原考研数学命题组组长
清华大学胡金德教授作序并推荐

Spark® 星火书业

考研数学备考教材

8年考研 3年分类模拟

BANIANKAOYANSANNIANFENLEIMONI

8年考研真题 准确透视命题规律
3年分类模拟 权威把握考研趋势
系统复习理念 全线突破数学难关

2007

主编 考研数学资深辅导专家 张天德教授

数学（理工类）

新 华 出 版 社

Spark® 星火书业

考研数学备考教材

8年考研 3年分类模拟

BANIANKAOYANSANNIANFENLEIMONI

数学(理工类)

主　编　张天德　张全信

副主编　王　玮　吴　强　郑修才　叶　宏

2007

新　华　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

8年考研·3年分类模拟/张天德主编. —北京:新华出版社，2006.1

ISBN 7-5011-7340-0

Ⅰ.8...　Ⅱ.张...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第151933号

8年考研·3年分类模拟

张天德　主编

*

新 华 出 版 社 出 版 发 行

(北京市石景山区京源路8号　邮编:100043)

新 华 书 店 经 销

德州文源印务有限公司印刷

*

787×1092毫米　16开本　32.75印张　800千字

2006年2月第1版　2006年2月第1次印刷

ISBN 7-5011-7340-0　定价:38.80元

序

纵观考研数学辅导教材市场，鱼龙混杂，既有结构严谨、内容详实的名家名作，也不乏毫无新意的平庸之作、东拼西凑的剽窃之作，张天德教授的这本《8年考研3年模拟》令我耳目一新。

张天德教授近年来一直在全国十几个城市的大型考研辅导班授课，深受全国各地考生的欢迎。同时张教授也是国家硕士研究生入学考试数学阅卷组负责人，之前已有数十本教材出版。为了创作一本实用的考研数学辅导教材，正确引导广大考生进行研究生入学考试的总复习，张教授结合他十几年的考研辅导经验，投入了大量心血，搜集相关资料，写成了针对广大考研学生的《8年考研3年模拟》一书。

浏览过后，我觉得这本书特点鲜明，确实全面贯彻了系统复习的理念——概念公式方法是基础、真题掌握是关键、模拟预测是突破，从而准确、到位地把握了考研数学复习中最重要的三个方面。而本书系统复习理念又和考研数学复习的三个阶段紧密结合起来。

从阶段上看，我们的考研数学复习一般应分为三个阶段，即基础知识的掌握与回顾阶段、考研知识点的针对性强化复习阶段以及最后的模拟冲刺阶段。本书概念·公式·方法是基础的理论适用于考研复习的第一个阶段，夯实基础，掌握科学的解题策略和技巧是备考的必备条件；真题掌握是关键适用于第二个阶段，这一阶段的复习重点是掌握真题的命题规律，掌握和吃透真题；模拟预测是突破适用于第三个阶段，这一阶段要选择与真题相似度高的模拟试题来演练，以保证备考的正确方向。

这本书的栏目设置也颇有新意。考纲解读、8年考研、规律方法、知识清单、3年模拟、概念公式方法、答案全解全析，这七大新颖的栏目能够解决考研学子在考研复习过程中的问题，全程贯彻了数学考研系统复习的理念，并把这一理念科学地运用于考研复习的三个阶段，使考研数学的备考复习更加有效。

我认为这本书不愧为一本实用、新颖的考研数学复习教材，也是编者多年进行大学数学教学和考研辅导实践经验的总结。这本书不仅可作为硕士研究生入学考试应试者的复习用书，也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的高等院校学生的参考书。

作为广大考研学生的“老”朋友，我十分高兴地向大家推荐这本具有较高实用价值的图书，相信对广大考生考研数学备考会有一定帮助。

清华大学数学科学系

2006年2月

Preface

前 言

2006年国家教育部对硕士研究生入学考试数学大纲进行了修订，大纲变动不大，但也增加了一些新的知识点，这对考生的要求进一步增强。新的变化、新的要求，使数学在考研复习中的重要地位更加令人不敢忽视。一边是考试要求的不断提高，一边是众多学子因为数学分数过低而含泪折戟、败走麦城。数学，越来越成为广大考生在考研路上难以逾越的一道坎、难以释怀的一个结。

