第12章 数的开方

本章学习目标

1. 了解平方根、算术平方根、立方根的概念；会用根号表示数的平方根、算术平方根、立方根，会用平方、立方的概念求某些数的平方根与立方根.
2. 了解开方与乘方互为逆运算.
3. 会用计算器求非负数的平方根、算术平方根和一个数的立方根.
4. 了解无理数和实数的概念，知道实数与数轴上的点一一对应，能用有理数估计一个无理数的大致范围，并逐渐养成数感、估算能力、合情推理能力，会进行简单的实数运算.

12.1 平方根与立方根

重点剖析

1. 什么叫做平方根、算术平方根、立方根？

答： 如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根，记作：$\pm\sqrt{a}$；正数 a 的正的平方根，叫做 a 的算术平方根，记作：$\sqrt{a}$；如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根，记作：$\sqrt[3]{a}$.

2. 平方根、立方根的性质怎样？

答： 一个正数有两个平方根，它们互为相反数，0 的平方根是 0，负数没有平方根；一个正数有一个正的立方根，0 的立方根是 0，一个负数有一个负的立方根.

3. 如何用计算器求一个正数的算术平方根和一个数的立方根.

答： 我们可以用计算器，按一定的按键顺序，求出一个正数的算术平方根和一个数的立方根或它的近似值.

难点领悟

难点 1 对平方根与算术平方根意义的理解.

例 1 若 $\sqrt{x-1}+(x+y)^2=0$，则 $x-y$ 的值是________.

分析 因为 $\sqrt{x-1}\geqslant 0$，$(x+y)^2\geqslant 0$，根据已知条件只能是 $x-1=0$，$x+y=0$.

解 因为 $\sqrt{x-1}\geqslant 0$，$(x+y)^2\geqslant 0$ 且 $\sqrt{x-1}+(x+y)^2=0$，

所以 $x-1=0$，$x+y=0$.

所以 $x=1$，$y=-1$.

则 $x-y=2$.

难点 2 平方根与立方根的联系与区别.

例 2 求下列各式中的 x：

$$4x^2-1=0,(x-1)^3=-8.$$

分析 根据平方根和立方根的意义可求，但要注意的是一个正数有两个平方根，而一个数只有一个立方根.

解 由 $4x^2-1=0$，得 $x^2=\frac{1}{4}$，则 $x=\pm\frac{1}{2}$.

由 $(x-1)^3=-8$，得 $x-1=-2$，则 $x=-1$.

错点反思

例 3 判断正误：(1) $\sqrt{(-2)^2}=-2$； (2) $\sqrt{9}=\pm 3$； (3) $\pm\sqrt{4}=2$.

错解 (2)对，(1)、(3)错.

反思 此题的错误是对平方根、算术平方根的意义及表示理解不清.

正解 (1)、(2)、(3)都错，其中 $\sqrt{(-2)^2}=2$，$\sqrt{9}=3$，$\pm\sqrt{4}=\pm 2$.

例 4 下列说法正确的是(　　).

A. $\sqrt{64}$的立方根是 2　　B. 4 的平方根是 2

C. -5 的平方根是$\pm\sqrt{5}$　　D. $(-1)^2$ 的立方根是-1

错解 选 B.

反思 此题的错误是对平方根、算术平方根的意义理解不清.

正解 选 A.

方法总结

本节内容的关键是把握平方根与立方根的联系和区

别，现比较如下：

	平方根	立方根
定义	若 $x^2=a(a\geqslant 0)$，则 x 叫做 a 的平方根	若 $x^3=a$，则 x 叫做 a 的立方根
性质	正数有两个平方根，它们互为相反数	正数有一个正的立方根
	零的平方根是零	零的立方根是零
	负数没有平方根	负数有一个负的立方根
表示	$\pm\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$
被开方数的范围	被开方数是非负数	被开方数是任意数
方根的个数	一个正数的平方根有两个，它们互为相反数	一个数只有一个立方根

例5 如果 $5x+19$ 的立方根是 4，试求 $2x+7$ 的平方根.

分析 由 $5x+19$ 的立方根是 4，可求出 x，从而求出 $2x+7$，这就可以求出 $2x+7$ 的平方根.

解 因为 $5x+19$ 的立方根是 4，所以 $5x+19=4^3$，所以 $x=9$，则 $\pm\sqrt{2x+7}=\pm\sqrt{2\times 9+7}=\pm 5$.

请你思考

一个圆柱形蓄水池装满水，已知圆柱体的直径为 2 米，高为 3 米，现从池中抽出一部分水，将一立方体水箱灌满，这时水面下降了 1 米，求正方体水箱的棱长是多少？(用计算器计算，π 取 3.14，结果精确到 0.01 米)

夯实好基础

1. 0.81 的平方根是______，算术平方根是______，-27 的立方根是______，0 的立方根是______.

2. 下列各式的求值中正确的是(　　).

A. $\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}$　　B. $\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$

C. $\sqrt{64}=\pm 8$　　D. $-\sqrt{(-3)^2}=3$

3. $-\sqrt{121}$ 等于(　　).

A. 11　　B. -11　　C. ± 11　　D. 无意义

4. 下列说法中正确的是(　　).

A. 3 的平方根是 $\pm\sqrt{3}$

B. 2 的平方根是 2

C. -5 的平方根是 $\pm\sqrt{5}$

D. -6 的算术平方根是 $\sqrt{6}$

5. 下列语句正确的是(　　).

A. $\sqrt{64}$ 的立方根是 2

B. -3 是 27 的立方根

C. $\frac{125}{216}$ 的立方根是 $\pm\frac{5}{6}$

D. $(-1)^2$ 的立方根是 -1

6. $\sqrt{13}$ 在整数______和______之间.

更上一层楼

1. 已知 $\sqrt{3-x}+|2x-y|=0$，那么 $x+y$ 的值为______.

2. 若 4 的平方根是 m，-8 的立方根是 n，那么 $m+n$ 的值为(　　).

A. 0　　B. 4　　C. -4　　D. 0 或 -4

会当凌绝顶

(1) 填写下表：

a	…	0.001	1	1 000	1 000 000	…
$\sqrt[3]{a}$	…					…

(2) 观察上表，你从中发现什么规律？

12.2 实数与数轴

重点剖析

1. 无理数的定义？实数的分类怎样？

答： 无限不循环小数叫做无理数. 如：$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{2}$，π，0.112 0…等，有理数和无理数统称为实数，其中无理数可分为正无理数和负无理数，有理数可分为整数和分数或正有理数、零、负有理数.

2. 数的范围扩充之后，实数的相关概念，运算方法等与有理数之间有什么联系.

答：以前学过的有理数的相反数和绝对值等概念、大小比较、运算法则以及运算律，对于实数也适用.

难点领悟

难点1 实数与数轴上的点是一一对应的关系.

例1 能否说"有理数和数轴上的点一一对应吗？为什么？

分析 一个有理数可以用数轴上的一个点来表示，但数轴上的点既可以表示有理数，又可以表示无理数.

解 不能说有理数和数轴上的点一一对应，因为一个有理数可以用数轴上的一个点来表示，但数轴上的点既可以表示有理数，又可以表示无理数，它表示实数.

难点2 实数的大小比较

例2 比较下列实数的大小：

(1) $-\sqrt{3}+1$ 与 $-\sqrt{5}+1$； (2) $3\sqrt{5}$ 与 $2\sqrt{11}$.

