高中数学

能力激活

（二年级下）

主编 李秋明

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高中数学能力激活

（二年级下）

主　编　李秋明

副主编　肖恩利　杨丽婷　张敏峰

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学能力激活，二年级，下／李秋明主编．—北京：高等教育出版社，2005.1
ISBN 7-04-013611-2

Ⅰ．高… Ⅱ．李… Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 004587 号

责任编辑 张尕琳　　封面设计 吴 昊　　责任印制 蔡敏燕

书　　名 高中数学能力激活（二年级下）
主　　编 李秋明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800-810-0598
总　　机	010-82028899	网　　址	http: //www.hep.edu.cn
传　　真	021-56965341		http: //www.hep.com.cn
			http: //www.hepsh.com

排版校对 南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷 上海师范大学印刷厂

开　　本	787×1092 1/16	版　　次	2005 年 1 月第 1 版
印　　张	8.25	印　　次	2005 年 1 月第 1 次
字　　数	196 000	定　　价	12.50 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

前　言

在二期课改教材即将全面推开之际，编者深感与之配套的，能帮助学生深化概念、掌握方法、拓展能力的学习参考书的匮乏．作为二期课改的试点学校，复旦大学附属中学在几年的新教材使用过程中，就如何提高学习效率、激发学生的学习兴趣、培养学习能力方面积累了一定的经验．

本书的编写所着力体现的特点有以下几个：

1．体现复旦大学附属中学的数学教学特点

复旦大学附属中学是一个有着优良数学教学传统的学校，在高考、数学奥林匹克竞赛以及研究性学习中都取得了辉煌的成绩．因此在本书的编写过程中，力图体现该校数学课堂扎实、严谨、灵活的风格，使更多的学生能享有该校的优质教学资源．

2．体现二期课改的教育理念，与二期课改教材同步配套

本书以二期课改的学科课程标准和教材为依据，内容紧密配合课本，旨在帮助学生在学习过程中更高效地掌握数学概念和方法，拓展学习能力．

3．以能力培养为核心来精选例题和练习题

本书的每章节大致包含[知识要点]、[基础训练]、[精选例题]和[能力训练]共4个板块，精选与学生能力培养密切相关的例题和练习．例题都是经典而有代表性的，几乎每例都有相应的“解法指导”．同时练习适量，避免“题海”．本书引导学生在看书、练习的同时，深入思考数学概念的本质，切实掌握方法，提高学习能力．

本书的编写者都是承担重要教学任务的复旦大学附属中学数学教研组的一线任课教师，由上海市特级教师李秋明担任主编，肖恩利、杨丽婷、张敏峰任副主编，参加编写工作的还有张建国和姚莉．

由于编者水平所限，加之编写时间仓促，书中难免会有一些错误和问题，敬请读者批评指正．

编　者

2005年1月

目　录

第十三章　排列组合与二项式定理

本章导言

本章是高中数学中相对独立的一部分，从内容到方法都比较独特. 排列组合是概率论的基础知识，讨论在一定条件下完成某件事情可以采用的方法总数；加法原理和乘法原理是分析和解决排列和组合问题的基本原则；二项式定理是所有上述内容的一个重要应用. 在实际使用这些计数原则和方法时，既需要具体问题具体分析，又需要善于总结经验，总结规律.

13.1　乘法原理和加法原理

知识要点

1. 乘法原理

如果完成一件事情需要分 n 个步骤完成，第 1 步有 m_1 种不同的方法，第 2 步有 m_2 种不同的方法，……，第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事情共有 $N=m_1m_2\cdots m_n$ 种不同的方法.

2. 加法原理

如果完成一件事情有 n 类办法，第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事情共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

乘法原理和加法原理是处理各种排列组合问题的基础，要正确理解其意义，要点在于加法原理中的分类和乘法原理中的分步，正确地分类与分步是学好这一章的关键.

基础训练

1. 有 1 分，2 分，5 分硬币各一枚，可以组成________种面值不同的人民币.

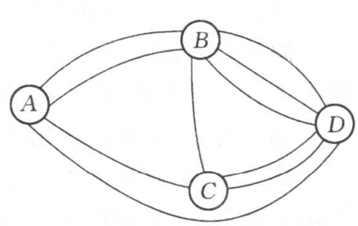
2. 乘积 $(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)(c_1+c_2+c_3)$ 展开后最多有________项.

3. 一支乒乓球队由 10 名男队员和 8 名女队员组成.