本书是一本理工类考研学生备考数学的教材，由长期从事考研数学辅导和大学数学教学、研究的一线名师编写而成。八年考研真题，准确透视命题规律；三年分类模拟，权威把握考研趋势。

本书最大的特点是紧跟最新考研数学大纲，在深入领会考研数学大纲精髓，详细研究八年考研真题，反复设计编排模式，多次比较不同效果的基础上，博取众家之长、独辟蹊径，旗帜鲜明地贯彻系统复习理念——概念·公式·方法是基础、真题掌握是关键、模拟预测是突破，从而准确、到位地把握了考研数学复习中最重要的三个方面。我们充分渗透了上述系统化复习理念，独具匠心地将三者统一，设计、推出了这本高效、实用、新颖的考研数学复习教材《8年考研3年模拟》，将给您的数学复习带来令人欣喜的显著效果和快速提升。

概念·公式·方法是基础

从近年的考题可以看出，基本概念、基本公式和基本方法一直是考试的重点。纵观历年的数学统考试题，没有一道偏题或怪题。在多年参加全国统考试卷评阅过程中，我们通过对考生的答卷进行分析，发现部分考生失分的一个主要原因就是对基本概念、定理记不全、掌握不牢固，理解不准确，解题不规范。

因此，注重基础是复习的基本方向。在复习中，考生一定要掌握各部分知识间的联系和区别，理解基本概念和性质的内涵与外延，以便于提高解答综合试题的能力。本书概念·公式·方法栏目能有效帮助考生解决这一基本问题。

真题掌握是关键

众多考研辅导名师解析新大纲时给考生的复习建议无一不包含真题是关键的思想，吃透考研数学真题应是备考的必由之路。我们的目标是通过历年真题的分类、分析、总结，一方面帮助考生深入掌握考研数学命题的特点和规律，彻底清除复习中的盲点，使备考事半功倍；另一方面又为考生提供了经验和教训，使考生能扬长避短、集中精力攻克难关。

我们以8年考研真题为素材，按照所属知识点分类汇总，进行全方位透析，旨在引领考生综观考研命题特征，把握考研命题趋势，真正让考生做到"知己知彼"，使备考更具时效性，从而对2007年的考研胸有成竹。

模拟预测是突破

目前市场上的一些考研辅导书良莠不齐，题海战术层出不穷，编者建议考生千万不要盲目购买此类辅导书，做一些毫无意义的超纲题、偏题、难题、怪题，使得事倍功半。

本书严格按照最新考研数学大纲的具体要求编写，采用全真试题的体例与格式，保证考研学子备考复习的正确方向。3年分类模拟题与8年考研真题的相似度高，皆为考研命题中的知识点，且考试的命中率高，能使广大考生达到事半功倍的备考效果。

本书栏目设置七大特色：

本书各部分编写的主线为"考纲解读"、"8年考研"、"规律方法"、"知识清单"、"3年模拟"、"概念·公式·方法"、"答案全解全析"。

考纲解读 全真分类展示2006年考试大纲；

8年考研 优化组合1998—2005年考研数学试题，麻雀式剖析考研真题命题规律；

规律方法 详尽分析考研数学命题规律，努力探究考研数学突破方法；

知识清单 全面总结考研数学所有知识点，以图表形式讲解更加清晰，让您一目了然，铭记于心；

3年模拟 精选2003—2005年考研数学优秀模拟试题，由考研一线辅导名师根据考研命题规律与趋势，按照考研题型严格编排，能准确把握三年模拟跳动脉搏；

概念·公式·方法 基本概念、基本公式和基本方法夯实基础，巩固所学；解题攻略、解题技巧，科学指导备考解题；

答案全解全析 权威规范解答试题，全面详尽解析试题，科学点拨解题规范，使考生灵活运用、触类旁通。所有试题均采用分析、注释、一题多解等讲法，真正全解全析，以明示解题方法与技巧。其中模拟题特色鲜明，比正式试卷略难些，且包含相当数量的综合题和应用题，力求以实战为主。

