清集合元素的特征。

②两种表示法里的“{}”都有“全体”“集合”的含义，

因此，{全体整数}中的“全体”二字是多余的，应改为{整数}。

③除了用列举法和描述法来表示集合，还可以利用图形来表示集合，也可以通过集合的运算来表示集合，例如 $A=\{1,2\}\cup\{2,3\}$。

6 子集

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)。即任意一个 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则 $A\subseteq B$，用文氏图表示 $A\subseteq B$，如图 1-1 所示。

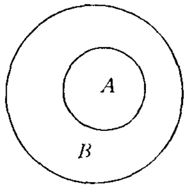


图 1-1

通常用 **N**，**Z**，**Q**，**R**，**C** 表示自然数集，整数集，有理数集，实数集，复数集，则有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$。

■ **说明**　①“$\in$”和“$\subseteq$”有重要的区别。“$\in$”(属于)是不定义的，体现元素与集合间的关系，例如 $a\in A$，其中 a 为集合 A 中的元素(尽管 a 本身也可能是一个集合)；而“$\subseteq$”(包含)体现集合与集合间的关系，是通过“$\in$”定义的，例如$\{a,b\}\subseteq\{a,b,c\}$。

②$\varnothing$是任何集合的子集，设 A 为任一集合，则$\varnothing\subseteq A$。

③任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$

④$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

7 真子集

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$)。即任意一个 $a\in A\Rightarrow a\in B$ 且存在 $b\in B$ 且 $b\notin A$，则 $A\subsetneqq B$。例：$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$；设 A 为非空集合，则$\varnothing\subsetneqq A$；若 $A\subsetneqq B$，且 $B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$。

8 集合相等

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说这两个集合相等。即如果任意一个 $a\in A\Rightarrow a\in B$；任意一个 $x\in B\Rightarrow x\in A$，则 $A=B$。例如同解方程与同解不等式，其实质就是集合相等。

9 交集

设有 A，B 两个集合，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A，B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。也就是说，A 与 B 的交集是由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合。由交集定义可以推出以下几条性质：

(1)$A\cap A=A$；

(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(3)$A\cap B=B\cap A$。

其证明如下：

(1)$A\cap A=\{x|x\in A$ 且 $x\in A\}$

$=\{x|x\in A\}=A$

(2)因 $A\cap\varnothing\subseteq\varnothing$(引用 $A\cap B\subseteq B$)

$\varnothing\subseteq A\cap\varnothing$(空集为任何集合的子集)

故 $A\cap\varnothing=\varnothing$(集合相等的定义)

(3)$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}=\{x|x\in B$ 且 $x\in A\}=B\cap A$

10 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A，B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$。对于并集，要注意其中“或”的意义，用它连接的并列成分间不一定是互相排斥的，“$x\in A$ 或 $x\in B$”这一条件，包括下列三种情况：$x\in A$ 但 $x\notin B$；$x\in B$ 但 $x\notin A$；$x\in A$ 且 $x\in B$(很明显，适合第三种情况的元素 x 构成的集合就是 $A\cap B$，它不一定是空集)。还要注意，A 与 B 的公共元素在 $A\cup B$ 中只出现一次，因此，$A\cup B$ 是由所有至少属于 A，B 两者之一的元素组成的集合。

联系交集、子集和并集的定义有

$A\cap B\subseteq A$(或 B)$\subseteq A\cup B$

由并集定义可以推出以下性质：

(1)$A\cup A=A$

(2)$A\cup\varnothing=A$

(3)$A\cup B=B\cup A$

11 补集

补集是相对于全集而言的。全集是相对于所研究的问题而言的一个相对概念，它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素，因此全集因研究问题而异，记作 U。例如研究数集时，常常把实数集 **R** 作为全集。在立体几何中，三维空间是全集，这时，平面是全集的一个子集。而在平面几何中，整个平面是全集。

补集：已知全集 U，集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 U 中的补集，记作 C_UA，即

$C_UA=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$如图 1-2 所示。

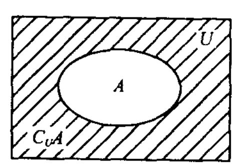


图 1-2

补集可以这样解释，如果从全集 U 中取出集合 A 的全部元素，则所有剩余下来的元素组成的集合就是 C_UA，由此，我们很容易想起“差”的概念，事实上，补集 C_UA 就是全集 U 与集合 A 的差集(如图 1-2)。