(1) 要从这些队员中挑选一名男队员和一名女队员配成一组去参加男女混合双打比赛，有________种不同的搭配方法；

(2) 要从男队员或女队员中任选一人去登台领奖，有________种不同的选法.

4. 如图，从 A 地到 D 地，有________种不同的路线.



(第 4 题)

精选例题

例 1 将 4 封不同的信投入 3 个不同的信箱，有多少种不同的投法？

解法指导 对要完成的事情正确的“分步”或“分类”.

解 将“投 4 封信”这件事分 4 步完成，每投一封信作为一步，每步都有投入 3 个不同信箱的 3 种方法，有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ 种不同的投法.

本题也可以这样分类完成：①4 封信投入一个信箱中，有 C_3^1 种投法；②4 封信投入 2 个信箱中，有 $C_3^2(C_4^1 \cdot P_2^2 + C_4^2 \cdot C_2^2)$ 种投法；③4 封信投入 3 个信箱，有 2 封信在同一信箱中，有 $C_4^2 \cdot P_3^3$ 种投法，故共有

$$C_3^1 + C_3^2(C_4^1 \cdot P_2^2 + C_4^2 \cdot C_2^2) + C_4^2 \cdot P_3^3 = 81$$

种投法.

注 第二个解法是综合使用了乘法原理和加法原理，一般的步骤是：先分类，后分步.

例 2 有 4 位学生参加 3 项不同的竞赛.

(1) 每位学生必须参加一项竞赛，则有几种不同的参赛方法？

(2) 每项竞赛只许有一位学生参加，则有几种不同的参赛方法？

(3) 每位学生最多参加一项竞赛，每项竞赛只许有一位学生参加，则有多少种不同的参赛方法？

解法指导 处理元素或位置有限制的计数问题，应明确受限制的主体，然后选用合适的角度.

解 (1) 学生可以选择项目，而竞赛项目对学生无条件限制，所以有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ 种不同的参赛方法.

(2) 竞赛项目可以挑学生，而学生无选择项目的机会，每一项可以挑 4 种不同学生，共有 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 种不同的参赛方法.

(3) 等价于从 4 个学生中挑选 3 个学生去参加三个项目的竞赛，每人参加一项，共有 $C_4^3 \cdot P_3^3 = 24$ 种不同的参赛方法.

注 处理限制条件较多的计数问题，应注意条件的合理转化.

例 3 同室 4 人各写一张贺年卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡，则 4 张贺年卡有多少种不同的分配方式？

解法指导 这个问题的一般形式是：将排好的 n 个不同元素重新错排，使每一个元素都不在原来的位置上.

解法一 用穷举法将所有情况列举出，共有 9 种分配方式.

解法二 记 4 人为甲、乙、丙、丁，则甲送出的卡片可以且只可以由其他三人之一收到，故有 3 种分配方式；以乙收到为例，其他人收到卡片的情况可分为两类.

第一类：甲收到乙送出的卡片，这时丙、丁只有互送卡片 1 种分配方式；

第二类：甲收到的不是乙送出的卡片，这时，甲收到卡片的方式有 2 种(分别是丙和丁送出的). 对每一种情况，丙、丁收到卡片的方式只有一种.

因此，根据乘法原理，不同的分配方式数为 $3 \times (1 + 2) = 9$.

注 本题是“错排问题”的一个简化，当元素数目较大时，必须用容斥原理求解，但元素数目较小时，应用乘法原理和加法原理便可以求解，或可以穷举.

例 4 已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a、b、c 是取自集合 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角，求符合这些条件的直线的条数.

解法指导 直线 $ax+by+c=0$ 的倾斜角为锐角的充要条件是 $ab<0$.

解 设倾斜角为 θ，由 θ 为锐角，得 $\tan\theta=-\dfrac{a}{b}>0$，即 a、b 异号.

① 若 $c=0$，a、b 各有 3 种取法，排除 2 个重复 $(3x-3y=0,\ 2x-2y=0,\ x-y=0)$，故有 $3\times3-2=7$ 条直线.

② 若 $c\neq0$，a 有 3 种取法，b 有 3 种取法，而同时 c 还有 4 种取法，且其中任两条直线均不相同，故这样的直线有 $3\times3\times4=36$ 条，从而符合要求的直线共有 $7+36=43$ 条.

注 本题要注意正确分类.

