现代数学基础丛书 102

矩阵结合方案

王仰贤 霍元极 麻常利 著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书　102

矩阵结合方案

王仰贤　霍元极　麻常利　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书论述有限域上各类典型矩阵在群作用下构作的结合方案,其内容主要包括有限域上的长方矩阵、交错矩阵、Hermite 矩阵、对称矩阵和二次型构作的结合方案,导出各类结合方案的一般参数计算公式,讨论这些结合方案的本原性、对偶性、*P* 多项式等基本性质以及自同构群. 特别论述了特征数为 2 时二次型结合方案的特征值及其聚合方案的对偶方案.

本书可供大专院校数学与信息专业高年级学生、研究生、教师及有关数学工作者阅读,也可供其他有关科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵结合方案/王仰贤, 霍元极, 麻常利著. —北京: 科学出版社, 2006
(现代数学基础丛书; 102/杨乐主编)

ISBN 7-03-018032-1

I. 矩… II. ①王… ②霍… ③麻… III. 矩阵-结合方案 IV. O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 107552 号

责任编辑: 吕 虹 / 责任校对: 刘亚琦
责任印制: 安春生 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 9 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2006 年 9 月第一次印刷 印张: 18
印数: 1—3 000 字数: 328 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言, 书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍, 从中汲取营养, 获得教益.

20 世纪 70 年代后期, 我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年, 而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后, 我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此, 科学出版社陆续推出了多套数学丛书, 其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出, 前者出版约 40 卷, 后者则逾 80 卷. 它们质量甚高, 影响颇大, 对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者, 针对一些重要的数学领域与研究方向, 作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识, 又反映其新发展, 力求深入浅出, 简明扼要, 注重创新.

近年来, 数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用, 还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持, 编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展, 使它越办越好, 为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

序　　言

结合方案原是伴随于部分平衡不完全区组设计的一个组合结构, 描述具有多个结合关系的处理之间的某种平衡性,1952 年由 R.C. Bose 和 T.Shimamoto 引进. 由于它和编码、图论及有限群的密切联系, 特别是给编码提供了某种理论框架, 到 20 世纪 80 年代, 结合方案的研究已发展成为代数组合学中的一个重要分支. 它吸引了越来越多的人进行研究, 所涉及的内容逐步扩大, 研究方法各有所长.

我国结合方案的研究始于 20 世纪 50 年代末. 开始有许宝騄、张里千教授的著名成果, 随后, 我和当时的几位学生以典型群作用下各种类型的子空间作处理和区组来构作结合方案和设计并计算了它们的参数, 所得成果汇集于《有限几何与不完全区组设计的一些研究》(万哲先, 戴宗铎, 冯绪宁, 阳本傅著.1966. 北京：科学出版社) 这部专著里. 在 20 世纪 60 年代中, 我又取 n 阶 Hermite 矩阵构作了一类结合方案, 并计算了低阶情形的参数 (《中国科学》, 1965), 开创了利用矩阵构作结合方案的新方向. 后来发展起来的结合方案研究说明, 那时利用极大全迷向子空间构作的结合方案和利用 Hermite 矩阵构作的结合方案均为所谓的本原 P 多项式和 Q 多项式结合方案的基本类型.

20 世纪 70 年代末, 王仰贤教授继续了利用矩阵构作结合方案这项研究, 他除了对于 Hermite 矩阵结合方案的参数给出了计算公式以外, 还研究了长方矩阵结合方案和交错矩阵结合方案. 随后霍元极、祝学理教授和我研究了特征数不为 2 的域上对称矩阵结合方案. 到了 20 世纪 90 年代, 王仰贤教授又和他的学生马建敏、麻常利博士研究特征数为 2 的有限域上更为复杂的对称矩阵结合方案和二次型结合方案. 他们除讨论这两类结合方案的参数计算外, 还讨论了它们的结合子方案及相应的商方案, 这两类结合方案的对偶性, 以及二次型结合方案的自同构和特征值等等. 这样矩阵结合方案的研究日趋完整. 现在王仰贤、霍元极教授和麻常利博士把矩阵结合方案方面的成果进行综合、扩充和系统化, 汇编成书, 其目的是系统阐述各类矩阵结合方案的构作, 参数计算以及它们的结构, 包括本原性、对偶性、P(和 Q) 多项式性质以及自同构等. 我相信这本专著的出版会为学习和研究结合方案的读者提供一些研究方法和工具. 更希望读者在结合方案的研究上, 取得一些新的成果.