由补集定义可推出以下简单性质：

(1)$A\cup C_UA=U$

(2)$A\cap C_UA=\varnothing$

(3)$C_U(C_UA)=A$

12 不等式的几个基本性质

(1)如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$

(2)如果 $a>b,c>0$，那么 $ac>bc$

(3)如果 $a>b,c<0$，那么 $ac<bc$

以上不等式的基本性质是解不等式的基础。

13 $|x|<a,|x|>a$ 型的不等式(其中 $a\in\mathbf{R}$)

(1)$|x|<a$ 型($a\in\mathbf{R}$)

①当 $a>0$ 时，由绝对值意义可知它等价于一个一元一次不等式组，即 $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$

②当 $a\leqslant 0$ 时，$|x|<a$ 无解，而此时，不等式 $-a<x<a(a\leqslant 0)$ 也无解(因 $a>-a$，而 $a<0$，故无解)。

由①②可知：$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$ 恒成立，其中 $a\in\mathbf{R}$。

(2)$|x|>a$ 型($a\in\mathbf{R}$)

同理，$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$，其中 $a\in\mathbf{R}$。其证明如下：

①当 $a>0$ 时，$|x|>a$，由绝对值意义可知 $|x|>a\Leftarrow\Rightarrow x>a$ 或 $x<-a$。

②当 $a<0$ 时，$|x|>a$ 的解集为 $\mathbf{R}$，而此时，$x>a$ 或 $x<-a$ 的并集也为 $\mathbf{R}$。如图 1-3。

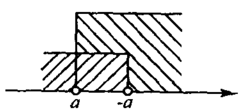


图 1-3

③当 $a=0$ 时，$|x|>a$，即 $|x|>0$，$\therefore x\neq 0$。

而此时，$x>a$ 或 $x<-a$，即 $x>0$ 或 $x<0$，即 $x\neq 0$。

综上所述，$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$，其中 $a\in\mathbf{R}$。

一般地，不等式 $|x|<a$ 的解集是 $\{x|-a<x<a\}$；不等式 $|x|>a$ 的解集是 $\{x|x>a$ 或 $x<-a\}$，其中 $a\in\mathbf{R}$。

14 $|ax+b|<c,|ax+b|>c$ 型不等式($c\in\mathbf{R}$)

把 $ax+b$ 看成一个整体时，可化为 $|x|<c,|x|>c$ 型不等式来解。

一般地，不等式 $|ax+b|<c$ 的解集是 $\{x|-c<ax+b<c\}$，据此，再求原不等式的解集；不等式 $|ax+b|>c$ 的解集是 $\{x|ax+b>c$ 或 $ax+b<-c\}$，据此再求原不等式的解集(其中 $c\in\mathbf{R}$)。

15 一元二次不等式

含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式，它的一般形式是 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$，其中 ax^2+bx+c 是实数域上的二次三项式。

16 一元二次不等式的解法

(1)当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，二次三项式 ax^2+bx+c 有两个实根 x_1,x_2，那么 ax^2+bx+c 总可以分解为：$a(x-x_1)(x-x_2)$。这样，解一元二次不等式就可归结为解两个一元一次不等式组。一元二次不等式的解集就是这两个一元一次不等式组解集的并集。

(2)当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，ax^2+bx+c 总可以写成 $a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$，而 $[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$ 永远为正值，所以二次三项式 ax^2+bx+c 的值的正负号取决于二次项系数 a，如果 $a>0$，那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是实数集 $\mathbf{R}$，如果 $a<0$，那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 无解，它的解集是空集。

利用二次函数的图象，也可以求得一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 $ax^2+bx+c<0$)的解集(其中 $a>0$)，其解集情况讨论如下：

①如果 $\Delta>0$，此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点(如图 1-4)，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$。那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|x_1<x<x_2\}$。

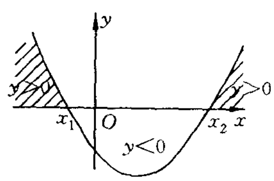


图 1-4

②如果 $\Delta=0$，此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个交点(图 1-5)，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等实根 $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$，那么，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<\frac{-b}{2a}$ 或 $x>\frac{-b}{2a}\}$，也即 $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{-b}{2a}\}$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集 $\varnothing$。

