2007

硕士研究生入学考试

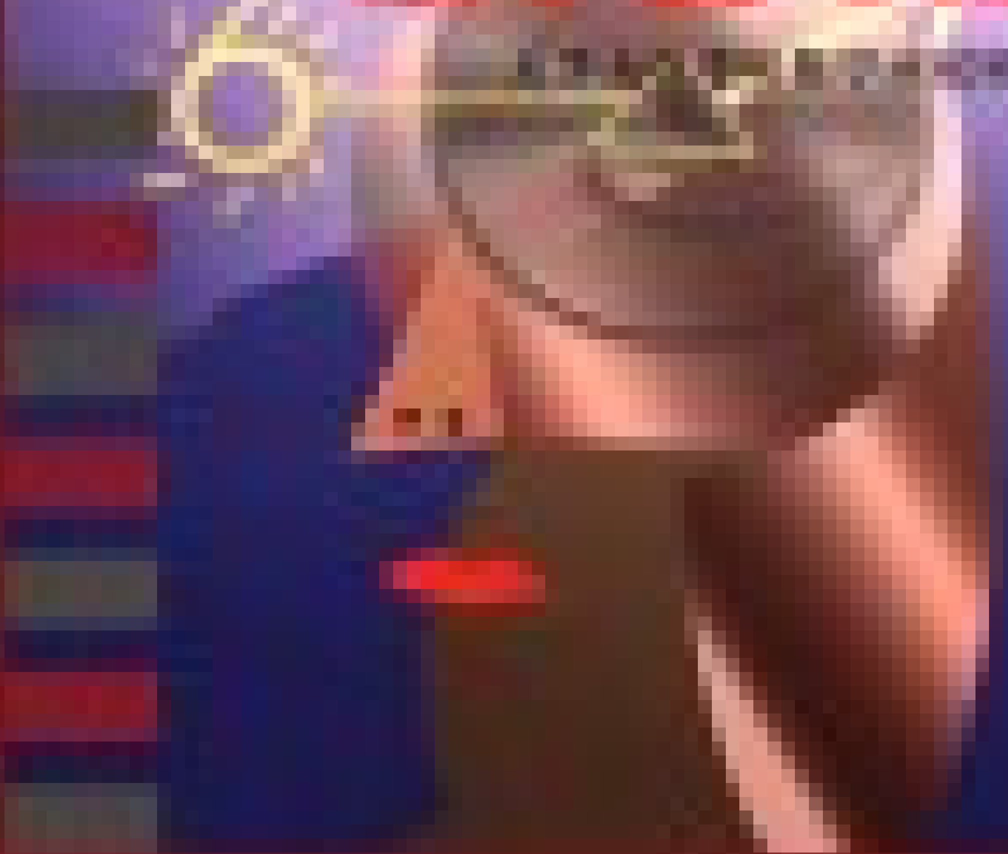
数学复习指导

天津大学考研数学应试研究会 编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

硕士研究生入学考试

数学复习指导

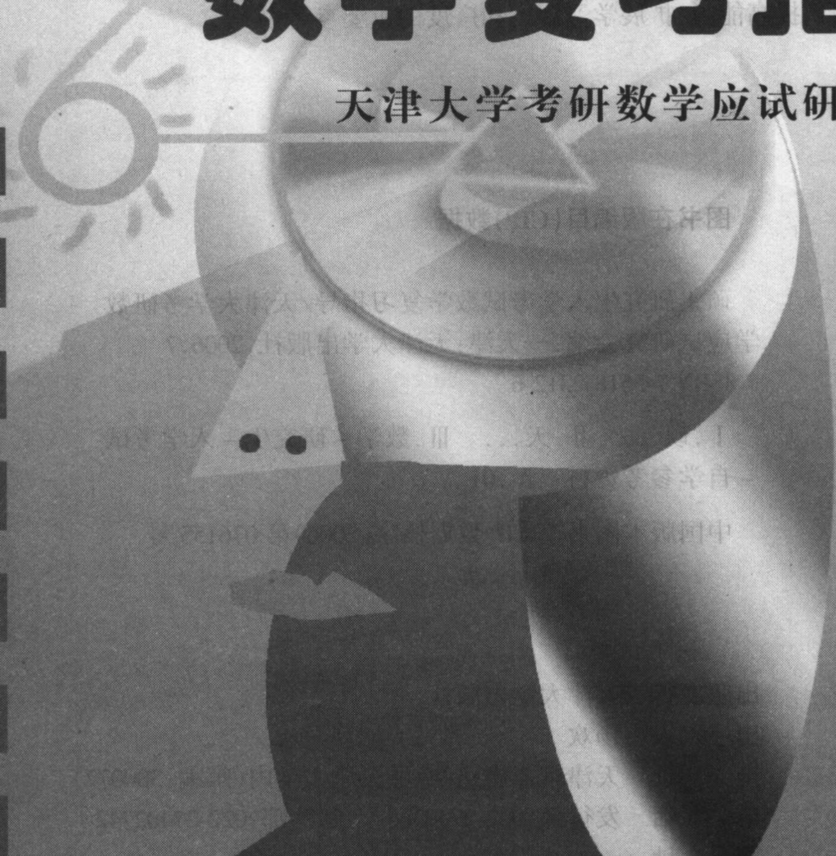


2007

硕士研究生入学考试

数学复习指导

天津大学考研数学应试研究会 编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是按照国家教育部制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”编写的.内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计.本书旨在指导考生遵循考试大纲的要求系统复习基本概念、基本理论和基本方法,强化应试能力,获得优异的应试效果.