万哲先

2006 年 3 月

前　言

本书是遵照万哲先院士的建议, 把我们 (和合作者) 关于矩阵结合方案研究的成果进行了综合、扩充和系统化而形成的.

全书共八章. 第一章介绍结合方案的一般基础性理论, 主要包括结合方案的基本性质、Krein 参数、对偶性、本原性、结合子方案和商方案等概念, 为初学者阅读后面的章节提供了比较系统而又必需的预备知识. 这些内容主要取自参考文献 [2]. 从第二章到第七章, 分别阐述有限域上各类矩阵结合方案, 即由长方矩阵、交错矩阵、Hermite 矩阵、对称矩阵和二次型构成的结合方案, 讨论它们的构作、参数计算和结构 —— 对偶性、本原性、P 多项式以及自同构等. 最后在第八章中讨论特征数为 2 的二次型结合方案的特征值及其聚合方案的对偶方案.

这些矩阵结合方案被统一地看作某矩阵类 (作成加法群) 上的合同变换和平移生成的群作用下自然地导出来的. 由于它们的构作依赖于矩阵类在一般线性群作用下的合同标准型, 所以在讨论它们的参数计算时, 借助文献 [15] 中给出的典型几何中各种类型子空间的计数公式就是一种有效的办法. 为了内容的完整和使初学者熟练矩阵方法, 对于几类距离正则图的参数, 本书中也给出了矩阵方法的再证明. 关于书中各类矩阵结合方案的自同构之确定, 归结到文献 [16] 中著名的各类矩阵几何基本定理. 对于特征数为 2 的 n 元二次型采用了文献 [15] 中的矩阵形式, 相应结合方案的自同构之确定, 在 $n \geqslant 3$ 时是借助了文献 [12] 中二次型图的自同构之结果, 而对于 $n = 2$ 的情形则是巧妙地应用纯矩阵方法得到的. 因此, 本书所阐述的矩阵结合方案, 就其历史背景和讨论的内容以及所用的方法而言, 实为由华罗庚、万哲先创导的具有独特风格的“矩阵方法”在结合方案研究方面的应用与发展.

本书的第二章到第七章基本上是彼此独立的, 读者在阅读了第一章之后可以根据兴趣选读后面的章节, 在掌握了一定的方法与技巧后即可进行一些课题研讨. 当然, 如前所述, 读者需要了解文献 [15] 和 [16] 中的有关内容. 此外, 各章还涉及到有限群的特征标知识, 读者可从一般群论书籍中找到, 也可参阅文献 [2].

本书中有不少内容是没有发表过的, 不妥之处, 敬请读者指正.

万哲先院士对本书的撰写和出版给予了热情的指导和支持, 并为本书作序, 我们表示衷心的感谢. 冯荣权教授和马建敏博士整理了本书第八章部分内容的初稿, 高锁刚教授用本书初稿的部分内容作为他的研究生学习结合方案时的教材, 王恺顺教授在本书付印前仔细阅读了全稿, 并进行了核算, 他们都提出了宝贵意见. 河北师范大学对本书的撰写和出版在经费等多方面给予了很大支持; 中国科学院科学出

版基金委员会为本书出版给予了资助; 科学出版社吕虹编审对本书出版给予了大力的帮助. 在此, 我们一并表示诚挚感谢.