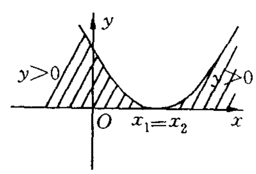


图 1-5

③如果 $\Delta<0$ 时，此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点(如图 1-6)即方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根，那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集 $\varnothing$。

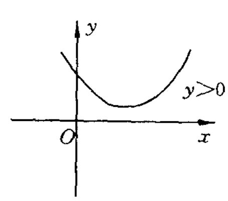


图 1-6

二次项系数为负的不等式可先化为二次项系数为

正的不等式，再求它的解集。

品牌题解析

（一）基础题（判断题）

1. 与1非常接近的全体实数构成一个集合。（×）

2. 很著名的科学家的全体。（×）

在1，2中的“非常接近”及“很著名”皆不满足集合的确定性这一性质，即任给一个元素都难判断其是否在此描述的对象中。

3. 某班的全体女同学构成一个集合。（√）

4. 某班视力较差的学生。（×）

应注意3与4的重要区别在于限定词是否起到了作用，虽然皆有“某”这一限定词，但在4中再一次出现了“较差”这一“含糊”词。

5. $M=\{1,2\}$与$N=\{2,1\}$表示同一个集合。（√）

6. $M=\{(1,2)\}$与$N=\{(2,1)\}$表示同一个集合。（×）

5正确是因为集合具有无序性，而5与6的重要区别在于集合中元素的类别不同，即5表示的为数集而6表示的为点集。

7. $a\in\{a,b\}$及$\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$关系判断都正确。（√）

8. $\{a\}\subseteq\{\{a\},\{b\}\}$。（×）

应注意的是关系的相对性。（参照物）

9. 设$A=\{a,b\}$且$B=\{x|x\subseteq A\}$，则$A\subseteq B$。（×）

应为$A\in B$。

10. 若$\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$，则满足条件的集合$A$的个数为7个。（√）

做此题前首先应明确含有n个元素的集合其子集的个数为2^n个，其真子集及非空真子集的个数分别为2^n-1、2^n-2个，再次应了解“$\subseteq$”与“$\leqslant$”、“$\subsetneqq$”与“$<$”的辨证统一关系，因此A集合的个数与$\{c,d,e\}$真子集的个数相同，即$2^3-1=7$个。

11. 空集没有子集。（×）

12. 空集是任何集合的真子集。（×）

13. 任何集合必有两个或两个以上的子集。（×）

14. 用列举法表示集合时，只能表示有限集而不能表示无限集。（×）

11，12，13皆可取$\varnothing$作反例，因为$\varnothing\subseteq\varnothing$，所以11错；空集为任何集合的子集且又为任何非空集合的真子集，故12，13错；所有圆所构成的集合{圆}为无限集，但其却是用列举法表示的集合，故14错。

（二）高考题

【例1】 2001年北京市春招试题 集合$M=\{1,2,3,4,5\}$的子集个数是（　　）。

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

解　含有n个元素的子集个数为2^n个，故选A。

【例2】 1999年上海市高考试题 设集合$A=\{x||x-a|<2\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{2x-1}{x+2}<1\right.\right\}$。若$A\subseteq B$，求实数$a$的取值范围。

解　由$\dfrac{2x-1}{x+2}<1\Rightarrow\dfrac{2x-1}{x+2}-1<0$

$\Rightarrow\dfrac{2x-1-x-2}{x+2}<0\Rightarrow\dfrac{x-3}{x+2}<0$

$\Rightarrow$

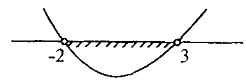


图1-7

$\therefore -2<x<3$

由$|x-a|<2$得$a-2<x<a+2$，又$\because A\subseteq B$

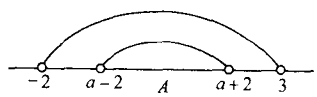


图1-8

$\therefore$ 只须$\begin{cases}a-2\geqslant-2\Rightarrow a\geqslant0\\a+2\leqslant3\Rightarrow a\leqslant1\end{cases}$

综上所述，有$0\leqslant a\leqslant1$

■ **说明**　靠集合间的相互关系求解参变量范围的问题的一般求解过程如下：

①谁能具体先表示；

②数形结合找关系；

③列出不等式（依关系）；

④求解不等式。

光标提醒　在解题中我们经常忽略$\varnothing$是任何集合的子集这一十分重要的隐含条件。

备注　求解分式不等式的一般步骤如下：

1)移项；2)通分；3)整理；4)分解因式；5)拟数轴标根（对照本题）。1)使不等式的一端为零；3)使分子分母的最高次项均变为正数；5)方法$\begin{cases}\text{从右向左}\\\text{从上到下}\end{cases}$特别注意开与闭。