例 5 如图 13-1 所示，给 a、b、c、d 四个区域分别涂上五种颜色中的某一种，允许同一颜色使用多次，但相邻区域必须涂不同颜色，那么有多少种不同的涂色方法?

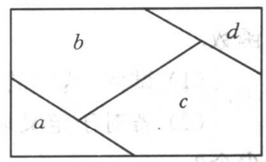


图 13-1

解法指导 将区域分步染色，利用乘法原理.

解 按区域分为四步：

对区域 a，5 种颜色都可以使用，所以有 5 种涂法；由于 b 与 a 相邻，所以当 a 涂色后，区域 b 只能从剩余四种颜色中选一种来涂色，所以区域 b 有 4 种涂法；对于区域 c，由于它与 a、b 都相邻，所以当 a、b 涂色后，区域 c 有 3 种涂法；对于区域 d，它只与 b、c 相邻，所以当 b、c 涂色后，区域 d 也有 3 种涂法. 所以共有 $5\times4\times3\times3=180$ 种涂色方法.

注 当区域的数目增多时，要妥善处理区域间的相邻关系与其可染颜色之间的关系.

能力训练

一、选择题

1. 10 个苹果分成 3 堆，要求每堆至少 1 个，至多 5 个，则不同的分法共有(　　).

(A) 4 种　　(B) 5 种　　(C) 6 种　　(D) 7 种

2. 4 封信投入 3 个信箱，则不同的投法种数为(　　).

(A) 64　　(B) 12　　(C) 81　　(D) 24

3. 若 $m\in\{2, 5, 8, 9\}$，$n\in\{1, 3, 5, 7\}$，方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 表示中心在原点，焦点在 x 轴上的相异椭圆的个数为(　　).

(A) 11　　(B) 16　　(C) 8　　(D) 10

4. 6 个小组去 3 所中学实习，每所中学去 2 组，则分配方案的种数是(　　).

(A) 90　　(B) 45　　(C) 18　　(D) 15

5. 现有 8 名青年，其中有 5 名青年能胜任英语翻译工作，有 4 名青年能胜任电脑软件设计工作，且每人至少能胜任其中的一种工作. 若从中选派 5 名青年承担一项任

务，其中 3 人从事英语翻译工作，2 人从事电脑软件设计工作，则不同的选法种数为(　　).

(A) 60　　(B) 54　　(C) 42　　(D) 30

6. 4 名学生争夺 3 项冠军，每名学生最多参加一项比赛，每项比赛最多有一个冠军，获得冠军的可能的种数是(　　).

(A) 81　　(B) 64　　(C) 24　　(D) 4

二、解答题

7. 从 1～999 的自然数中，仅含有一个数字 0 的所有自然数有多少个?

8. 已知 $y = f(x)$ 是定义域为 $A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 7,\ x \in \mathbf{N}\}$，值域为 $B = \{0,\ 1\}$ 的函数.

(1) 试问：这样的函数共有多少个?

(2) 若对于定义域中 x 的 4 个不同的元素，对应的函数值都是 1，则这样的函数共有多少个?

13.2 排　　列

知识要点

从 n 个不同元素中任意取出 m $(m \leqslant n)$ 个按照一定的次序排成一列，共有 P_n^m 种不同的排法，其中

$$\mathrm{P}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

n 个不同元素全部取出的一个排列，这时排列公式中 $m = n$，即

$$\mathrm{P}_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

记 $n! = \mathrm{P}_n^n$，则 $\mathrm{P}_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

对于带限制条件的排列问题，通常从以下三种途径考虑.

(1) 元素分析法：先考虑特殊元素要求，再考虑其他元素；

(2) 位置分析法：先考虑特殊位置的要求，再考虑其他位置；

(3) 整体排除法：先算出不带限制条件的排列数，再减去不满足限制条件的排列数.

基础训练

1. 从 10 名学生中选出正、副班长各 1 人，共有________种选法.

2. 从 1，2，3，5，7 中任选两个不同数分别作为一个对数的底数和真数，则可组成________个不同的对数.

3. 5 个人排成一排，其中甲必须排在乙的左面，共有________种不同的排法.

4. A，B，C，D，E 五人组成班委，其中 A 不能做班长，共有________分配方案.

5. 现有 5 本书，其中数学书 2 本，将这 5 本书排在书架的一层上，其中数学书必须排在一起，有________种排法.