分析 两个实数的大小比较，经常可以有作差法、平方法和取近似值法来确定.

解 (1) $(-\sqrt{3}+1)-(-\sqrt{5}+1)=\sqrt{5}-\sqrt{3}>0$；

(2) ∵ $(3\sqrt{5})^2=45,(2\sqrt{11})^2=44$.

∴ $3\sqrt{5}>2\sqrt{11}$.

错点反思

例3 下列各数中，无理数的个数为( )个.

$$-\sqrt{3},\ 0.3\dot{1},\ \frac{\pi}{2},\ \sqrt{4},\ \sqrt[3]{9},\ 0.120\,12.$$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

错解 选A.

反思 选择无理数主要从以下三方面考虑：(1) 无限不循环小数；(2) 开方开不尽的数；(3) 与π有关的数.

正解 选B.

方法总结

本节主要掌握两部分：(1) 是实数的分类及有关概念、运算；(2) 是实数与数轴上的点存在一一对应的关系.

例4 有没有最大的实数？有没有最小的实数？有没有绝对值最小的实数？有没有最大的负整数？有没有最小的自然数？有没有最大的整数？有没有最小的整数？

分析 结合实数的分类表来解答.

解 没有最大的实数，也没有最小的实数；绝对值最小的实数是0，最大的负整数是−1，最小的自然数是0，没有最大的整数，也没有最小的整数.

请你思考

化简：$|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{3}-\sqrt{2}|+|\sqrt{3}-2|$.

夯实好基础

1. 和数轴上点一一对应的数是( ).

A. 有理数 B. 无理数 C. 整数 D. 实数

2. 大于$\sqrt{17}$小于$\sqrt{35}$的整数有______.

3. $-\sqrt{2}$的绝对值是______，相反数是______.

4. 在数轴上与原点的距离是$\sqrt{5}$的点所表示的实数为______.

5. 计算：$\sqrt{6}-\sqrt{2}\approx$ ______.（结果保留两个有效数字）

更上一层楼

设 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$b=2-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{5}-2$，则 a,b,c 的大小关系是( ).

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$

C. $c>b>a$ D. $b>c>a$

会当凌绝顶

观察下列各式：$\sqrt{2-\frac{2}{5}}=2\sqrt{\frac{2}{5}}$，$\sqrt{3-\frac{3}{10}}=3\sqrt{\frac{3}{10}}$，$\sqrt{4-\frac{4}{17}}=4\sqrt{\frac{4}{17}}$，$\sqrt{5-\frac{5}{26}}=5\sqrt{\frac{5}{26}}$……针对上述各式反映的规律，写出用 n（n 为任意自然数，且 $n\geqslant 2$）表示的等式.

考点链接

1. 学校植物园的设计为长 80 米，宽 60 米，现要改为面积相等的正方形，那么这个正方形的边长应为________米.

解 69.28.

2. 下列说法中，正确的是(　　).

A. 绝对值等于它本身的数只有 0

B. 倒数等于它本身的数只有 1

C. 算术平方根等于它本身的数只有 1

D. 立方根等于它本身的数有 3 个：$-1,0,1$

解 选 D.

本章综合

A 级

一、选择题

1. 下列写法错误的是(　　).

A. $\pm\sqrt{9}=\pm 3$　　B. $-\sqrt{100}=-10$

C. $\sqrt{0.01}=0.1$　　D. $\sqrt{\frac{4}{25}}=\pm\frac{2}{5}$

2. 下列说法正确的是(　　).

A. 5 是 25 的平方根　　B. 25 的平方根是 5

C. $(-1)^2$ 的平方根是 -1　　D. -1 的平方根是 -1

3. 一个数的平方根与立方根相等，则这样的数有(　　).

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无数个

4. -8 的立方根与 4 的算术平方根的和是(　　).

A. 0　　B. 4

C. -4　　D. 0 或是 -4

5. 在实数 $-\frac{2}{3},0,\sqrt{3},-3.14,\sqrt{14},\pi$ 中，无理数有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题

6. 64 的平方根是________，-64 的立方根是________，0.09 的算术平方根是________.

7. 用计算器计算(精确到 0.01) $\sqrt{13.21}=$________，$\sqrt[3]{3\,258}=$________.

8. $\frac{16}{25}$ 的平方根是________，$-\frac{27}{125}$ 的立方根是________，$\frac{9}{4}$ 的算术平方根是________.

9. 估算 $\sqrt{24}$ 在两个连续整数________和________之间.

10. 若 $x^2=16$，则 $x=$________；若 $(x+2)^3=-8$，则 $x=$________.

11. 比较大小：$\sqrt{3}+\sqrt{2}$________$\sqrt{5}$.

12. 计算：$|-\sqrt{7}|=$________.

三、解答题

13. 比较大小：$-\frac{1}{2\pi}$ 和 $-\frac{1}{7}$.

14. 利用计算器计算：$2\sqrt{3}-\frac{7}{3}+\pi$(精确到 0.01).

15. 教室的面积为 25 米^2，里面正好铺满了 400 块大小相同的正方形地砖，求这种地砖的边长.

16. 有一个高与底面直径相等的圆柱形容器，并使它的容积为 5 米^3，问这个容器的底面圆半径是多少？(π 取 3.14，结果保留两个有效数字)

B 级

一、填空题

1. 25 的平方根是________，-0.027 的立方根是________，$\frac{9}{16}$ 的算术平方根是________.

2. 如果 a 的平方根是 ± 2，那么 $\sqrt{a}=$________.

3. 比较大小：$5\sqrt{6}$________$6\sqrt{5}$.

4. 绝对值小于 $\sqrt{12}$ 的所有整数是________.

5. $\sqrt{10}$ 在两个连续整数 a 和 b 之间，$a<\sqrt{10}<b$，那么 a,b 的值分别是________.

6. 若 $9x^2-16=0$，则 $x=$________；若 $(2x-1)^3=-27$，则 $x=$________.

7. 已知 $(2a+1)^2+\sqrt{b-1}=0$，则 $-a^2+b^{2005}=$________.

8. 观察思考下列计算过程：$\because\ 11^2=121$，$\therefore\ \sqrt{121}=11$. $\because\ 111^2=12\,321$，$\therefore\ \sqrt{12\,321}=111$.

∵ $1111^2=1234321$，∴ $\sqrt{1234321}=1111$. 猜想：$\sqrt{12345654321}=$ ________.

二、选择题

9. 一个数的算术平方根等于它本身，这个数是(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 1或0

10. 在 $1.414, -\sqrt{2}, \frac{23}{7}, \frac{\pi}{2}, 3-\sqrt{2}$ 中，无理数的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 下列式子正确的是(　　).

A. $5<\sqrt{5}$　　B. $-\sqrt{3}>-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}-2<2-\sqrt{3}$　　D. $0<-\sqrt{3}$

12. 若 a 为任意实数，下列代数式的值中，一定是负数的是(　　).

A. $-(|a|+1)$　　B. $-(a+1)^2$

C. $-\sqrt{a^2}$　　D. $-a^2$

三、解答题

13. 计算：$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$(结果保留两位小数).