需特别说明的是，考研真题的收集和整理，得到了清华大学、北京大学、中国人民大学、复旦大学、浙江大学、山东大学、武汉大学、吉林大学等校众多名师的协助。在此书出版之际，特表示由衷感谢！

衷心希望我们精心打造的这本《8年考研3年模拟》能对您有所裨益。相信本书会为备考2007年硕士研究生入学考试的学子带来好运！

编　者

2006.2

Contents

目 录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

*第三篇　概率论与数理统计

注：加 * 内容数学二不考

第一章 函数·极限·连续

第一单元 函 数

考纲解读

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立

内容解读

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立函数关系式.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数概念.

命题趋势

以考查函数的概念及四种性质为主，题型主要是填空题、选择题，而以计算、证明题形式的可能性很小. 另外，以本单元的知识为工具和其他知识结合的综合题目应作为备考的重点.

8年考研

一、填空题

1. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$ ______，定义域为______.

解　因为 $f(x)=e^{x^2}$，所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$

而 $f[\varphi(x)]=1-x$，因此 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$

对上式两端取对数，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，有 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$

故应填 $\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_1(x)=f[f(x)]$，$f_2(x)=f[f_1(x)],\cdots,f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$ $(n=1,2,\cdots)$. 则 $f_n(x)=$ ______.

解　$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f_1(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

一般地，可用数学归纳法证明

概念·公式·方法

函数的概念　设有两个变量 x 与 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的规则总有惟一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

反函数的概念　设函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别为 D 与 W，若对于变量 y 在 W 中的每一个值，变量 x 在 D 中都有满足 $f(x)=y$ 的惟一确定的值和它对应，则 x 是 y 的函数，记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，并称 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=\dfrac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$

$(n=2,3,4\cdots)$

故应填$\dfrac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$.

3. 设 $f(x+1)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,则

$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=$________.

解　因为 $f(x+1)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}=\ln\dfrac{x+1-2}{x+1}$

所以 $f(x)=\ln\dfrac{x-2}{x}$

又因为 $f[\varphi(x)]=\ln\dfrac{\varphi(x)-2}{\varphi(x)}=\ln x$,即

$\dfrac{\varphi(x)-2}{\varphi(x)}=x$

所以 $\varphi(x)=\dfrac{2}{1-x}$,

$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{2}{1-x}\mathrm{d}x=-2\ln|1-x|+C$

故应填 $-2\ln|1-x|+C$.

4. 设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\dfrac{1}{3}\sin f\left(\dfrac{1}{3}x\right)=x$,则

$f(x)=$________.

解　令 $g(x)=\sin f(x)$,则

$g(x)-\dfrac{1}{3}g\left(\dfrac{1}{3}x\right)=x$

$\dfrac{1}{3}g\left(\dfrac{1}{3}x\right)-\dfrac{1}{3^2}g\left(\dfrac{1}{3^2}x\right)=\dfrac{1}{3^2}x$

$\dfrac{1}{3^2}g\left(\dfrac{1}{3^2}x\right)-\dfrac{1}{3^3}g\left(\dfrac{1}{3^3}x\right)=\dfrac{1}{3^4}x$

……

$\dfrac{1}{3^{n-1}}g\left(\dfrac{1}{3^{n-1}}x\right)-\dfrac{1}{3^n}g\left(\dfrac{1}{3^n}x\right)=\dfrac{1}{3^{2(n-1)}}x$