精选例题

例 1 有 1，2，3，4，5 五个数字组成没有重复数字的五位数，求分别满足下列条件的五位数的个数：

(1) 首位数字为偶数，末位数字不是偶数；

(2) 两个偶数不相邻；

(3) 两个偶数相邻.

解法指导 这是一个带限制的排列问题，使用元素分析法或位置分析法.

解 (1) 分三步：第一步，从两个偶数中选一个排在首位，有 C_2^1 种排法；第二步，从三个奇数中选一个排在末位，有 C_3^1 种排法；第三步，将剩余的三个数在中间的数位上进行全排列，有 P_3^3 种排法，故这样的五位数共有 $C_2^1C_3^1P_3^3 = 36$ 个.

(2) (插空法)先将 3 个奇数排好，有 P_3^3 种排法，再从他们之间的 4 个空(包括两端)中选两个排偶数，有 P_4^2 种排法，故这样的数共有 $P_3^3P_4^2 = 72$ 个.

(3) 解法一(捆绑法) 将两个偶数视为一个数，与其余三个数进行全排列，有 P_4^4 种排法，两个偶数内部排列有 P_2^2 种排法，故这样的数共有 $P_4^4P_2^2 = 48$ 个.

解法二(排除法) 所有的五位数共有 P_5^5 个，两个偶数不相邻的有 72 个，所以两个偶数相邻的有 $120 - 72 = 48$ 个.

注 元素相邻的排列问题，可以采用“捆绑法”，或在所有的排列中，利用“插空法”扣除元素不相邻的情况.“捆绑法”与“插空法”处理的是同一问题的两个侧面.

例 2 用 0，1，2，3，4，5 组成的没有重复数字的数中，求：

(1) 六位奇数的个数；

(2) 能被 25 整除的四位数的个数；

(3) 比 201 345 小的正整数的个数；

(4) 由两个奇数数字和两个偶数数字组成的四位奇数的个数；

(5) 将所有的四位数从小到大排列起来后的第 20 个数.

解法指导 分清由条件确定的整数的特征.

解 (1) 分三步考虑:首先这样的六位数的末位数字可以为 1、3、5 中的任一个,然后其首位数字是除 0 及末位数字外四个数字中的任一个,最后将剩余四个数字排在中间四个位置,因此,所求的六位数共有 $P_3^1P_4^1P_4^4=288$ 个.

(2) 以 25 和 50 结尾的数都能被 25 整除,依此分类,分别求出,再由加法原理,所求的四位数有 $P_3^1P_3^1+P_4^2=21$ 个.

(3) 比 201 345 小的正整数可以是一位数、二位数、……、五位数,也可以是以 1 为首位的六位数,在以 2 为首位的六位数中,201 345 是最小的,依此分类,有

$$P_5^1+P_5^1P_5^1+P_5^1P_5^2+P_5^1P_5^3+P_5^1P_5^4+P_5^5=1\,150$$

个这样的正整数.

(4) 以取的两个偶数数字是否含 0 作分类,各类中又以分步方法,先选数字后排列,有

$$C_2^1C_3^2C_2^1C_2^1P_2^2+C_2^2C_3^2C_2^1P_3^3=84$$

个这样的四位奇数.

(5) 以 1 为首位的四位数有 $P_5^3=60$ 个,以 10 为头两位数字的四位数有 $P_4^2=12$ 个,以 12 为头两位数字的四位数有 $P_4^2=12$ 个,以 120 或 123 为头三位数字的四位数共有 $2P_3^1=6$ 个,所以第 19 个数为 1 240,第 20 个数为 1 243.

注 若组成多位数的数字中含有 0,应注意 0 不能作为多位数的首位.

例 3 将 4 个男同学、3 个女同学进行排列,求下列各种情况各有多少种不同的排法?

(1) 排成前后两排,前排 3 人,后排 4 人;

(以下(2)~(8)均要求排成一排)

(2) 甲必须居中;

(3) 甲不排在左端,且乙不排在右端;

(4) 男女生各自排在一起;

(5) 男女生相间;

(6) 甲乙丙 3 人次序一定;

(7) 男生次序一定,女生次序也一定;

(8) 4 名男生中的任 3 人不能连排;

(9) 7 人围成一个圆圈.

解法指导 问题(3)可以利用集合的"容斥原理"计数;问题(9)是一个圈排列的问题,常用的方法是固定一个元素,将问题转化为非圈排列的问题.

解 (1) 相当于排成一排后依次进入前后两排得相应位置,有 $P_7^7=5\,040$ 种排法.