14. 把下列各数按从小到大的顺序排列，用"<"号连接起来.

$$-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -\frac{\pi}{2}, 0, 2\sqrt{3}, -1.5.$$

15. 某购物中心的大楼门厅有 240 米²，

(1) 如果这个大厅是宽为 11 米的长方形，请你估算一下它的长是多少？(精确到 0.1 米)；

(2) 如果这个大厅是正方形的，那么它的边长是多少？(精确到 0.1 米)

16. 物理学中的自由落体公式：$s=\frac{1}{2}gt^2$ (g 是重力加速度，它的值约为 10 米/秒²)，若物体降落的高度 $s=125$ 米，那么降落的时间是多少秒？

17. 在做浮力实验时，小华用一根细线将一立方体铁块拴住，完全浸入盛满水的圆柱形烧杯中，并用一量筒量得被铁块排开的水的体积为 40.5 厘米³，小华又将铁块从烧杯中提起，量得烧杯中的水位下降了 0.62 厘米. 请问烧杯内部的底面半径和铁块的棱长各是多少？(精确到 0.1 厘米)

第13章 整式的乘除

本章学习目标

1. 探究并了解正整数幂的运算性质，并会运用它们进行计算.
2. 探究并了解单项式与单项式、单项式与多项式、多项式与多项式相乘（多项式相乘仅指一次式相乘）的法则，会进行简单的整式的乘法运算.
3. 能够由整式的乘法推导乘法公式，了解两个乘法公式的几何背景，并能运用公式进行简单的计算.
4. 了解因式分解的意义及其与整式乘法的区别与联系，会用提公因式法、公式法（直接用公式不超过两次）进行因式分解（指数是正整数），体会事物间相互转化的辩证思想.
5. 通过参与一些问题的探究过程，逐步形成独立思考、主动探究、乐于学习的良好品质，初步认识事物发展过程中“特殊→一般→特殊”的一般规律，培养思维的严密性和初步解决问题的能力.

13.1 幂的运算

重点剖析

1. 同底数幂的乘法法则是什么？应用时应注意什么？

答：同底数幂指的是底数相同的幂. 如 x^3 和 x^4，$(a-b)^2$ 和 $(a-b)^3$ 等，它的乘法法则是：同底数幂相乘，底数不变，指数相加，表示为：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m，n 为正整数），三个或三个以上的同底数幂相乘时也适用. 应用时应注意：(1) 左边条件是：同底数的幂，而且是相乘的关系；右边结果得到一个幂，且底数是原来的底数，指数是左边的所有指数的和. (2) 逆用公式可培养学生的逆向思维能力.

2. 幂的乘方的法则是什么？应用时应注意什么？

答：幂的乘方法则是：幂的乘方，底数不变，指数相乘. 表示为：$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 是正整数），幂的乘方运算转化为指数的乘法运算（底数不变）；同底数幂的乘法转化为指数的加法运算（底数不变）. 应用时要注意两者的区别和逆用公式 $a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$.

3. 积的乘方的法则是什么？应用时应注意什么？

答：积的乘方法则是：积的乘方，等于把积中每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，表示为 $(ab)^n=a^nb^n$（n 为正整数），三个或三个以上的积的乘方，也适用，底数可以是单项式、多项式，积的乘方运算转化为几个不同底数的幂的乘法运算，要注意逆用公式 $a^nb^n=(ab)^n$.

4. 同底数幂的除法法则是什么？应用时应注意什么？

答：同底数幂的除法法则是：同底数幂相除，底数不变，指数相减，表示为

$$a^m\div a^n=a^{m-n}(m,n\text{为正整数},m>n,a\neq 0).$$

应用时注意没有特别说明，我们总假设所给出式子是有意义的，故约定 $a\neq 0$.

难点领悟

难点1　幂的运算法则的逆用.

例1　$8^{2006}\times(-0.125)^{2005}$.

分析　$8^{2006}=8\times 8^{2005}$，注意 $8\times(-0.125)=-1$，因此应考虑应用 $8^{2005}\times(-0.125)^{2005}=[8\times(-0.125)]^{2005}$.

解　$8^{2006}\times(-0.125)^{2005}$

$=8\times 8^{2005}\times(-0.125)^{2005}$

$=8\times[8\times(-0.125)]^{2005}$

$=8\times(-1)^{2005}=-8.$

难点2　幂的运算三个法则的灵活运用.

例2　计算：$[(-x^2)^3\cdot(-x^3)^2]^2$.

分析　本题综合运用了幂的三个运算法则，运算时，应注意运算顺序和相应法则的正确运用，尤其是含有“−”号的式子更得小心，初学时，尽量按步骤一步步完成计算.

解　$[(-x^2)^3\cdot(-x^3)^2]^2=(-x^6\cdot x^6)^2$

$=(-x^{12})^2=x^{24}.$

难点3　可化为同底数幂相除的，要如何化？

例3　计算：$-x^8\div(-x)^6$.

分析　该式子底数不同，但可化为相同底数：$x^8=(-x)^8$，或 $(-x)^6=x^6$.

解　$-x^8\div(-x)^6=-(-x)^8\div(-x)^6$

$=-(-x)^{8-6}=-x^2$.

或 $-x^8\div(-x)^6=-x^8\div x^6=-x^{8-6}=-x^2$.

错点反思

例4 计算：(1) $(-x)^3\cdot(-x^2)$； (2) $(a^2)^3$.

错解 (1) 原式 $=(-x)^{3+2}=(-x)^5=-x^5$；

(2) 原式 $=a^{2+3}=a^5$.

反思 解错的原因在于对同底数幂的乘法法则掌握不准确.(1)中两因式的底数不同;(2)中是把幂的乘方与同底数幂的乘法法则混淆.

正解 (1) 原式 $=(-x^3)\cdot(-x^2)=x^3\cdot x^2$

$=x^{3+2}=x^5$；

(2) 原式 $=a^{2\times3}=a^6$.

例5 计算：$x^8\div x^2$.

错解 $x^8\div x^2=x^{8\div2}=x^4$.

反思 同底数幂相除，底数不变，指数相减，这里误为指数相除，对同底数幂相除没有理解清楚.

正解 $x^8\div x^2=x^{8-2}=x^6$.

例6 计算：(1) $\left(\frac{1}{2}a^2b\right)^3$； (2) $2a\cdot a+(-2a)^2$.

错解 (1) 原式 $=\frac{1}{2}(a^2)^3b^3=\frac{1}{2}a^6b^3$，或 $\frac{3}{2}a^6b^3$，或 $\frac{1}{8}a^6b$；

(2) 原式 $=2a^2+4a^2=6a^4$.

反思 (1) 当底数为多个因式时，常漏掉某些因式的乘方，或误认为系数相乘，或忽略单独字母的指数是"1"的因式;(2) 是加法、乘法和乘方混合运算题，出错的原因是把合并同类项与同底数幂乘法混淆了.

正解 (1) 原式 $=\left(\frac{1}{2}\right)^3(a^2)^3b^3=\frac{1}{8}a^6b^3$；

(2) 原式 $=2a^2+4a^2=6a^2$.

方法总结

幂的三条运算法则很容易混淆，学习时注意分清它们之间的联系与区别，利用法则计算时，要先辨别题目属于哪一类运算，然后再选用相应法则进行正确运算，此外，还要根据题目特点，注意三条运算法则的逆用和逆向思维.

例7 已知：$a^m=3, a^n=2$，求 a^{2m+3n}.

解 $a^{2m+3n}=a^{2m}\cdot a^{3n}=(a^m)^2\cdot(a^n)^3$

$=3^2\times2^3=72$.