以上各式相加,得

$g(x)-\dfrac{1}{3^n}g\left(\dfrac{1}{3^n}x\right)$

$=x\left[1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9^2}+\cdots+\dfrac{1}{9^{n-1}}\right]$

因为 $|g(x)|\leqslant1$　所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}g(\dfrac{1}{3^n}x)=0$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9^2}+\cdots\dfrac{1}{9^{n-1}}\right]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{9}{8}$

因此 $g(x)=\dfrac{9}{8}x$,于是 $f(x)=2k\pi+\arcsin\dfrac{9}{8}x$ 或 $f(x)=(2k-1)\pi-\arcsin\dfrac{9}{8}x.\ (k\in\mathbf{Z})$

故应填 $2k\pi+\arcsin\dfrac{9}{8}x$

或 $(2k-1)\pi-\arcsin\dfrac{9}{8}x.\quad(k\in\mathbf{Z})$

二、选择题

5. (2001) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\0, & |x|>1\end{cases}$

则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于______.

(A)0　　(B)1

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant1\\1, & |x|>1\end{cases}$

解　由 $f[f(x)]=1$ 得　$f\{f[f(x)]\}=1$

故应选(B).

6. (2005) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有______.

(A)$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B)$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C)$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D)$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解　(B) 不成立. 反例:$f(x)=x^2,F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+1$

(C) 不成立. 反例:$f(x)=\cos x+1,F(x)=\sin x+x$

(D) 不成立. 反例:$f(x)=2x,F(x)=x^2$

$(x\in\mathbf{R})$

故应选(A).

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,则 $f(x)$ 是______.

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 不能确定

解　因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,所以 $f(0)$

概念·公式·方法

初等函数

(1) 基本初等函数　常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六种函数称为基本初等函数.

(2) 初等函数　凡是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成,并可用一个数学式子表示的函数,称为初等函数.

$=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0), f(0)=0$. 因为 $0=f(0)=f(x-x)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$

所以 $f(-x)=-f(x)$

因此,$f(x)$ 是奇函数.

故应选(A).

8. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$,则 $f[g(x)]=$ ______.

(A) $\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 1-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 当 $x\geqslant 0$ 时,$g(x)=-x\leqslant 0$.

所以 $x\geqslant 0$ 时 $f[g(x)]=1+x$

当 $x<0$ 时,$g(x)=x^2>0$

所以 $x<0$ 时 $f[g(x)]=x^2+2$

故应选(D).

三、计算、证明题

9. 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, x<-2\\ 5-x, -2\leqslant x\leqslant 2\\ 1-(x-2)^2, x>2\end{cases}$ 的值域,并求它的反函数

解 当 $x<-2$ 时,$y=3-x^3, x=\sqrt[3]{3-y}$

$y>3+8=11$

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=5-x, x=5-y$

$3\leqslant y\leqslant 7$

当 $x>2$ 时,$y=1-(x-2)^2, x=2+\sqrt{1-y}$

$y<1$

所以 $y=f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1)\cup[3,7]\cup(11,+\infty)$

反函数 $y=\begin{cases}2+\sqrt{1-x}, & x<1\\ 5-x, & 3\leqslant x\leqslant 7\\ \sqrt[3]{3-x}, & x>11\end{cases}$

10. 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数

(2) 求 $f(x)$ 的值域

(1) 证明 $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,dt$

$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,du=f(x)\qquad (t=u+\pi)$

所以 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) 解 只需讨论 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域,为此,先找出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值和最小值.

$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|$

$=|\cos x|-|\sin x|$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=\frac{\pi}{4}, x_2=\frac{3}{4}\pi$.

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上没有不可导的点,有两个端点 0 和 π.

比较 $f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{3}{4}\pi\right), f(\pi)$ 的函数值.

$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin t\,dt=\sqrt{2}$

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\,dt$

$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\,dt=2-\sqrt{2}$

$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-\sin t)\,dt=1$

所以,$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上最小值为 $2-\sqrt{2}$. 最大值为 $\sqrt{2}$.