(2) 特殊元素甲已被指定位置,只需排列其余 6 人后进入相应位置,有 $P_6^6=720$ 种排法.

(3) (排除法)7 人的全排列去掉甲排在左端时的 P_6^6 种排法和乙排在右端时的 P_6^6 种排法,但是,甲排左端且乙排在右端的 P_5^5 种排法被重复扣除,所以有

$$P_7^7-2P_6^6+P_5^5=3\,720$$

种排法.

(4) 男女生分别全排列后，作为两个整体进行全排列，有 $P_4^4P_3^3P_2^2=288$ 种排法.

(5) 7 个位置要 4 男 3 女相间排列，则男生排奇数位，女生排偶数位，男女生分别全排列进入相应位置即可，有 $P_4^4P_3^3=144$ 种排法.

(6) 7 个位置中选定给甲乙丙 3 人的位置，然后将其余 4 人全排列到剩下 4 个位置，有 $C_7^3P_4^4=840$ 种排法.

(7) 7 个位置中选定 4 个位置给 4 个男生，其余 3 个位置给 3 位女生，有 $C_7^3=35$ 种排法.

(8) 在全排列中，去掉 3 个男生连排和 4 个男生连排的排列数，有

$$P_7^7-P_4^4P_4^4-P_4^3P_3^3P_4^2=2\,736$$

种排法.

(9) 相当于固定一人的位置后，余下 6 人进行全排列，有 $P_6^6=720$ 种排法.

注 处理这类问题时，要注意合理转化条件.

例 4 求证：$P_1^1+2P_2^2+3P_3^3+\cdots+nP_n^n=P_{n+1}^{n+1}-1$.

解法指导 将求和的“通项”iP_i^i 表示为便于求和的若干项.

证明 因为 $iP_i^i=(i+1-1)P_i^i=(i+1)P_i^i-P_i^i=P_{i+1}^{i+1}-P_i^i$，

所以 原式 $=(P_2^2-P_1^1)+(P_3^3-P_2^2)+\cdots+(P_{n+1}^{n+1}-P_n^n)=P_{n+1}^{n+1}-1$.

注 要灵活掌握排列数公式的概念和有关性质.

能力训练

一、解答题

1. 判断下列问题是否是排列问题：

(1) 从 7 名同学中选 3 人去完成 3 种不同的工作，每人完成一种，有多少种不同的选派方法？

(2) 从 7 名同学中选 3 人去某地参加一个会议，有多少种选择方式？

(3) 设 $m、n\in\{1,2,3,4,5,6\}$，则可以构成多少个焦点在 x 轴的椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$？

(4) 从 6 名同学中选 4 人，参加 $4\times100\text{m}$ 接力赛，有多少种不同的参赛方案？

二、选择题

2. 用 1，2，3，4，5，6，7 这 7 个数字作全排列组成一个七位数，要求在其偶数位上必须是偶数，奇数位上必须是奇数，这样的七位数共有(　　)个.

(A) P_4^4　　(B) $P_4^4P_3^3$　　(C) $4P_3^3$　　(D) $3P_4^4$

3. 某小组有 8 名学生，从中选出 2 名男生，1 名女生，分别参加数、理、化单科竞赛，每

人参加一种，共有 90 种不同的参赛方案，则男女生的人数应是(　　).

(A) 男生 6 名，女生 2 名　　(B) 男生 5 名，女生 3 名

(C) 男生 3 名，女生 5 名　　(D) 男生 2 名，女生 5 名

4. 身高不等的 7 名同学站成一排，要求正中间的最高，从中间向两边看，一个比一个矮. 这样的排法有(　　)种.

(A) 36　　(B) 18　　(C) 8　　(D) 20

5. 用 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数字，可以组成比 20 000 大，并且百位数不是数字 3 的没有重复数字的五位数，共有(　　)个.

(A) 96　　(B) 78　　(C) 72　　(D) 64

6. 有 3 位老师和 5 位学生照相，如果老师不排在最左边且老师不相邻，则不同的排法种数是(　　).

(A) $P_3^3P_8^5$　　(B) $P_5^5P_1^3$　　(C) $P_5^5P_5^3$　　(D) $P_5^5P_6^3$

7. 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的六位数，其中个位上的数字小于十位上的数字的共有(　　).