王仰贤　霍元极　麻常利

2006 年 4 月

符 号 表

$\|X\|$	集合X中元素个数
R_i	结合类或结合关系
$\mathfrak{X}=(X, \{R_i\}_{0\leqslant i\leqslant d})$	类数为d的结合方案
k_i	R_i的价
p_{ij}^k	$\mathfrak{X}$的交叉数
A_i	结合关系R_i的邻接矩阵
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{X}$的邻接代数
$M_n(\mathbb{C})$	复数域$\mathbb{C}$上的n阶全阵代数
$\mathcal{B}$	$\mathfrak{X}$的交叉代数
Ω	有限集合
G	有限群
Λ_i	G作用在$\Omega\times\Omega$上的轨道
$\mathbb{A}(\sigma)$	阶为$\|G\|$的矩阵, 其中(x, y)位置的元素是$\delta_{x^\sigma y}$
$\mathbb{X}_i$	$\sum_{x\in X_i} x$, 有限群X的子集X_i中元素的形式和
U	n阶酉矩阵
V	$\mathbb{C}$上的n维向量空间
E_i	$V=V_0\perp V_1\perp\cdots\perp V_r$到$V_i$的正射影在标准正交基$\{e_x\|x\in X\}$下的矩阵
$p_i(j)$	A_i在V_j上的特征值
m_i	$\mathfrak{X}$的重数
$q_i(j)$	满足$E_i=\frac{1}{\|X\|}\sum_{j=0}^d q_i(j)A_j\ (i=0, 1, \cdots, d)$的数
$P=(p_i(j))$	第一特征值矩阵, 其中(j, i)元素为$p_i(j)$
$Q=(q_i(j))$	第二特征值矩阵, 其中(j, i)元素为$q_i(j)$
$\circ$	Hadamard乘积符号
C_i	有限群G的共轭类
χ_i	群G的特征标
$\mathbb{C}_i$	$\sum_{x\in C_i} x$

$\widehat{\mathfrak{A}}$	$\mathfrak{A}$的对偶代数
q_{ij}^k	Krein参数
$\widehat{B}_i$	$(j,\,k)$位置的元素为q_{ij}^k的$d+1$阶矩阵
$\mathbb{C}[X]$	有限群 X 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的群环 (代数)
$\mathfrak{S}$	由$\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1, \cdots, \mathbb{X}_d$生成的$S$一环
$\mathfrak{X}(\mathfrak{S})$	$\mathfrak{S}$的结合方案
$\Delta_i,\ \Delta_i^*$	$\mathbb{C}(X)$到$\mathbb{C}$的线性映射
$\mathbb{Y}_i$	$\sum_{\alpha\in s_i}\Delta_\alpha^*$, 其中$s_0, s_1, \cdots, s_d$是$\{0, 1, \cdots, n-1\}$的一个分划
$\mathfrak{S}^*$	$\langle\mathbb{Y}_0, \mathbb{Y}_1, \cdots, \mathbb{Y}_d\rangle$, $\mathfrak{S}$的对偶S环
$\Gamma^{(i)}$	关系R_i的图, 即以X为顶点集而以R_i为边集的图
G_x	有限群作用在有限集Ω上, $x\in\Omega$的稳定子
$\bigotimes$	Kronecker积
$\mathfrak{X}(\Sigma)$	结合方案 $\mathfrak{X}$ 在非本原系 Σ 上导出的商结合方案
∂	图的距离函数
$\Gamma_i(x)$	在图Γ中与顶点x距离为i的顶点的集合
$\Gamma(x)$	$\Gamma_1(x)$
c_i	$\lvert\Gamma_{i-1}(x)\cap\Gamma(y)\rvert$, 其中$y,\,x$是$\Gamma$的两个顶点, $\partial(y,x)=i$.
a_i	$\lvert\Gamma_i(A)\cap\Gamma(B)\rvert$
b_i	$\lvert\Gamma_{i+1}(A)\cap\Gamma(B)\rvert$
$\mathrm{Aut}(\Gamma)$	图 Γ 的自同构群
$\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$	结合方案 $\mathfrak{X}$ 的自同构群
Inn	内自同构
$\mathbb{F}_q$	q个元素的有限域
$n_i(m\times n,\ q)$	M_{mn}中秩为 i 的 $m\times n$矩阵的个数
$\mathrm{Mat}(m\times n,\ q)$	长方矩阵结合方案
$GL_n(\mathbb{F}_q)$	$\mathbb{F}_q$上的n级线性群
ϕ_A	映射符号, 其中$A=(a_{ij})$,
$\mathcal{K}(n,\ q)$	$\mathbb{F}_q$上全体$n\times n$交错矩阵的集合
$\mathrm{Alt}(n,\ q)$	$\mathbb{F}_q$上n阶交错矩阵结合方案
$Sp_{2\nu}(K_\nu, \mathbb{F}_q)$	$\mathbb{F}_q$上关于$K_\nu=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ -I^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix}$的$2\nu$阶辛群