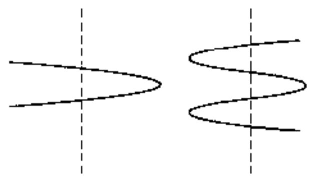
请你思考

把一条绳子从中间剪断，成了两段.

(1) 把一条绳子(第1次)对折，在它对折后的中间剪断，就成3段，如图13-1(1)；

(2) 把一条绳子对折再(第2次)对折，在它对折后的中间剪断，就成5段，如图13-1(2)；

(3) 把一条绳子对折，再对折，又(第3次)对折，在它的中间剪断，就成9段；



(1) (2)

图 13-1

(4) 把一条绳子经过第4次对折，在它对折后的中间剪断，就成多少段呢?

(5) 把一条绳子经过第 n 次对折，在它对折后的中间剪断，就成了多少段? 请完成下表：

对折次数	0	1	2	3	4	…	n
中间剪断后得的段数	2	3	5	9		…	

夯实好基础

一、填空题

1. 计算：(1) $a\cdot a^5=$ ________；

(2) $(a^3)^4=$ ________；

(3) $(-3a^2)^3=$ ________；

(4) $(2a)^9\div(2a)^3=$ ________.

2. 计算：(1) $2^5\times64=$ ________(用幂的形式表示)；

(2) $(-2m^3n)^2=$ ________；

(3) $(m^2)^3\div m^4=$ ________.

3. 计算：如果 $10^2\cdot10^m=10^6$，则 m 的值是________.

二、选择题

4. 下列运算不正确的是( ).

A. $4x^3-x^3=3x^3$　　B. $2^5+2^5=2^6$

C. $2^3\times2^3=2^9$　　D. $x^3\cdot x^2\cdot x=x^6$

5. 下列运算正确的是( ).

A. $(-2x)^2\cdot x^3=4x^6$

B. $(-x)^2\cdot(-x)=-x^3$

C. $(4x^2)^3=4x^6$

D. $3x^2-(2x)^2=x^2$

6. 化简：$(-2x)\cdot x-(-2x)^2$ 的结果是( ).

A. 0　　B. $2x^2$　　C. $-6x^2$　　D. $-4x^2$

7. 下面各式计算的结果对不对？若不对，怎样改正.

(1) $a^5 \div a^4 = a$；

(2) $x^{10} \div x^2 = x^5$；

(3) $b^3 \div b = b^3$；

(4) $(-a)^4 \div (-b)^2 = -b^2$；

(5) $y^6 \div y = y^6$；

(6) $(-x)^3 \div x^2 = x$.

更上一层楼

1. 下列计算正确的是(　　).

A. $(x-y)^2 \cdot (y-x)^3 = (x-y)^6$

B. $(x-y)^5 \cdot (y-x)^2 = -(x-y)^7$

C. $(x-y) \cdot (y-x)^3 (x-y)^2 = (x-y)^6$

D. $(y-x)^2 \cdot (y-x)^4 - (x-y)^6$

2. $100^m \cdot 1\,000^n$ 的计算结果是(　　).

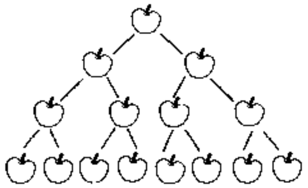
A. $1\,000^{m+n}$　　B. 10^{2m+3n}

C. 10^{mn}　　D. $1\,000^{mn}$

3. 举世瞩目的"神舟五号"载人飞船在2003年10月15日上午9时发射升空，中国航天第一人杨利伟乘坐的飞船实施变轨后进入椭圆轨道，杨利伟乘坐的飞船以每秒 7.9×10^3 米的速度飞行，历时21时23分(约 7.7×10^4 秒)，那么飞船绕地球约飞行多少米？(结果保留两个有效数字，并用科学记数法表示)

会当凌绝顶

1. 如图是一幅"苹果图"，第一行有1个苹果，第二行有2个，第三行有4个，第四行有8个……你能否发现苹果的排列规律？猜猜看，第十行有________个苹果.



(第1题)

2. 如果 $81^3\times27^4=x^{21}$，则 $x=$________. 如果 $81^3\times27^4=y^{12}$，则 $y=$________.

(1) 你能比较 81^3 与 27^4 的大小吗？

(2) 再试着比较 $3^{555}, 4^{444}, 5^{333}$ 的大小.

13.2 整式的乘法

重点剖析

1. 单项式与单项式相乘的法则是什么？运算时应注意什么？

答：单项式与单项式相乘的法则是：单项式与单项式相乘，只要将它们的系数，相同的字母的幂分别相乘，对于只在一个单项式中出现的字母，则连同它的指数一起作为积的一个因式. 运算时应注意：(1) 先确定积的系数等于各因式系数的积；(2) 相同字母相乘时，利用同底数幂的乘法法则："底数不变，指数相加"；(3) 对于只在一个单项式中出现的字母，应连同它的指数一起写在积里；(4) 单项式乘法中若有乘方运算，应按"先乘方，再乘法"的顺序进行；(5) 单项式乘以单项式，结果仍是单项式，对于字母因式的幂的底数是多项式，应将其作为一个整体来运算；(6) 对于三个或三个以上的单项式相乘法则仍然适用.

2. 单项式与多项式相乘的法则是什么？运算时应注意什么？

答：单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式里的每一项，并把所得的积相加. 运算时应注意：(1) 法则中的"每一项"是包括它前面的符号；(2) 积仍是多项式，项数与原多项式的项数相同，不要漏乘项；(3) 积的符号确定与去括号法则基本一致；(4) 对混合运算，应注意运算顺序和结果最简.

3. 多项式与多项式相乘的法则是什么？运算时应注意什么？

答：多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项分别乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加. 运算时应注意：(1) 运用多项式乘法时，要按一定顺序进行，做到不重不漏；(2) 确定积中每一项的符号，按"同号得正，异号得负". 多项式相乘，结果仍为多项式，有同类项要合并同类项.

难点领悟

难点 灵活使用各种法则进行运算，特别是运算中的符号、合并同类项问题.

例 1 已知多项式 $(mx+8)(2-3x)$ 展开后不含 x 的项，求 m 的值.

分析 不含 x 的项，说明 x 项的系数为 0，因此应把原多项式展开后合并同类项.

解 原式 $=2mx-3mx^2+16-24x$

$=-3mx^2+(2m-24)x+16.$

因为多项式 $(mx+8)(2-3x)$ 展开后不含 x 的项，

所以 $2m-24=0, m=12.$

错点反思

例 2 计算：$(-3x^2y^3z)(2xy)^2$.

错解 原式 $=-3x^2y^3z\cdot 4x^2y^2=-12x^4y^5$.

反思 计算时易漏掉只在一个单项式里含有的字母.

正解 原式 $=-3x^2y^3z\cdot 4x^2y^2=-12x^4y^5z$.

例 3 计算：$(2x-3)(x-2)-(x-1)^2$.

错解 原式 $=2x^2-4x+6-(x-1)(x-1)$

$=2x^2-4x+6-x^2-2x+1$

$=x^2-6x+7.$

反思 多项式乘法中，要做到不漏不重，去括号时，要注意符号，本题两处错误：

(1) $(2x-3)(x-2)$ 计算中，漏乘 -3 与 x；

(2) $-(x-1)^2$ 去括号时，忘记括号内每一项都变号.

正解 原式 $=2x^2-4x-3x+6-(x-1)(x-1)$

$=2x^2-7x+6-x^2+2x-1$

$=x^2-5x+5.$

方法总结

1. 理解并运用转化思想，即多项式乘以多项式转化为单项式乘以多项式，再转化为单项式乘以单项式，因此，单项式的乘法是基础和关键.