（三）备考题例

【例1】 已知$U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x>2+\sqrt{3}\}$，$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，则（　　）。

A. $a\subseteq A$　B. $\{a\}\in A$　C. $a\in C_UA$　D. $a\in A$

解　$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，$\therefore a\notin A\Leftrightarrow\{a\}\nsubseteq A\Leftrightarrow a\in C_UA$，故选C。

【例2】 2004年山西高考题 设A、B、I均为非空

集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是（　　）。

A. $(C_IA)\cup B=I$　　B. $(C_IA)\cup(C_IB)=I$

C. $A\cap(C_IB)=\varnothing$　　D. $(C_IA)\cap(C_IB)=C_IB$

分析　本题考查学生对集合之间关系的掌握情况。

解　画出文氏图，利用图形逐一判断，可知 B 错误，故正确答案为 B。

【例 3】　2004 年北京高考题　设全集是实数集 $\mathbf{R}$，$M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{x\mid x<1\}$，则 $C_{\mathbf{R}}M\cap N$ 等于（　　）。

A. $\{x\mid x<-2\}$　　B. $\{x\mid -2<x<1\}$

C. $\{x\mid x<1\}$　　D. $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$

分析　本题考查不等式及交集与补集的概念。

解　$C_{\mathbf{R}}M\cap N=\{x\mid x>2$ 或 $x<-2\}\cap\{x\mid x<1\}=\{x\mid x<-2\}$。故正确答案为 A。

【例 4】　2004 年全国高考题　设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

分析　本题考查圆锥曲线与集合的基本知识。

解　易知集合 M 表示的是圆 $x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R}$，集合 N 表示的是抛物线 $y=x^2,x\in\mathbf{R}$，由图形易知两图像有且只有 2 个交点，即集合 $M\cap N$ 中元素的个数为 2，故正确答案为 B。

品牌题训练

（一）选择题

1. 下列各条件中不能确定一个集合的是（　　）。

A. 充分接近$\sqrt{2}$的实数的全体

B. 某校身高不超过 1.7 m 的全体学生

C. 数轴上到原点的距离不超过一个单位的点的全体

D. 小于 100 的所有质数

2. 方程组$\begin{cases}2x+y+6=0\\x-y+3=0\end{cases}$的解集是（　　）。

A. $\{(-3,0)\}$　　B. $\{-3,0\}$

C. $(-3,0)$　　D. $\{(0,-3)\}$

3. 集合 $A=\{$一条边为 1，一个角为 40° 的等腰三角形$\}$中元素的个数为（　　）。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 无数个

4. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{a\mid a=x+\sqrt{2}y,x,y\in\mathbf{Q}\}$，则下列结论正确的是（　　）。

A. $M\subseteq\mathbf{Q}$　　B. $M\subseteq C_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$

C. $M\supsetneqq\mathbf{Q}$　　D. $M=\mathbf{Q}$

5. 绝对值大于 2 且不大于 5 的最小整数是（　　）。

A. $\varnothing$　　B. 2　　C. -2　　D. -5

6. 不等式 $(x+2)(3-x)>0$ 的解集为（　　）。

A. $\{x\mid x>3$ 或 $x<-2\}$　　B. $\{x\mid -3<x<2\}$

C. $\{x\mid x>2$ 或 $x<-3\}$　　D. $\{x\mid -2<x<3\}$

7. 不论 x 为何值时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 恒为负值的条件为（　　）。

A. $a>0,\Delta>0$　　B. $a>0,\Delta<0$

C. $a<0,\Delta<0$　　D. $a<0,\Delta>0$

8. 若不等式 $5-x>7\mid x+1\mid$ 与不等式 $ax^2-bx-2>0$ 的解集相同，则 a,b 的值分别为（　　）。

A. $a=-8,b=-10$　　B. $a=-1,b=9$

C. $a=-4,b=9$　　D. $a=-1,b=2$

（二）填空题

9. $A=\{(x,y)\mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$，已知 $A\cap B\supseteq\{(1,2)\}$，则 $a=$________，$b=$________。