因此,$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上值域为 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

11. 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$,求 $f(x)$.

解 令 $\frac{x+1}{x-1}=t$ 则 $x=\frac{t+1}{t-1}$

于是 $f(t)=3f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-\frac{2t+2}{t-1}$

$=3[3f(t)-2t]-\frac{2t+2}{t-1}$

$8f(t)=6t+2\frac{t+1}{t-1}$

所以 $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x-1}$

概念·公式·方法

函数的主要性质

(1) 有界性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在一个正常数 M,使得对于 x 在 D 上的任意取值,均有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2) 单调性 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义,如果对于 D 上任意两点 x_1, x_2,且 $x_1<x_2$,均有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加(单调减少). 单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

12. 设 $b > a$ 均为常数，求方程

$\sin(x+b)\ln[(x+b)+\sqrt{(x+b)^2+1}] = \sin(x+a)\ln[(x+a)+\sqrt{(x+a)^2+1}]$ 的一个解.

解　因为 $\sin t$ 和 $\ln(t+\sqrt{t^2+1})$ 均为奇函数

所以 $f(t) = \sin t\ln(t+\sqrt{t^2+1})$ 是偶函数

如果 $(x+b) = -(x+a)$

则 $f(x+b) = f(x+a)$ 方程成立

因此 $x = -\dfrac{1}{2}(a+b)$ 是方程的一个解.

规律方法

命题规律

函数是高等数学的主要研究对象. 在考研中，以直接或间接的形式成为每年必考的内容之一. 主要题型有：

1. 求分段函数或复合抽象函数的表达式，求分段函数的反函数的表达式.

2. 讨论函数的四大特性.

突破方法

(一) 学法指导

掌握函数的定义域及对应关系两大要素，理解函数的四种性质. 熟悉复合函数以及经过四则运算后所得函数的奇偶性、周期性的变化规律.

(二) 解题指导

1. 求分段函数的复合函数的表达式常用代入或分段代入法.

2. 求抽象函数的表达式常先求其导函数，积分后得所求函数.

3. 用定义讨论函数单调性、奇偶性、有界性及周期性.

知识清单

函数
- 定义域，值域
- 函数解析表达式
- 有界性
- 单调性
- 奇偶性
- 周期性

3年模拟

2004 年模拟专题探究性训练

一、填空题

1. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geqslant 0 \\ -e^x, & x < 0 \end{cases}$　$\varphi(x) = \ln x$

则 $f[\varphi(x)] =$ ________.

2. 函数 $y = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3^x, & x > 2 \end{cases}$ 的反函数为________.

二、选择题

3. 函数 $y = \sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是______.

(A) $[-1,1]$　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(C) $[0,1]$　(D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

4. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y = x - [x]$ 是______.

(A) 无界函数　(B) 周期为 1 的周期函数

(C) 单调函数　(D) 偶函数

三、计算、证明题

5. 设 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8 = (2x-1)^8$

求　$a_1 + a_2 + \cdots + a_7$

6. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加函数，且 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，证明 $f[f(x)] \leqslant g[g(x)] \leqslant h[h(x)]$

2005 年模拟专题探究性训练

一、填空题

1. 已知 $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为________.

2. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

$\psi(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leqslant 1 \\ 2, & |x| > 1 \end{cases}$

则 $\varphi[\psi(x)] =$ ________.

二、选择题

3. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leqslant 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

概念·公式·方法

(3) **奇偶性**　设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，如果对 D 上任意点 x，均有 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$)，则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

(4) **周期性**　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在正常数 T，使得对于 D 上任意 x，均有 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，使上式成立的最小正数为周期函数的周期.

则 $f(-x)$ 等于______.

(A) $f(-x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ -\cos x, & x>0\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-\cos x, & x<0\\ e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ e^{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 的定义域为______.