2. 在混合运算中要注意运算顺序和符号不要出错.

例 4 计算：$(x-2)(2x+2)-x(x-1)$.

解 原式 $=2x^2+2x-4x-4-x^2+x$

$=x^2-x-4.$

请你思考

阅读材料并解答问题：我们已经知道，完全平方公式可以用平面几何图形的面积来表示，实际上还有一些代数恒等式也可以用这种形式表示.

例如：$(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$ 就可以用图 13-2(1)或图 13-2(2)等图形的面积表示.

(1) 请写出图 13-2(3)所表示的代数恒等式；

(2) 试画出一个几何图形，使它的面积能表示：

$$(a+b)(a+3b)=a^2+4ab+3b^2.$$

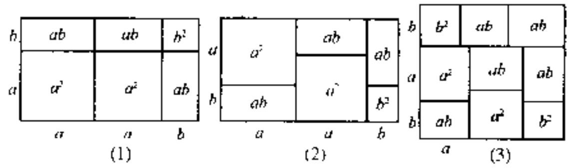


图 13-2

夯实好基础

一、填空题

1. 计算：(1) $5a^3b\cdot(-2ab^2)=$ ________；

(2) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot(-4ab^2)=$ ________.

2. 计算：$-4x\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$ ________.

3. 计算：$(x+3)(x-5)=$ ________.

二、选择题

4. 下列运算正确的是(　　).

A. $6x^2\cdot 3xy=9x^3y$

B. $(2ab^2)\cdot(-3ab)=-a^2b^3$

C. $(mn)^2\cdot(-m^2n)=-m^3n^3$

D. $-3x^2y\cdot(-3xyz)=9x^3y^2z$

5. 化简：$(x^2-y^3)-(x+y)(x-y)$ 得(　　).

A. $-2x^2$　　　　B. 0

C. $2x^2$　　　　D. $2x^2-2y^2$

三、解答题

6. 已知 $(x+m)(x-2)=x^2+3x-10$，求 m 的值.

更上一层楼

1. 若 $a\cdot a$ 可以看作是边长为 a 的正方形面积，请对以下两个式子作出合理的解释：

(1) $2a\cdot 3a$ 可以看作是________________；

(2) $\frac{1}{2}a\cdot ab$ 可以看作是________________或

________.

2. 阅读下列解答过程,并回答问题:

在$(x^2+ax+b)(2x^2-3x-1)$的积中,x^3项的系数为-5,x^2项的系数为-6.求a、b的值.

解 $(x^2+ax+b)(2x^2-3x-1)$

$=2x^4-3x^3+2ax^3-3ax^2+2bx^2-3bx$ ①

$=2x^4-(3-2a)x^3-(3a-2b)x^2-3bx.$ ②

依题意,得 $\begin{cases}3-2a=-5,\\3a-2b=-6.\end{cases}$ ③

解得 $\begin{cases}a=4,\\b=9.\end{cases}$

(1) 上述解答过程是否正确?

(2) 若不正确,从第______步开始出错的,其他步骤是否还有错误?

(3) 写出正确的解答过程.

会当凌绝顶

1. 现规定一种运算$a*b=ab+a-b$,其中a,b为实数,则$a*b+(b-a)*b$等于(　　).

A. a^2-b　　B. b^2-b　　C. b^2　　D. b^2-a

2. 你能求$(a-1)(a^{49}+a^{48}+\cdots+a^2+a+1)$的值吗?遇到这样的问题,我们可以先思考一下,从简单的情况入手,从而找出规律.

(1) 计算:$(a-1)(a+1)=$______;

$(a-1)(a^2+a+1)=$______;

$(a-1)(a^3+a^2+a+1)=$______;

由此猜想:$(a-1)(a^{49}+a^{48}+\cdots+a^2+a+1)=$______.

(2) 利用(1)的结论,计算:$2^{99}+2^{98}+2^{97}+\cdots+2^2+2+1=$______.

13.3 乘法公式

重点剖析

1. 两数和乘以它们的差的公式(即平方差公式)怎样?有何结构特征?

答:两数和与它们的差的积,等于这两数的平方差.即$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.结构特征是:等号左边是两个二项式相乘,且这两个二项式中有一项是完全相同,另一项是互为相反数,与这两项在因式中的位置无关,等号右边是乘积中的两项的平方差,即相同项的平方减去相反数项的平方,其中a、b可以是单项式,也可以是多项式.

2. 两数和(或差)的平方的公式(即:完全平方公式)怎样?有何结构特征?

答:两数和(或差)的平方,等于它们的平方和加上(或减去)它们乘积的2倍,即:$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.结构特征是:等号左边是两数和(或差)的平方,等号左边有二项,其中两项是这两数的平方和,第三项是这两数积的两倍.

难点领悟

难点1　正确判断多项式乘法能否使用平方差公式,完全平方公式.

例1 在下列多项式乘法中,可以用两数和乘以它们的差公式计算的是(　　).

A. $(a+1)(1+a)$　　B. $\left(\frac{1}{2}x+y\right)\left(y-\frac{1}{2}x\right)$

C. $(-c+a)(c-a)$　　D. $(d^2-a)(a^2+d)$

分析 根据平方差公式的特征:两个二项式中有一项相同,另一项互为相反数,可以断定只有B符合特征.

解 选B.

难点2　灵活运用两数和(或差)的平方公式以及平方差公式进行计算、化简.

例2 已知:$a+b=-4$,$ab=\frac{7}{4}$.求$a-b$的值.

分析 只要根据两数和(或差)的平方公式进行适当的变形为

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ 即可求.

解 $\because$ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=(-4)^2-4\cdot\frac{7}{4}$

$=9,$

$\therefore$ $a-b=\pm 3.$

错点反思

例3 计算:(1) $(3x+y)(2x-y)$;

(2) $(3-2x)(-3-2x)$.

错解 (1) 原式$=6x^2-y^2$;

(2) 原式$=9-4x^2$或$2x^2-9$.

反思 (1)中两个相乘的二项式没有相同项,不能用平方差公式;

(2)中的相同项是$-2x$,互为相反数是3与-3,另一

结果则是只对字母平方，而忽略系数.

正解 (1) 原式 $=6x^2-3xy+2xy-y^2$

$=6x^2-xy-y^2$;

(2) 原式 $=(-2x)^2-3^2=4x^2-9$.

例4 计算：$(x-2y)(x-2y)$.

错解 原式 $=x^2-4y^2$，或 $x^2+4xy+4y^2$，或 $x^2-2xy+4y^2$.

反思 (1) 错误：是式中没有相反数，不能用平方差公式计算；

(2) 错误：是弄错了完全平方公式的中间项的符号；

(3) 错误：是漏掉乘积项的2倍. 此外利用完全平方公式常常易漏掉中间项，写成如 $(x+y)^2=x^2+y^2$，$(x-y)^2=x^2-y^2$ 的错误，须引起足够的重视.

正解 原式 $=x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2$

$=x^2-4xy+4y^2$.

方法总结

灵活运用完全平方公式的变形，如由 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，可得：$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$，或 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$.

请你思考

我们知道 $3^2+4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$，…，数学中，把这样能使两个数的平方和等于第三个数的平方的三个正数叫做一组勾股数，同伴之间交流讨论下列问题.