10. 已知 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则 a 的取值范围为________。

11. 若关于 x 的方程 $x^2+ax+a^2-1=0$ 有一正根一负根，则 a 的取值范围为________。

12. 若三个关于 x 的一元二次方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 中至少有一个方程有实根，则实数 a 的取值范围是________。

参考答案与提示

（一）选择题

1. A　2. A　3. C　4. C　5. D　6. D　7. C　8. C

（二）填空题

9. $-3,7$　10. $a>-4$

11. $-1<a<1$　12. $a\leqslant-\dfrac{3}{2}$ 或 $a\geqslant-1$

提示：

4.（易错题）当 $y=0$ 时集合 $M=Q$，此外当 $y\neq0$ 时集合 M 也包含一部分无理数。

5.（易错题）设此数为 m，依题意则有 $2<\mid m\mid\leqslant5$

8.　$5-x>7\mid x+1\mid$

$$\Rightarrow 7\mid x+1\mid<5-x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5-x>0\\-(5-x)<7(x+1)<5-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5-x>0\\7x+7<5-x\\7x+7>x-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<5\\x<-\dfrac{1}{4}\\x>-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow -2<x<-\frac{1}{4}$$

又∵两不等式的解集相同，故不等式 $ax^2-bx-2>0$ 的解集应为 $\left\{x\middle|-2<x<-\frac{1}{4}\right\}$，故有 $-2,-\frac{1}{4}$ 为二次方程 $ax^2-bx-2=0$ 的两实根且 $a<0$，由韦达定理可知 $\begin{cases}-2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{b}{a}\\-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=9\end{cases}$

9. ∵ $A\cap B\supseteq\{(1,2)\}$，∴ $(1,2)\in A$ 且 $(1,2)\in B$，

∴ $\begin{cases}a-4+b=0\\1-2a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=7\end{cases}$

10. 若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则 A 有两类情形，(1) A 为 $\varnothing$，(2)集合 A 中的元素均为非正数，倘若 $0\in A$，则有 $1=0$，显然不成立，故集合 A 中元素皆为负数。

解法一　(1) A 为 $\varnothing$ 即 $\Delta<0$ 或(2) $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\x_1+x_2<0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}$

解法二　图象法(数形结合法)

即　$f(\text{对})>0$ 或 $\begin{cases}f(\text{对})\leqslant0\\\text{对}<0\\f(0)>0\end{cases}$

其中：$f(x)=x^2+(a+2)x+1$

$$\text{对}=-\frac{a+2}{2}$$

11. **解法一**　$\begin{cases}\Delta>0\\x_1\cdot x_2<0\end{cases}$

解法二　$f(0)<0$

其中 $f(x)=x^2+ax+a^2-1$

12. 设 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ 分别为一元二次方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 的判别式，依题意只须 $\Delta_1\geqslant0$ 或 $\Delta_2\geqslant0$ 或 $\Delta_3\geqslant0$ 即可。

二、简易逻辑

知识点剖析

1 逻辑联结词

(1)命题

初中数学中命题的概念为“判断一件事情的句子”，高中教材中定义为：“可以判断真假的语句”。其实质是一样的。语句是不是命题的关键在于能不能判断其真假，不能判断真假的语句就不是命题。

(2)开语句

有些语句无法确定其真假，如 $x<2$，这种含有变量的语句叫开语句(或条件命题)。

(3)逻辑联结词

“或”、“且”、“非”这些词叫逻辑联结词。记作：“$\vee$”、“$\wedge$”、“$\neg$”。

(4)简单命题

不含逻辑联结词的命题叫做简单命题，记作：$p,q,r,s,\cdots$(小写拉丁字母)。

(5)复合命题

由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题。

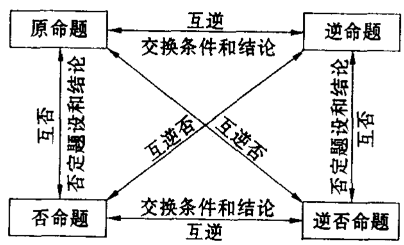
■ **说明**　①构成：“$p\vee q$”，“$p\wedge q$”，“$\neg p$”。

②真值表

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$\neg p$
T	T	T	T	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