(A) $x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0$

(B) $x\in\mathbf{R}$，但 $1+\dfrac{1}{x}\neq 0$

(C) $x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$

(D) $x\in\mathbf{R}$，但 $x\neq 0,-1$

三、计算、证明题

5. 求 c 的一个值，使 $(b+c)\sin(b+c)-(a+c)\sin(a+c)=0$，这里 $b>a$，均为常数.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意 x，$y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ 证明 $F(x)=f(x)+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

2006年模拟专题探究性训练

一、填空题

1. 设 $f(x)=\tan x$，$f[g(x)]=x^2-2$，且 $|g(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{4}$. 则 $g(x)$ 的定义域为________.

2. 函数 $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$ 的反函数为________.

二、选择题

3. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$，$g[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[g(x)]$，则其中为奇函数的是______.

(A) $f[f(x)]$　　(B) $g[f(x)]$

(C) $f[g(x)]$　　(D) $g[g(x)]$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 的值域是______.

(A) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　　(B) $[0,1]$

(C) $[-1,0]$　　(D) $[-1,1]$

三、计算、证明题

5. 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$.

6. 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

第二单元 极限与连续

考纲解读

考试内容

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

概念·公式·方法

函数的解析表达式表达了 x 和 y 的对应关系，它包括显式、隐式和参数式三种形式.

显式：形如 $y=f(x)$ 的称作显式，它最直观，也是初等函数一般采用的形式.

隐式：有时有些关系用显式无法完全表达，这时要用到隐式，形如 $F(x,y)=0$，如椭圆函数 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

参数式：形如平抛运动的轨迹方程 $\begin{cases}x=vt\\ y=\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$ 称作参数式. 参数式将两个变量的问题转化为一个变量的问题，从而使很多难以处理的问题简化.

内容解读

1. 理解极限的概念，理解函数左极限右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

2. 掌握极限的性质及四则运算法则.

3. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

4. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

5. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

命题趋势

以考查函数极限、连续概念及性质为主，题型主要以填空、选择及计算证明题为主，是每年考研的必考内容.

8 年考研

一、填空题

1. (1999) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=$ ______.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{-x}{1+x}}=-\frac{1}{2}$$

故应填 $-\dfrac{1}{2}$.

2. (2001) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ______.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{(x+2)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{x+2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

故应填 $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

3. (1999) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ______.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

故应填 $\dfrac{1}{3}$.

4. (2002) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$ ______.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi i}{n}}$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{\pi i}{n}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

故应填 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

5. (2002) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 x

概念·公式·方法

函数极限的定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内(点 x_0 可除外)有定义，A 为一个常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在一个正数 δ，使得满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

左极限和右极限的定义 若对于满足 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 自 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限，即左(右)极限.

$=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} ae^{2x}=a$$

由连续定义知:$a=-2$.

故应填 -2.

二、选择题

6. (1998) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是______.

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

解 (A),(B) 显然不对.若 x_n 有界,且 y_n 为无穷小,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,但反之不一定,故(C)也不对.(D)正确.因为,若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$.而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{\dfrac{1}{x_n}}=0$,故必有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

故应选(D).

7. (1999)"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的______.

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件又非必要条件

解 本题应选(C).

8. (2000) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为______.

(A)0 (B)6 (C)36 (D)∞

解法一 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,根据极限与无穷小的关系知:

$\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小量.故 $f(x)=x^2\alpha(x)-\dfrac{\sin 6x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+x^2\alpha(x)-\dfrac{\sin 6x}{x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\alpha(x)+\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$=0+\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{2x}=36$$

故应选(C).

解法二 用泰勒公式.题设相当于 $\sin 6x+xf(x)=o(x^3)$,将

$$\sin 6x=6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)$$

代入,得 $6x-36x^3+xf(x)=o(x^3)$,从而得

$$6+f(x)=36x^2+o(x^2)$$

于是 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$$

故应选(C).