(1) 试说明 $(n^2-1)^2+4n^2$ ($n>1$，n 是自然数) 是一个自然数的平方；

(2) 利用(1)的结论，写出三组勾股数；

(3) 除了用(1)的结论，你还能用其他方法写出勾股数吗？

夯实好基础

一、填空题

1. 计算：$(a+2)(a-2)=$ ________；$(-a+2)(-a-2)=$ ________；$(-a+2)(a+2)=$ ________.

2. 计算：$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=$ ________；$(2a+3b)^2=$ ________.

3. a^2+9b^2+ ________ $=(a-3b)^2$.

二、选择题

4. 计算：$-(2x-y)(2x+y)$ 的结果是(　　).

A. $4x^2-y^2$　　B. $4x^2+y^2$

C. $-4x^2-y^2$　　D. $-4x^2+y^2$

三、解答题

5. 计算：99.7^2；　498×502.

6. 先化简，再求值.

$(y+2x)(2x-y)-(2y-x)(2y+x)$，其中 $x=-2$，$y=3$.

更上一层楼

1. 如果 $(2x+2y+1)(2x+2y-1)=63$，则 $x+y=$ ________.

2. 多项式 $9x^2+1$ 加上一个单项式后，使它成为一个整式的完全平方，那么加上的单项式可以是 ________ (填上一个你认为正确的即可).

3. 计算：$(a-b+c)^2-(a+b-c)^2$.

会当凌绝顶

1. 我国宋朝数学家杨辉在他的著作《详解九章算法》中提出如图所示的规律，此图揭示了 $(a+b)^n$ (n 为非负整数) 展开式的各项系数的规律. 例如：

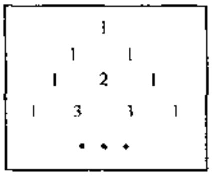
$(a+b)^0=1$，它只有一项，系数为1；

$(a+b)^1=a+b$，它有两项，系数分别为1，1；

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，它有三项，系数分别为1，2，1；

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，它有四项，系数分别为1，3，3，1；

……



(第1题)

根据以上规律，$(a+b)^4$ 展开式共有五项，系数分别为 ________.

2. 在正常的日历牌上，可以发现不少规律性的东西. 如下面是2005年11月份的日历牌；若在日历牌中按不同的方式选择四个数，如图甲、乙、丙分别构成矩形和平行四边形. 对于甲，有 $7\times 13-6\times 14=7$，即对角线两数积的差为7；对于乙，有 $10\times 15-9\times 16=6$，即对角线两数积的差为6；对于丙，有 $18\times 19-11\times 26=56$，即对角线两数积的差为56.

这些规律是否具有一般性，请再选择其他数试一试，

如果认为具有一般性，请用代数式的运算加以说明.

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6甲	7	8	9乙	10	11	12
13	14	15	16	17	18丙	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

（第2题）

13.4 整式的除法

重点剖析

1. 单项式除以单项式是如何计算的？

答： 单项式除以单项式，系数、同底数幂分别相除作为商的一个因式，对于只在被除式中出现的字母，则连同它的指数一起作为商的一个因式.

2. 多项式除以单项式是如何计算的？

答： 多项式除以单项式，先把这个多项式中的每一项（包括系数前的符号）除以这个单项式，再把所得的商相加.

难点领悟

难点　单项式除以单项式时，对于只在被除式中含有的字母，相除后不可漏掉.

例1　计算：$-24a^3b^2c\div 3ab$.

分析　单项式除以单项式，把各单项式的系数与系数相除，字母中同底数的幂相除，对于只在被除式中含有的字母，则照抄.

解　$-24a^3b^2c\div 3ab=(-24\div 3)(a^3\div a)(b^2\div b)c=-8a^{3-1}b^{2-1}c=-8a^2bc$.

例2　计算：$(16x^3-8x^2+4x)\div(-2x)$.

错解　$(16x^3-8x^2+4x)\div(-2x)=-8x^2-4x+2$.

反思　多项式除以单项式，要把多项式的每一项除以这个单项式，但经常没有注意到每一项都包括它前面的符号，相除时，同号得正，异号得负.

正解　$(16x^3-8x^2+4x)\div(-2x)=-8x^2+4x-2$.

请你思考

随着科学技术的进步，太阳能这种洁净的能源已日益得到广泛应用，已知燃烧1千克煤只能释放3.35×10^4千焦的热，而1米^{2}的地面面积一年内从太阳得到的能量约有4.355×10^6千焦.那么1个长2米、宽1米的太阳能集热器每年得到的能量大约相当于多少千克煤所释放的能量？

夯实好基础

1. 计算题：

(1) $32a^5b^3\div 8a^3b$；　　(2) $-7x^8y^4z^2\div 49x^7y^3$；

(3) $-10x^2y^3\div 6xy^2$；　　(4) $6a^3b^2\div 3a^2b$.

2. 计算：$(6x^3-4x^2)\div 2x=$________.

3. 被除式是$-18x^3y^3$，除式是$-6x^2y^2$，则商是________.

4. 被除式是$-21x^4y^3$，商是$7x^3$，则除式是________.

5. 计算题：

(1) $(-16a^2-24a)\div 8a$；

(2) $(25x^3-10x^2y+15x)\div 5x$；

(3) $(4a^3-12a^2b-2ab^2)\div(-4a)$.

6. 在观看燃放烟花时，我们常常是先看见烟花，再闻响声，这是由于光速比声速快的缘故.已知光在空气中传播的速度约为3.0×10^8米/秒，它是声音在空气中传播速度的8.82×10^5倍，求声音在空气中传播的速度（结果保留3个有效数字）.

更上一层楼

1. 填空题：

(1) $8x^2y^2z\div(\quad)=-2x$；

(2) $27a^3b^2c^2\div(-9ab^2)=$______.

2. 计算：$(8x^4+6x^3-2x)\div 2x=$______；

$(12a^2b^4+8a^4b^2-4a^2b^2)\div(-4a^2b^2)=$______.

3. 计算$(-a^4)^3\div[(-a)^3]^4$的结果是(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. $-a$

会当凌绝顶

1. 一个矩形的面积是$6a^4b^2-3a^2b^2+9a^2b$，若它的一边长为$3a^2b$，则它的周长是______.

2. 已知$3^m=15$，$3^n=6$，求3^{2m-n}的值.

13.5 因式分解

重点剖析

1. 什么叫做多项式的因式分解？它与整式乘法有何关系？

答：把一个多项式化为几个整式的乘积形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做分解因式，它与整式乘法是互逆的关系.

2. 常见的因式分解方法有哪些？

答：常见的因式分解方法有三种，一是提公因式法，即把一个多项式中各项的公因式提出来，它是乘法分配律的逆用，关键在于确定公因式，公因式是取各项系数的最大公因数，且各项都含有相同字母的最低次幂；二是运用乘法公式，即(1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，(2) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，关键是要符合公式的特征；三是利用$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$来分解一些特殊系数的二次三项式.

3. 因式分解法的一般步骤怎样？

答：首先应考虑提出因式法；其次要根据多项式的项数来确定. (1) 若多项式是二项式，则考虑能否运用平方差公式. (2) 若多项式是三项式，则考虑能否运用完全平方公式或应用$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$；再次所有分解因式都必须进行到每个多项式因式不能再分解为止.