2 四种命题

(1)四种命题及关系



■ **说明**　①互逆否的两个命题是等价命题。

原命题 $\xrightleftharpoons{\text{等价于}}$ 逆否命题

逆命题 $\xrightleftharpoons{\text{等价于}}$ 否命题

②当判断一个否定性命题的真假性发生困难时，通常转化为判断它的逆否命题的真假。

(2)反证法

用反证法证明命题的一般步骤如下：

①假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立。

②从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾。

③由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确。

■ **说明**　三种矛盾：

①与原命题条件矛盾；

②与假设结论矛盾；

③与某定理、公理、定义或公式等矛盾。

3 充分条件和必要条件

(1)充要条件

条件 A 与条件 B 的充分性与必要性关系，由定义判

断方法简述如下：

①$A\Rightarrow B$，且$B\not\Rightarrow A$，则A是B的充分非必要条件。

②$A\not\Rightarrow$，B且$B\Rightarrow A$，则A是B的必要非充分条件。

③$A\Leftrightarrow B$，则A是B的充分且必要条件。

④$A\not\Rightarrow B$且$B\not\Rightarrow A$，则A是B的既非充分也非必要条件。

(2)对于否定形式的命题，常根据原命题与其逆否命题的等价性(即$A\Rightarrow B$等价于$\neg B\Rightarrow\neg A$)进行判断。

例如，命题："$x\neq1$则$x^2\neq1$"。问：$x\neq1$是$x^2\neq1$的什么条件？

此命题等价于："若$x^2=1$则$x=1$"即"$x^2=1$是$x=1$的什么条件？"易知答案为必要非充分条件。

品牌题解析

(一)基础题(判断题)

1."小李的学习成绩非常优秀"是命题。(×)

2."正三角形难道不是等腰三角形吗？"是命题。(√)

3."圆是中心对称图形吗？"是命题。(×)

由命题的定义即可以判断真假的语句。1. 多么优秀才算"非常优秀"；2."难道不是……吗？"即是；3. 回答有两种情况：(1)是；(2)不是，故不可判断。

4. 如果命题p为真，命题q为假，则p或q为真。(√)

5. 如果命题"p或q"为真，则命题p或命题q中至少有一个为真。(√)

6. 原命题为真，则其逆否命题也为真。(√)

7. 原命题为假，则其逆命题为真。(×)

8. 原命题为真，则其否命题不一定为真。(√)

9. $A\Rightarrow B$，则B是A成立的充分条件。(×)

10. $A\Leftarrow B$，则A是B成立的必要而不充分条件。(√)

11. $A=\{x|1<x<5\}$，$B=\{x|x>1$且$x\neq3\}$，则$A\Rightarrow B$。(×)

12. $A=\{x|1<x<5\}$，$B=\{x|1<x\leqslant5\}$，则$A\Rightarrow B$。(√)

(二)备考题例

【例1】 下列说法中正确的是(　　)。

①"$x^2\neq1$"是"$x\neq1$"的充分不必要条件

②"$x>4$"是"$x>5$"的必要不充分条件

③"$xy=0$"是"$x=0$且$y=0$"的充要条件

④"$x^2<4$"是"$x<2$"的既不充分又不必要条件

A. ①②　B. ③④　C. ①③　D. ②④

解　①否式命题不易分析，则看其逆否命题，即"$x=1$"⇒"$x^2=1$"，故正确。②由小范围可推大范围，而反之不成立，故正确。③必要非充分。④"前小""后大"故应为充分非必要，故此题选A。

【例2】 设A,B,C是三个命题，如果A是B的充要条件，而C是A的充分不必要条件，那么B是C的(　　)。

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解　依题意可知$A\Leftrightarrow B$，$C\Rightarrow A$，∴ $C\Rightarrow A\Leftrightarrow B$，∴ $C\Rightarrow B$即$B\Leftarrow C$，∴ B是C的必要而非充分条件，故选B。

【例3】 "不等式$|x-1|+|x+2|\leqslant a$的解集为非空"的充要条件是(　　)。

A. $a<3$　B. $a\geqslant3$　C. $a>3$　D. $a>-3$

解法一　设$f(x)=|x-1|+|x+2|$

$$\left.\begin{cases}(\text{i})\,x\geqslant1,\ f(x)=2x+1\leqslant a\\(\text{ii})\,-2\leqslant x\leqslant1,\ f(x)=3\leqslant a\\(\text{iii})\,x\leqslant-2,\ f(x)=-2x-1\leqslant a\end{cases}\right\}\begin{array}{c}\text{解集非空}\\\Downarrow\\f_{\min}(x)\leqslant a\end{array}$$

$$\begin{cases}3\leqslant a\\3\leqslant a,\ \therefore\ a\geqslant3\\3\leqslant a\end{cases}$$