(A) 210 个　　(B) 300 个　　(C) 464 个　　(D) 600 个

8. 从 0, 1, 2, 3, 4 中每次取出 3 个不同的数字组成三位数，则这些三位数的个位上的数字之和等于(　　).

(A) 80　　(B) 90　　(C) 110　　(D) 120

9. 3 人坐在一排 8 个座位上，若每人左右两边都有空座位，则坐法种数是(　　).

(A) 12　　(B) 6　　(C) 24　　(D) 120

10. 某交通岗共有 3 人，从周一至周日，每天只安排一人值班，每人至少值两天，其排法种数为(　　).

(A) 5 040　　(B) 1 260　　(C) 210　　(D) 630

13.3 组　　合

知识要点

从 n 个不同元素中取出 m $(m \leqslant n)$ 个元素，共有

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

种不同的选法.

组合数 C_n^m 的性质：① $C_n^m = C_n^{n-m}$；② $C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r$；③ $rC_n^r = n \cdot C_{n-1}^{r-1}$；④ $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$；⑤ $C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$，即 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$.

解组合问题，应注意以下三点：

(1) 对“组合数”恰当的分类计算，是解组合题的常用方法；

(2) 是用“直接法”还是“间接法”解组合题，其原则是“正难则反”；

(3) 设计“分组方案”是解组合题的关键所在.

解排列、组合题的基本策略与方法：排除反面情况、分类处理、分步处理、插入法(插空法)、捆绑法、穷举法、等价命题转换法等. 要点在于正确作好分类和分步，一般是先分类，后分步.

基础训练

1. 从 6 名男生和 3 名女生中各选一人参加比赛，有________种选法，若任选两人且至少有一名是女生，有________种选法.

2. 平面上有 6 个点，其中 3 个点在一条直线上，除此外没有三点共线，则由这些点可确定________条直线.

3. 一次围棋的单循环比赛中，一共赛了 36 场，则有________名选手参加了比赛.

4. 方程 $C_x^3 + C_x^2 = 15C_{x-1}^1$ 的解为________.

5. 从 2，3，5，7 中任取若干个(至少两个)不同的数作乘法运算，可以有________个不同的结果.

精选例题

例 1 宿舍楼走廊上有编号的照明灯一排 8 盏，为节约用电又不影响照明，要求同时熄掉其中 3 盏，但不能同时熄掉相邻的灯，问熄灯的方法有多少种？

解法指导 要确定熄掉的灯的编号，可以先假设所有的灯均没有编号，其中 5 盏是亮着的，3 盏是不亮的，将 8 盏灯按条件排列，然后再编号.

解 问题等价于：将 5 盏亮着的灯与 3 盏不亮的灯排成一排，使 3 盏不亮的灯不相邻(灯是相同的). 5 盏亮着的灯之间产生 6 个间隔(包括两边)，从中插入 3 个作为熄灭的灯，有 $C_6^3 = 20$ 种方法.

注 注意问题中的“先排列，后编号”的解法.

例 2 平面上给定 10 个点，任意三点不共线，由这 10 个点确定的直线中，无三条直线交于同一点(除原 10 点外)，无两条直线互相平行. 求：

(1) 这些直线所交成的点的个数(除原 10 点外)；

(2) 这些直线交成多少个三角形.

解法指导 ① 因为无两条直线互相平行，所以任意两条直线都相交；而无三条直线交于同一点(除原 10 点外)，则交点(除原 10 点外)不重复.

② 除了共点于原给定 10 个点中的某一个外，任三条直线组成一个三角形.

解 (1) 由题设这 10 点所确定的直线有 $C_{10}^2 = 45$ 条.

这 45 条直线除原 10 点外无三条直线交于同一点，由任意两条直线交一个点，共有 C_{45}^2 个交点. 而在原来 10 点上有 9 条直线共点于此. 所以，在原来点上有 $10C_9^2$ 点被重复计数.

所以这些直线交成新的点的个数是

$$C_{45}^2 - 10C_9^2 = 630.$$

(2) 这些直线所交成的三角形个数可如下求:因为每个三角形由三条边组成,而上述 45 条直线中,无三条直线交于同一点(除原 10 点外),无两条直线互相平行. 因此从 45 条直线中任取三条直线(除去三条共点于原来 10 点中的某个点),即交成三角形的个数是

$$C_{45}^{3} - 10C_{9}^{3} = 13\ 350$$

注 用排列、组合解决有关几何计算问题,除了应用排列、组合的各种方法与对策之外,还要考虑实际几何意义.