难点领悟

难点　灵活选择恰当的方法，进行因式分解，关键在于：(1) 要透彻理解每个公式的结构特点，应用条件，掌握运用公式分解因式的基本思路和方法；(2) 公式中的字母，可以表示单项式或多项式.

例 1　分解因式：$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$.

分析　多项式没有公因式，因为是二项式，所以考虑运用平方差公式.

解　原式$=(x^2+y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)$

$=(x+y)^2(x-y)^2$.

错点反思

例 2　分解因式：$3x^2-6xy+x$.

错解　原式$=x(3x-6y)$.

反思　错误地认为提公因式x后第三项就没有数了，应当注意当多项式的公因式恰好是多项式的某一项时，提公因式后，不要丢掉系数“1”，分解是否正确可通过整式乘法来检验.

正解　原式$=x(3x-6y+1)$.

例 3　分解因式：(1) x^4-1；(2) $4x^2-9y^2$.

错解　(1) 原式$=(x^2+1)(x^2-1)$；(2) 原式$=(4x+9y)(4x-9y)$.

反思　(1)中因式x^2-1还能再用平方差公式分解，所以分解因式必须分解到每一个多项式因式不能再分解为止；(2)中的分解只注意了字母，没有考虑系数的平方，即应把整体化成平方式.

正解　(1) 原式$=(x^2+1)(x^2-1)$

$=(x^2+1)(x+1)(x-1)$；

(2) 原式$=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$.

例 4　分解因式：$(y+2)^2+(y+2)(y-6)$.

错解　原式$=(y+2)(y+2+y-6)$

$=(y+2)(2y-4)$

$=2(y+2)(y-2)=2(y^2-4)$

$=2y^2-8$.

反思　分解因式的结果是化成几个不能再分解的整式的乘积，$2(y+2)(y-2)$是最后的结果，不能再进行计算，它混淆了与整式乘法的关系.

正解 原式$=(y+2)(y+2+y-6)$

$=(y+2)(2y-4)=2(y+2)(y-2)$.

方法总结

因式分解时，首先考虑能否提公因式分解，提公因式时应注意：

(1) 首先判断多项式中各项的系数是否有公因数；

(2) 再观察各项的字母是否有相同的幂；

(3) 在底数相同的幂中，指数最低的幂作为公因式的一部分. 其次在使用公式法分解时，应先将各多项式变成公式结构的形式，弄清公式中的 a、b 分别代表题目中的哪个单项式或多项式，然后再分解，结果只能保留小括号的形式，并且直至每个多项式因式都不能再分解为止.

例5 分解因式：$(x-1)(x-3)+1$.

解 $(x-1)(x-3)+1=x^2-4x+3+1$

$=x^2-4x+4$

$=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2$

$=(x-2)^2$.

请你思考

如图 13-3，由一个边长为 a 的小正方形与两个长、宽分别为 a、b 的小矩形拼接成矩形，则整个图形可表达出一些有关多项式分解因式的等式，请你写出其中任意三个等式______；______；______.

图 13-3

夯实好基础

一、填空题

1. 分解因式：(1) $3x^2+12xy-3x=$______；

(2) $3x(x-2)+2-x=$______.

2. 分解因式：(1) $x^3-4x=$______；

(2) $ax^2+2ax+a=$______.

3. 若多项式 x^2+mx+9 是一个完全平方式，则 $m=$______.

二、选择题

4. 下列各式的变形属于因式分解的是(　　).

A. $(x+2)(x-2)=x^2-4$

B. $x^2-9+x=(x+3)(x-3)+x$

C. $x^2+5x+4=x\left(x+5+\dfrac{4}{x}\right)$

D. $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

5. 把 $-a^3b^2+a^4b^3$ 分解因式，正确的是(　　).

A. $ab(a^2b+a^2b^2)$　　B. $(-a^3b^2)(1+ab)$

C. $-a^3b^2(1-ab)$　　D. $-a^3b(b+ab^2)$

6. x^2-5x+6 分解因式的结果是(　　).

A. $(x-2)(x-3)$　　B. $(x+6)(x-1)$

C. $(x+2)(x+3)$　　D. $(x-6)(x+1)$

更上一层楼

1. 分解因式：$25(a+b)^2-9(a-b)^2$.

2. 若 $2x^2-9x+k$ 有一个因式是 $x-3$，确定 k 的值.

3. 计算：$100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1$.

会当凌绝顶

1. 分解因式 x^2+ax+b，甲看错了 a 的值，分解的结果是$(x+6)(x-1)$，乙看错了 b 的值，分解的结果是$(x-2)(x+1)$，那么 x^2+ax+b 分解因式正确的结果是______.

2. 在日常生活中，如取款、上网等都需要密码，有一种用“因式分解”法产生的密码，方便记忆，原理是：如对于多项式 x^4-y^4，因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$. 若取 $x=9$，$y=9$ 时，则各个因式的值是：$(x-y)=0$，$(x+y)=18$，$(x^2+y^2)=162$，于是就可以把“018162”作为一个六位数的密码. 对于多项式 $4x^3-xy^2$，取 $x=10$，$y=10$ 时，用上述方法产生的密码是：______(写出一个即可).

考点链接

1. 下列运算中正确的是(　　).

A. $x^5+x^5=2x^{10}$

B. $-(-x)^3(-x)^5=-x^8$

C. $(-2x^2y)^3\cdot 4x^3=-24x^5y^3$

D. $\left(\frac{1}{2}x-3y\right)\left(-\frac{1}{2}x+3y\right)=\frac{1}{4}x^2-9y^2$

解　选 B.

注意　幂的运算，整式的乘法及因式分解等在中考是必考题目，此类型题目多数以填空题，选择题形式出现，属简单题.

2. 计算：$(2x-1)^2+(1-2x)(1+2x)$.

解　原式 $=4x^2-4x+1+1-4x^2=-4x+2$.

注意　有关乘法公式、因式分解的内容，是后续学习分式、方程、函数等许多数学知识的基础，是中考的热点之一，常在简单的解答题出现，并结合求值.

本章综合

A　级

一、填空题

1. 计算：$x\cdot x^2=$ ________；$(a^3)^3=$ ________；
$(-2x^2)^3=$ ________；$64a^8\div 4a^2=$ ________.

2. $a^{12}=a^4\cdot$ ________；$27a^6=($　　　$)^3$.

3. $3x^2\cdot(-3x^2)=$ ________；
$3x^2+(-3x^2)=$ ________.

4. $(4m^3n-6m^2+2m)\div 2m=$ ____________.

5. 宇宙空间的距离通常以光年作单位，1 光年是光在一年内通过的距离，如果光的速度为 3×10^5 千米/秒，一年约为 3.2×10^7 秒，那么 1 光年约为________千米.

6. 计算：$(x+1)(x-2)=$ ________；
$(2x-1)(3x+1)=$ ________.

7. 计算：$(x+2y)(x-2y)=$ ________；
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=$ ________.

8. 分解因式：(1) $3x^2-9xy=$ ________；
(2) $x^3-x=$ ________；
(3) $a^2-9b^2=$ ________；
(4) $x^2-6xy+9y^2=$ ________；
(5) $x^2-7x-18=$ ________.

9. 若 $2^x=3$，则 $2^{x+2}=$ ________.

10. 在边长为 $a+b$ 的正方形中间挖去一个边长为 $a-b$ 的正方形，则剩余部分的面积为________.

11. 某种细胞每经过 30 分钟，便由 1 个分裂成为 2 个，则经过 3 小时后，这种细胞由 1 个分裂成为________个.