$N(m, s; 2\nu)$	辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中 (m, s) 型子空间的个数
$K_i(n, q)$	$\mathbb{F}_q$ 上秩为 $2i$ 的 $n \times n$ 交错矩阵的个数
$\mathbb{F}_q^*$	$\mathbb{F}_q$ 的乘法群
$\mathcal{H}(n, q^2)$	$\mathbb{F}_{q^2}$ 上全体 Hermite 矩阵的集合
$\mathrm{Her}(n, q^2)$	$\mathbb{F}_{q^2}$ 上 n 阶 Hermite 矩阵结合方案
$U_n(H, \mathbb{F}_{q^2})$	$\mathbb{F}_{q^2}$ 上关于 H 的 n 级 U 群
$N(m, r; n)$	酉空间 $\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$ 中 (m, r) 型子空间的个数
$H_i(n, q^2)$	$\mathbb{F}_{q^2}$ 上秩为 i 的 $n \times n$ Hermiti 矩阵的个数
$S(n, q)$	$\mathbb{F}_q$ 上全体 $n \times n$ 对称矩阵的集合
$\mathrm{Sym}(n, q)$	$\mathbb{F}_q$ 上 n 阶对称矩阵结合方案
$C_{(i,\xi)}$	$\{X \in S(n,q) \mid X \sim [I^{(i-1)}, \xi, 0^{(n-i)}], 0 \leqslant i \leqslant n, \xi = 1$ 或 $z\}$
$R_{(i,\xi)}$	对应于 $C_{(i,\xi)}$ 的结合类
$k_{(i,\xi)}, k_{(i,\xi)}(n)$	$R_{(i,\xi)}$ 的价
$p_{(i,\eta)(j,\zeta)}^{(k,\xi)}, p_{(i,\eta)(j,\zeta)}^{(k,\xi)}(n)$	$\mathrm{Sym}(n,q)$ 的交叉数
$\Gamma^{(i,\xi)}$	$R_{(i,\xi)}$ 的关系图, $\xi = 1$ 或 z
$S_{2\nu+\delta,\Delta}$	$\mathbb{F}_q$ 上的对称矩阵 $\left[\begin{pmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ I^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix}, \Delta\right]$
$O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$	奇特征的 $\mathbb{F}_q$ 上关于 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$ 的 $2\nu+\delta$ 级正交群
$N(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta, \Delta)$	正交空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中 $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 型子空间的个数
$\overline{R}_i$	$\{(X,Y) \mid X, Y \in S(n,q), \mathrm{rank}(X-Y) = 2i-1$ 或 $2i\}(0 \leqslant i \leqslant [\frac{n+1}{2}])$
$\mathrm{Quad}(n,q)$	结合方案 $(S(n,q), \{\bar{R}_i\}_{0 \leqslant i \leqslant [\frac{n+1}{2}]})$
$Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上关于 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$ 的伪辛群
$N(m, 2s+\tau, s, \varepsilon; 2\nu+\delta)$	伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中 $(m, 2s+\tau, s, \varepsilon)$ 型子空间的个数
$t(S)$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上对称矩阵 S 的类型
$\overline{\mathrm{Sym}}(n, q)$(特征为 2)	以 $\overline{R}_i$ 为结合类的 P 多项式结合方案
$\equiv$	同余号
B_f	相伴于二次型 f 的对称双线性型
$Q(n,q)$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上全体 n 元二次型的集合
$\mathrm{Qua}(n,q)$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上二次型结合方案
Tr	$\mathbb{F}_q$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上的迹