例 3 10 个有编号的零件按如下分配,求各有多少种分配方法?

(1) 分成 1 个、2 个、3 个、4 个四堆;

(2) 分成 1 个、2 个、3 个、4 个四堆分别由 4 名工人加工;

(3) 分成 2 个、2 个、2 个、4 个四堆;

(4) 分成 2 个、2 个、2 个、4 个四堆分别由 4 名工人加工;

(5) 分成 2 个、2 个、3 个、3 个四堆分别由 4 名工人加工.

解法指导 问题(3)中的前三堆的零件数相同,分组时不存在顺序的问题,计算时可先将每一堆编号,再除以三个不同元素的排列数即可;而问题(4)中"工人"的作用就是将四堆编号.

解 (1) 依次分出 1 个的一堆、2 个的一堆、3 个的一堆、4 个的一堆,其分法种数为

$$C_{10}^{1}C_{9}^{2}C_{7}^{3}C_{4}^{4} = 12\ 600.$$

(2) 将(1)中的 4 堆进行全排列,其分法种数为

$$C_{10}^{1}C_{9}^{2}C_{7}^{3}C_{4}^{4}P_{4}^{4} = 302\ 400.$$

(3) 依次分出 2 个的一堆、2 个的一堆、2 个的一堆、4 个的一堆,但前三堆没有顺序的区别,故分法种数为

$$\frac{C_{10}^{2}C_{8}^{2}C_{6}^{2}C_{4}^{4}}{P_{3}^{3}} = 3\ 150.$$

(4) 将(2)中的 4 堆编号,进行全排列,其分法种数为

$$\frac{C_{10}^{2}C_{8}^{2}C_{6}^{2}C_{4}^{4}}{P_{3}^{3}} \cdot P_{4}^{4} = 75\ 600.$$

(5) 有 $\frac{C_{10}^{2}C_{8}^{2}C_{6}^{3}C_{3}^{3}}{P_{2}^{2}P_{2}^{2}} \cdot P_{4}^{4} = 151\ 200$ 种分配方法.

注 "分组问题"是一类重要的计数问题,要注意所分各组之间是否存在"逻辑"上的顺序.

例 4 有划船运动员 10 人,其中 3 人只会划右舷,2 人只会划左舷,其余 5 人既会划左舷又会划右舷. 现从这 10 人中选出 6 人平均分配在船的两舷划桨,问有多少种不同的选法?

解法指导 按照会划某侧舷的人的去向分类.

解 分 3 类:第 1 类,派只会划左舷的 2 人都到左舷,有 $C_{2}^{2}C_{5}^{1}C_{7}^{3}$ 种不同的选法;第 2 类,派只会划左舷的 2 人中的 1 人到左舷,有 $C_{2}^{1}C_{5}^{2}C_{6}^{3}$ 种不同的选法;第 3 类,不派只会划左舷的 2 人到左舷,有 $C_{5}^{3}C_{5}^{3}$ 种. 由加法原理,共有

$$C_{2}^{2}C_{5}^{1}C_{7}^{3} + C_{2}^{1}C_{5}^{2}C_{6}^{3} + C_{5}^{3}C_{5}^{3} = 675$$

种选法.

注 分类时要做到“不重复,不遗漏”.

例 5 如图 13-2 所示,从 A 到 B,最短的走法有多少种?若粗线段不能通行,最短的走法有多少种?

解法指导 从 A 到 B 的任一最短走法必含有 4 段朝东和 5 段朝北共 9 个路段.不同走法之间的差异就在 9 个路段中,有 4 段是朝东的,其余都是朝北的.

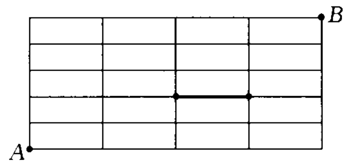


图 13-2

解 由分析可知,最短的走法有 $C_9^4 = 126$ 种.

从所有的走法中扣除经过粗线段的走法,有 $C_9^4 - C_4^2 C_4^1 = 102$ 种.

注 找到问题的等价表述是解决这个问题的关键.

能力训练

一、选择题

1. 在 200 件产品中有 3 件是次品,现从中任意抽取 5 件,其中至少有两件次品的抽法有(　　)种.