二、选择题

12. 小马虎在下面的计算中只做对了一道题，他做对的题目是(　　).

A. $(a^3)^4=a^7$

B. $(x-y)^2=x^2-y^2$

C. $4a^3\cdot(-3a^3)=-12a^6$

D. $4a^6\div 2a^3=2a^2$

13. 在下列多项式的乘法中，可以用平方差公式计算的是(　　).

A. $(x+1)(1+x)$　　B. $(2a+b)(b-2a)$

C. $(-a+b)(a-b)$　　D. $(x^2-y)(x+y^2)$

14. 下面由左边到右边的变形，是因式分解的是(　　).

A. $am+bm-1=m(a+b)-1$

B. $(x+2)(x-5)=x^2-3x-10$

C. $x^2-4=(x+2)(x-2)$

D. $a^2+b^2=(a+b)^2$

15. 分解因式 $a-ab^2$ 的结果是(　　).

A. $a(1+b)(1-b)$.　　B. $a(1+b)^2$

C. $a(1-b)^2$　　D. $(1-b)(1+b)$

16. 要使二次三项式 x^2-5x+p 在整数范围内能进行因式分解，那么整数 p 的取值可以有(　　).

A. 2 个　　B. 4 个

C. 6 个　　D. 无数多个

三、解答题

17. 先化简，再求值：$(x+1)^2-2(x+2)$.
选择你喜欢的一个 x 值代入计算.

18. 计算：(1) $(a+b)^2-(a-b)^2$；

(2) 简便计算：$2\,006\times1\,994$.

B　级

一、填空题

1. $10^5\cdot100=$ ________.(用幂的形式表示)

2. 若 $a^m=3$，$a^n=2$，则 $a^{m+n}=$ ________；$a^{2m+n}=$ ________.

3. 计算：$0.125^6\times8^7=$ ________.

4. 计算：$-6ab\cdot2a^2b-a^2b\cdot(-2ab)=$ ________.

5. $8a^2b^2c\div($　　　$)=-2a$.

6. 计算：$(x-2y)(-x-2y)=$ ________.

7. 分解因式：$a(m+1)+m+1=$ ________；

$4x^4-4x^3+x^2=$ ________.

8. 如果 x^2+4x+m 能写成一个整式的平方，则 $m=$ ________.

9. 若 $(x+1)^2+|2x+y|=0$，则 $x^2+y^2=$ ________.

10. 请任意写出一个能在整系数范围内分解的二次二项式：________.

11. 写出乘积为 $6x^2y+12xy^2$ 的两个整式，它们是 ________，________.

12. 已知 $a-b=3$，$ab=2$，$a^2+b^2=$ ________.

13. 观察：$1\times2\times3\times4+1=5^2$，$2\times3\times4\times5+1=11^2$，$3\times4\times5\times6+1=19^2$，猜想：$97\times98\times99\times100+1=$ ________.

二、选择题

14. 若 $(2a+3b)^2=(2a-3b)^2+(\quad)$ 成立，则括号内的式子是(　　).

A. $6ab$　　B. $12ab$　　C. $18ab$　　D. $24ab$

15. 如果 $a^2-b^2=20$，且 $a+b=-5$，则 $a-b$ 的值是(　　).

A. 5　　B. 4

C. -4　　D. 以上都不对

16. 若 $(x+3)(x-2)=x^2+mx+n$，则 m,n 的值为(　　).

A. $m=5,n=6$　　B. $m=1,n=-6$

C. $m=1,n=6$　　D. $m=5,n=-6$

17. 一根1米长的绳子，第一次剪去一半，第二次剪去剩余的一半，如此剪下去，第六次后剩下的绳子的长度为(　　).

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 米　　B. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 米

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ 米　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ 米

三、解答题

18. 计算：$5a^3b\cdot(-3b)^2+(-6ab)^2\cdot(-ab)-ab^3(-4a^2)$.

19. 化简求值：$\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2\right]\left(2a^2-\frac{1}{2}b^2\right)$，其中 $a=-3$，$b=4$.

20. 简便计算：$\dfrac{2\,005^2}{2\,000\times2\,010+25}$.

21. 观察下列算式：

$2\times0+1=1$，

$3\times1+1=4$，

$4\times2+1=9$，

$5\times3+1=16$，

$6\times4+1=25$，

……

你能发现什么规律？请把你发现的规律用公式表示出来.

阅读与欣赏

“洛书”的奇趣

相传在夏禹治水时，洛水(今陕西洛河)里浮出一只大神龟，此神龟在背上有黑白小圆圈45个，后人把此图称为“洛书”，把这些小圆圈依序用数字排列起来，就是如图13-4所示的三阶幻方.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图　13-4

这是世界上最古老的幻方，“洛书”的传说始于北宋. 据考证，这种三阶幻方最早见于公元前500年左右春秋时期的《大戴礼记》中，汉朝徐岳把它叫“九宫算”，其注解是“九宫者，即二、四为肩，六、八为足，左三、右七，戴九履一，五居其中”. 后又有民间歌诀“四海三山八洞仙，九龙五子一支莲，二七六朗赏月半，周围十五月团圆”，均指这三阶幻方. 它也指出了“洛书”在数学方面的奇迹，神妙地排列了1～9九个数字，它的横三行，竖三列，两条对角线共八条直线的三个数字之和均为十五，如果我们把经过旋转和反射(镜像映射)以后所产生的幻方，看做完全相同的幻方，那么，三阶幻方的排列方法只有一种，就是“洛书”，我们可以发现“洛书”还有许多奇妙之处.

一、横三行(或竖三列)的三个三位数(或三个两位数)构成回码等式(等号右边各数是对照等号左边的各数，把数码颠倒过来)：

(1) $492+357+816=294+753+618=1\,665$；

(2) $92+57+16=29+75+61=165$；

(3) $492^2+357^2+816^2=294^2+753^2+618^2$
$=1\,035\,369$.

你能再找出一些回码等式吗?

二、被居中的"5"隔开的四个两位数构成回码等式，且退至相同位置的一位数等式仍成立：

(4) $91+28+64+37=19+82+46+73=220$；

(5) $9^2+2^2+6^2+3^2=1^2+8^2+4^2+7^2=130$.

三、以"5"居中的四个三位数构成回码等式：

(6) $951+258+654+357=159+852+456+753$
$=2\,220$.

由上面的等式的结果中我们可以得到另一些等式.

如由(6)式，依次任取其中的两位数(或一位数)均能构成回码等式或等式.

同学们只要肯动脑筋，还可以发现"洛书"中更多有趣的等式，这对于激发我们学习数学的兴趣，增强我们探索问题的信心，将是非常有益的.

研究性学习

完全平方公式的推广

对公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 可以从以下两个方面作进一步的思考：

1. 探究 $(a+b)^2$ 底数项数的推广.

特例 1：计算：$(a+b+c)^2=$

特例 2：计算：$(a+b+c+d)^2=$

你能用文字语言叙述这两个等式吗?

猜想：$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=$

2. 探究 $(a+b)^2$ 指数的推广.

特例 3：$(a+b)^3=$

特例 4：$(a+b)^4=$

特例 5：$(a+b)^5=$

猜想：二项式乘方展开式有什么规律，你发现了字母指数及各项系数间的排列规律吗?

试写出 $(a+b)^6$，$(a+b)^7$ 的展开式.

$(a+b)^6=$

$(a+b)^7=$