$O_n(\mathbb{F}_q, G)$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上关于 G 的 n 级正交群, 其中 G 是 $n\times n$ 正则矩阵
$N(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$	正交空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中 $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 型子空间的个数
$Q_i(n, q)$	$Q(n, q)$ 中类型为 i 的二次型集合
$k_{2s+\gamma}(n)$	$\mathrm{Qua}(n, q)$ 的结合类 $R_{2s+\gamma}$ 的价
$p^{2j_1+\delta_1}_{2j_2+\delta_2,\,2j_3+\delta_3}(n)$	$\mathrm{Qua(n, q)}$ 的交叉数
$\widetilde{\mathrm{Q}}\mathrm{ua}(n, q)$	$\mathrm{Qua}(n, q)$ 的聚合方案
$C_k^{(n)}$	$\mathbb{F}_q$ 上型为 k 的 n 元二次型的 "合同类", $k\in\{0, 1, 2^+, 2^-, 3, \cdots\}$
$f_i^{(n)}$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上 $S(n, q)$ 的合同类 D_i 中矩阵给出的特征标
$f_r^{(m)}$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上 $S(n, q)$ 中秩为 r 的非交错矩阵给出的特征标
$f_{2k^*}^{(n)}$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上秩为 $2k$ 的交错矩阵给出的特征标
$\widetilde{\mathrm{S}}\mathrm{ym}\,(n, q)$	偶特征的 $\mathbb{F}_q$ 上 $\mathrm{Sym}(n, q)$ 的一个聚合方案

目　录

*　　　*　　　*

第一章　结合方案理论基础

§1.1　结合方案的基本概念

设 X 是一个非空有限集合, $|X|=n$. $R_0, R_1, \cdots, R_d$ 是 $X\times X$ 的非空子集且满足下面的条件:

(i) $R_0=\{(x, x)|x\in X\}$;

(ii) $X\times X=R_0\cup R_1\cup\cdots\cup R_d$, 且对所有 $i\neq j$, $R_i\cap R_j=\varnothing$;

(iii) 令 ${}^tR_i=\{(x,y)|(y,x)\in R_i\}$. 对于每个 $i\in\{0, 1, \cdots, d\}$, 存在 $i'\in\{0, 1, \cdots, d\}$ 使得 ${}^tR_i=R_{i'}$.

(iv) 对于任意 $i,j,k\in\{0, 1, \cdots, d\}$ 及任意一个对子 $(x, y)\in R_k$, 数

$$p_{ij}^k=|\{z\in X|(x, z)\in R_i, (z, y)\in R_j\}|$$

与 i,j,k 有关, 而与 R_k 中 (x, y) 的选取无关. 这样的一个构形 $\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\leqslant i\leqslant d})$ 叫做 X 上的一个类数为 d 的结合方案, R_i 叫做 $\mathfrak{X}$ 的第 i 个结合类 (或结合关系). 这些非负整数 p_{ij}^k 叫做 $\mathfrak{X}$ 的交叉数. 如果结合方案 $\mathfrak{X}$ 还满足条件:

(v) $p_{ij}^k=p_{ji}^k$ 对所有 $i, j, k\in\{0, 1, \cdots, d\}$,

那么 $\mathfrak{X}$ 就叫做一个交换结合方案. 如果结合方案 $\mathfrak{X}$ 满足条件:

(vi) $i'=i$, 对每个 $i\in\{0, 1, \cdots, d\}$,

那么 $\mathfrak{X}$ 就叫做一个对称结合方案(或者 Bose-Mesner 型结合方案).

容易看出, 如果结合方案 $\mathfrak{X}$ 是对称的, 那么它必为交换的. 反之, 交换结合方案未必是对称的.

在下面的讨论中, 我们恒设 $\mathfrak{X}$ 是交换的, 除非另有说明.

对于交换结合方案 $\mathfrak{X}=(X, \{R_i\}_{0\leqslant i\leqslant d})$, 我们令 $k_i=p_{ii'}^0$ $(i=0, 1, \cdots, d)$, 就是说, 对于任意取定的一个元素 $x\in X$, 存在 k_i 个元素 $y\in X$ 使得 $(x, y)\in R_i$. 数 k_i 叫做 R_i 的价(valency). 显然有

$$k_0=1,\ k_i=k_{i'},\ |X|=k_0+k_1+\cdots+k_d.$$

命题 1.1　对于交换结合方案 $\mathfrak{X}$ 的交叉数 p_{ij}^k, 我们有如下基本性质:

(i) $p_{0j}^k=\delta_{jk}$,

(ii) $p_{i0}^k=\delta_{ik}$,

(iii) $p_{ij}^0=k_i\delta_{ij'}$,

(iv) $p_{ij}^k = p_{i'j'}^{k'}$,

(v) $\sum_{j=0}^d p_{ij}^k = k_i$,

(vi) $k_\gamma p_{\alpha\beta}^\gamma = k_\beta p_{\alpha'\gamma}^\beta = k_\alpha p_{\gamma\beta'}^\alpha$,

(vii) $\sum_{\alpha=0}^d p_{ij}^\alpha p_{k\alpha}^l = \sum_{\beta=0}^d p_{ki}^\beta p_{\beta j}^l$.

证明　(i) 取定 $(x, y) \in R_k$, 那么

$$p_{0j}^k = |\{z \in X | (x, z) \in R_0, (z, y) \in R_j\}|.$$

由 $(x, z) \in R_0$ 必有 $z = x$. 如果 $j \neq k$, 那么这样的 z 是不存在的; 如果 $j = k$, 这样的 z 只能是 x, 因此 (i) 成立.

(ii) 由交换性及 (i) 可得.

(iii) 任意取定一个元素 $x \in X$, 那么

$$p_{ij}^0 = |\{z \in X | (x, z) \in R_i, (z, x) \in R_j\}|.$$

如果 $j' \neq i$, 那么满足这样条件的 z 不存在; 如果 $j' = i$, 那么满足这样条件的 z 恰有 k_i 个. 因此 (iii) 成立.

(iv) 任意取定 $(x, y) \in R_k$, 那么 $(y, x) \in R_{k'}$, 并且

$$\begin{aligned} p_{ij}^k &= |\{z \in X | (x, z) \in R_i,\ (z, y) \in R_j\}| \\ &= |\{z \in X | (z, x) \in R_{i'},\ (y, z) \in R_{j'}\}| = p_{j'i'}^{k'}. \end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{X}$ 是交换结合方案, 所以 $p_{j'i'}^{k'} = p_{i'j'}^{k'}$, 因此 (iv) 成立.

(v) 取定 $(x, y) \in R_k$, 那么有 k_i 个 z 使得 $(x, z) \in R_i$, 其中有 p_{ij}^k 个 z 满足 $(z, y) \in R_j$, 于是 $\sum_{j=0}^d p_{ij}^k = k_i$, 因此 (v) 成立.

(vi) 计算满足下面条件的三元组 (x, y, z) 的个数:

$$(x, y) \in R_\gamma,\ \ (x, z) \in R_\alpha,\ \ (z, y) \in R_\beta.$$

取定 x, 使 $(x, y) \in R_\gamma$ 的 y 有 k_γ 个. 对于每个这样的 y 有 $p_{\alpha\beta}^\gamma$ 个 z 使得 $(x, z) \in R_\alpha$ 及 $(z, y) \in R_\beta$. 因此满足上面条件的三元组 (x, y, z) 的个数为 $|X| k_\gamma p_{\alpha\beta}^\gamma$.

若先取 z, 那么满足 $(z, y) \in R_\beta$ 的 y 有 k_β 个. 对于每个这样的 y 有 $p_{\alpha'\gamma}^\beta$ 个 x 满足 $(x, z) \in R_\alpha$ 及 $(x, y) \in R_\gamma$. 因此满足上面条件的三元组 (x, y, z) 的个数为 $|X| k_\beta p_{\alpha'\gamma}^\beta$.

同理, 若先取定 x, 满足 $(x, z) \in R_\alpha$ 的 z 有 k_α 个. 对于每个这样的 z 有 $p_{\gamma\beta'}^\alpha$ 个 y 满足 $(x, y) \in R_\gamma$ 及 $(y, z) \in R_{\beta'}$. 因此满足上面条件的三元组 (x, y, z) 的个数为 $|X| k_\alpha p_{\gamma\beta'}^\alpha$. 这就证明了 (vi) 成立.

(vii) 对于一个取定的对子 $(x, y) \in R_l$, 计算满足下面条件的对子 (z, w) 的个数:

$$(x, z) \in R_k,\ \ (z, w) \in R_i,\ \ (w, y) \in R_j.$$