注 解此题最易犯的错误,是不考虑 $f(x)$ 是否满足条件而使用洛必达法则,结果花费了不少时间还未必得到正确的结论.其次不少人选(A),是认为

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}.$$

在这里,用 6 替换 $\dfrac{\sin 6x}{x}$ 是错误的!

9. (1999) 设 $\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt$,$\beta(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的______.

(A) 高阶无穷小

(B) 低阶无穷小

概念·公式·方法

极限的性质及运算法则

(1) 惟一性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 A 必惟一.

(2) 有界性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域(x_0 除外)内是有界的.

(3) 保号性 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域(x_0 除外)内均有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

(C) 同阶但不等价的无穷小

(D) 等价无穷小

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}$

$\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin5x}{5x}\cdot5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cos x}$

$=5\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin5x}{5x}=\dfrac{5}{\mathrm{e}}$

故 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶但不等价无穷小.

故应选(C).

10. (2001)设当 $x\to0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比$(\mathrm{e}^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于______.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x^{n+1}}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{n-3}}=0$

故 $n<3$.

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x^n}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{n+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}=0$,故 $n>1$,综上,$n=2$.

故应选(B).

11. (2000)设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a,b 满足______.

(A)$a<0,b<0$ (B)$a>0,b>0$

(C)$a\leqslant0,b>0$ (D)$a\geqslant0,b<0$

解 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}=0$ 知:$a+\mathrm{e}^{bx}$ 应为 ∞,故 $x\to-\infty$ 时,$b<0$.

若 $a<0$,则 $f(x)$ 应有间断点 $x=\dfrac{\ln(-a)}{b}$,这与 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$连续矛盾,故 $a\geqslant0$.

故应选(D).

三、计算、证明题

12. (2000)求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解 因 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$=2-1=1$

由极限存在的充要条件得

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

13. (1999)设 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

证明 由题设可得

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)\qquad(k=1,2,\cdots)$$

因此
$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)\\&\geqslant0\end{aligned}$$

即数列$\{a_n\}$有下界,又

$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant0$$

即数列$\{a_n\}$单调下降,故由单调有界数列必有极限的准则知数列$\{a_n\}$的极限存在.

14. (2002)设 $0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$$(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

解 由 $0<x_1<3$,知 $x_1,3-x_1$ 均为正数,故
$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}$$

概念·公式·方法

(4) 充要条件 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$ $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ $(\lim\alpha=0)$

(5) 运算法则 设 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均存在,则

$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$ $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq0)$

设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}(k>1)$,则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2}$$

由数学归纳法知,对任意正整数 $n>1$ 均有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$,因而数列$\{x_n\}$有界.

又当 $n>1$ 时,

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0$$

因而有 $x_{n+1}\geqslant x_n(n>1)$,即数列$\{x_n\}$单调增加.

由单调有界数列必有极限知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限,得

$$a=\sqrt{a(3-a)}$$

解之得 $a=\frac{3}{2}$,$a=0$(舍去)

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

15. (1998)求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$

解
$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$

另一方面,

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n+1}(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n})=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n})=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$

所以,由夹逼定理知原式 $=\frac{2}{\pi}$.

16. (2000)设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,dt$,

(1) 当 n 为正整数,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

解 (1) 因为 $|\cos x|\geqslant 0$,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$,所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,dx\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,dx$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数,在每个周期上积分值相等,所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,dx=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=2n$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,dx=2(n+1)$$

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,有

$$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$$

(2) 由(1)知,当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

令 $x\to+\infty$,由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$$

17. (1998)确定常数 a,b,c 的值,使

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\quad(c\neq0).$$

解 由于 $x\to0$ 时,$ax-\sin x\to0$,且极限 c 不为零,所以当 $x\to0$ 时,$\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt\to0$,故必有 $b=0$.

概念·公式·方法

(6) 两个准则

准则 Ⅰ 若存在 x_0 的某去心邻域,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 成立,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

准则 Ⅱ 单调有界数列必有极限

(7) 两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$