(A) $C_3^2 C_{197}^2$　　(B) $C_3^2 C_{197}^3 + C_3^3 C_{197}^2$

(C) $C_{200}^5 - C_{197}^5$　　(D) $C_{197}^5 - C_3^1 C_{197}^1$

2. 将 20 件相同的物品分给 4 个学生,要求每个学生至少得 3 件,共有分法种数为(　　).

(A) C_9^2　　(B) C_{10}^2　　(C) C_{11}^3　　(D) C_9^3

3. AB 和 CD 为平面内两条相交直线,AB 上有 m 个点,CD 上有 n 个点,且两直线上各有一个与交点重合,则以这 $m+n-1$ 个点为顶点的三角形的个数是(　　).

(A) $C_m^1 C_n^2 + C_n^1 C_m^2$　　(B) $C_{n-1}^1 C_m^2 + C_m^1 C_n^2$

(C) $C_{m-1}^1 C_n^2 + C_m^1 C_n^2$　　(D) $C_{m-1}^1 C_n^2 + C_{n-1}^1 C_{m-1}^2$

4. 设字母 a, a, a, a, b, b, b,排成一排,使任何两个 b 不相邻的排法有(　　).

(A) 240 种　　(B) 60 种　　(C) 10 种　　(D) 144 种

5. 从集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ 中,选出由 5 个数组成的子集,使得这 5 个数中的任何两个数的和不等于 11,则这样的子集共有(　　).

(A) 10 个　　(B) 16 个　　(C) 20 个　　(D) 32 个

6. 把 11 张球票分给 3 个班,任何一个班分到的票数不超过另两个班分到的票数之和.则有不同的分法种数为(　　).

(A) 10　　(B) 15　　(C) 16　　(D) 18

7. 从 8 名男医生,7 名女医生中选 5 人组成一个医疗队.如果医疗队小组中至少有一名男医生,至少有两名女医生,则不同选法总数为(　　).

(A) $(C_8^3 + C_7^3) \cdot (C_7^3 + C_8^2)$　　(B) $C_8^2 C_7^2$

(C) $C_8^2 C_7^2 C_{11}^1$　　(D) $C_8^2 C_7^3 + C_8^3 C_7^2 + C_8^1 C_7^4$

8. 某年级有 6 个班,现派 3 名数学教师任教,每人教两个班,不同的分派方法有(　　)种.

(A) $C_6^2C_4^2C_2^2$　　(B) $C_6^2C_4^2C_2^2P_3^3$　　(C) $P_6^2P_4^2P_2^2$　　(D) $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{P_3^3}$

9. 在同一平面内有12个点，其中只有5个点在一条直线上，其余各点没有三点共线，那么这12个点可以确定直线的条数是(　　).

(A) $C_{12}^2-C_5^3$　　(B) C_{12}^2-1　　(C) $C_7^2+C_5^1C_7^1$　　(D) $C_{12}^2-C_5^2+1$

10. 四面体的顶点和各棱中点共10个点，在其中取4个不共面的点，不同的取法共有(　　).

(A) 150种　　(B) 147种　　(C) 144种　　(D) 141种

11. 下列各式中，不成立的是(　　).

(A) $C_n^m=\dfrac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$　　(B) $C_n^m=\dfrac{n(n-1)}{m(m-1)}C_{n-2}^{m-2}$

(C) $C_n^m=\dfrac{n}{n-m}C_{n-1}^m$　　(D) $C_n^m=\dfrac{n}{m}C_{n+1}^m$

二、解答题

12. 化简：$C_m^0+C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+k-1}^{k-1}$.

13.4　二项式定理

知识要点

1. 二项式定理

(1) 二项式展开公式：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$；

(2) 通项公式：二项式展开式中第 $k+1$ 项的通项公式是 $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$.

在 $(ax+b)^n=C_n^0a^nx^n+C_n^1a^{n-1}bx^{n-1}+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^kx^{n-k}+\cdots+C_n^nb^n$（$a$、$b$为常数）展开式中，称 C_n^k ($k=0,1,\cdots,n$) 为展开式中第 $k+1$ 项的二项式系数，$C_n^ka^{n-k}b^k$ ($k=0,1,\cdots,n$) 为展开式中第 $k+1$ 项的系数.

二项式定理是 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 和 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 的推广，基础是乘法原理和加法原理.

2. 二项式定理的应用

(1) 求某些多项式系数的和；

(2) 证明一些简单的组合恒等式；

(3) 证明整除性：①求数的末位，②数的整除性及求系数，③简单多项式的整除问题；