解法二　图象法。

解法三　不等式综合应用法

$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，$f(x)\leqslant a$的解集非空，只须

$f_{\min}(x)\leqslant a$，$|x-1|+|x+2|\geqslant|-1-2|=3$

∴ $f(x)\geqslant3$，∴ $f_{\min}(x)=3$，∴ $a\geqslant3$，故选B。

反思　若$f(x)\leqslant a$的解集为$\mathbf{R}\Leftrightarrow f_{\max}(x)\leqslant a$。

品牌题训练

(一)选择题

1. 在命题"若p则q"的逆命题，否命题，逆否命题中，真命题的个数最多为(　　)。

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

2. 在△ABC中"$\angle B=60°$"是"三内角A、B、C满足$2B=A+C$"的(　　)。

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3. "$x\in A$且$x\in B$"是"$x\in A\cap B$"的(　　)。

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分又不必要条件

4. "$x\neq3$且$y\neq5$"是"$x+y\neq8$"的(　　)。

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分又不必要条件

5. "$x\notin A$ 或 $x\notin B$"的充分不必要条件有（　　）。

①$x\notin A$ 且 $x\notin B$　　②$x\in A$ 且 $x\notin B$

③$x\notin A$ 且 $x\in B$　　④$x\in A$ 且 $x\in B$

A. 仅①　　B. 仅①②

C. ①②③　　D. ①②③④

6. 在下列各结论中，正确的结论为（　　）。

①"p 且 q"为真是"p 或 q"为真的充分不必要条件

②"p 且 q"为假是"p 或 q"为假的充分不必要条件

③"p 或 q"为真是"p"为假的既不充分也不必要条件

④"p"为真是"p 且 q"为假的必要不充分条件

A. ①②　　B. ①③　　C. ②④　　D. ③④

7. 若"$A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$"的逆否命题为（　　）。

A. 若 A 不包含于 B，则 $A\cup B\neq B$

B. 若 $A\cup B\neq B$，则 A 不包含于 B

C. 若 $A=B$，则 $A\subseteq B$

D. 若 $A\cup B\neq B$，则 $A\subseteq B$

8. 设 $a,b\in\mathbf{R}^-$，则"$a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$"是"$a>b$"成立的（　　）。

A. 充分而不必要的条件

B. 必要而不充分的条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要的条件

（二）填空题

9. 用真假填空

(1)命题"若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$"是________命题。

(2)命题"若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=B$"是________命题。

(3)命题"若 $A\cap B=A\cup B$，则 $A=B$"是______命题。

(4)命题"若 $C_U(A\cap B)=(C_UA)\cap(C_UB)$，则 $A=B$"是________命题。

10. 用"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"填空：

(1)"方程 $x^2+4x-5=0$ 的解为 $x=1$ 或 $x=-5$"是________形式。

(2)若 $x\in A\cap B$，则"$x\in A$ 且 $x\in B$"是______形式。

(3)若 $x\in A$，则"$x\notin C_UA$"是________形式。

11. 命题 P："若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$"，则非 P 是__________，P 的否命题__________。

参考答案与提示

（一）选择题

1. D　2. C　3. C　4. D　5. C　6. B　7. B　8. C

（二）填空题

9. (1)真　(2)假　(3)真　(4)真

10. (1)p 或 q　(2)p 且 q　(3)非 p

11. 若 $x\in A\cup B$，则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$；$x\notin A\cup B$ 则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$

提示：

1. 若一命题的原命题及其逆命题均真，则其相应的四种命题皆真，例若 $A\cup B=A\cap B$，则 $A=B$。

4. （易错题）否式命题不易分析，则分析其逆否命题，但应特别注意本题与"$x\neq3$ 或 $y\neq5$ 是 $x+y\neq8$"的什么条件不同。

5. 应特别注意(1)本题为选项是条件，(2)否命题不易分析，则从其逆否命题着手，(3)借助图形分析更为简单。

8. $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}\Rightarrow a-b+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>0$

$$\Rightarrow(a-b)+\frac{(a-b)}{ab}>0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(a-b)\left(1+\frac{1}{ab}\right)>0\\ a,b\in\mathbf{R}^-\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow a-b>0$，即 $a>b$。