本书可作为工学和经济学硕士研究生考前辅导班教材.也非常适合备考考生自己复习提高之用.本书也可作为在校大学生学习高等数学、线性代数和概率论与数理统计课程时把握重点、扩大视野、提高能力、扩展学习深度和广度的重要参考书.

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学复习指导/天津大学考研数学应试研究会编.—天津:天津大学出版社,2006.7

ISBN 7-5618-2312-6

Ⅰ.硕... Ⅱ.天... Ⅲ.数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 076155 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
短信网址 发送“天大”至 916088
印　　刷 河北省迁安万隆印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 32.5
字　　数 812 千
版　　次 2006 年 7 月第 1 版
印　　次 2006 年 7 月第 1 次
印　　数 1-4 000
定　　价 45.00 元

前　言

为了帮助备考硕士研究生的朋友全面有效地复习《数学》,我们编写了这本数学复习指导.本书旨在指导考生遵循考试大纲的要求系统复习基本概念、基本理论和基本方法,强化应试能力,获得优异的应试效果.

全书内容由三部分组成:高等数学、线性代数、概率论与数理统计.作者都是天津大学数学系从事相关学科本科生和考研辅导班教学的教师.书中渗透着作者三十多年积累的把握教学要求、灵活面对各种教学对象以及指导应对各种考试的教学体验.

本书有以下特点:

1.严格遵循考试大纲的要求指导复习.每章的开始都给出了由国家教育部制定的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"中关于该章的"考试内容"和"考试要求",其后又在"基本内容总结"中具体地总结了相关的概念、结论和方法,便于考生按照考试大纲的要求进行系统复习.全书紧扣考试大纲展开各个复习环节.

2.以精讲典型例题为主要复习环节.在各章节的"例题分析"中,精心编选了大量的典型例题加以讲解,以此全面展现问题类型,讲授各类问题的分析方法、解题思路和解题技巧,总结其内在的规律性.帮助考生掌握各种问题的分析方法和求解方法,提高综合运用相关知识的应试能力.

3.做题是必不可少的复习过程.在各章的"练习题"和"答案与提示"中,选编了适量的习题,并给出了答案和必要的提示.读者可通过亲自动手做题检查、巩固和提升复习效果.这是备考必不可少的复习过程.

本书由毛云英编写高等数学第1~4章和第6章,解可新编写高等数学第5、7、8章,刘九兰编写线性代数,王家生编写概率论与数理统计.

由于编者精力所限,书中错误和不当之处在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2006年6月于天津大学

目 录

第一部分 高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

附录

第一部分　高等数学

第1章　函数、极限、连续

函数是高等数学的主要研究对象，极限是微分学与积分学的理论基础．因此，这一章的内容是学习高等数学的基础．这一章的内容在历年考试中以单独形式出现的试题所占比例虽然不大，但与其他内容合在一起的试题在每年的试卷中都可见到．除此之外，作为基础内容，它也几乎渗透在每一个试题中．因此，这一章的内容是决不可以忽视的．

考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法．函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．复合函数、反函数、分段函数和隐函数．基本初等函数的性质及其图形．初等函数．函数关系的建立．

数列极限与函数极限的定义及其性质．函数的左极限和右极限．无穷小和无穷大的概念及其关系．无穷小的性质及无穷小的比较．极限的四则运算．极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则．两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念．函数间断点的类型．初等函数的连续性．闭区间上连续函数的性质．

考试要求

1．理解函数概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系．

2．了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．

3．理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念．

4．掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念．

5．理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系．

6．掌握极限的性质及四则运算法则．

7．掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法．

8．理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限．

9．理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型．

10．了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、

最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

1.1 函数

基本内容总结

一、函数概念

1. 定义

设 D 是一个非空的实数集合. 如果存在确定的对应规律 f, 使得对于 D 中的任意一个数 x,按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应, 则称 f 是定义在集合 D 上的函数, 记为

$$y=f(x),$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量(此时也称变量 y 是变量 x 的函数). D 称为函数 f 的定义域, 记为 $D(f)$. 集合

$$\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 f 的值域, 记为 $Z(f)$.

2. 复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 且 $Z(\varphi)\subset D(f)$, 则称函数 $y=f(\varphi(x))$是由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数.

3. 基本初等函数

(1) 常数函数: $y=c$.

(2) 幂函数: $y=x^{\alpha}$.

(3) 指数函数: $y=a^{x}$.

(4) 对数函数: $y=\log_a x$.

(5) 三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(6) 反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合而成的, 并能用一个解析式子表达的函数称为初等函数.

二、函数的简单性质

1. 有界性

设 $y=f(x)$在集合 I 上有定义.

(1) 若 $\exists M>0$, 对 $\forall x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 I 上有界, 否则称 $f(x)$在 I 上无界.

(2) 若 $\exists M\in \mathbf{R}$, 对 $\forall x\in I$ 都有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$在 I 上有上界, M 称为 $f(x)$在 I 上的一个上界.

(3) 若 $\exists m\in \mathbf{R}$, 对 $\forall x\in I$ 都有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$在 I 上有下界, m 称为 $f(x)$在 I 上的一个下界.

主要结论:

(1) $f(x)$在 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$在 I 上既有上界又有下界, 即存在 $m,M\in \mathbf{R}$, 对 $\forall x\in I$ 都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

(2) $f(x)$在 I 上有界的充分必要条件是$f(x)$在 I 上的图形被夹在某两条平行于 x 轴的直线之内.

(3) 闭区间上的连续函数在该区间上有界.

2. 单调性

设 $y=f(x)$在区间 I 上有定义. 若对$\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$时，

(1) 必有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上单调增加(或广义单调增加，或不减).

(2) 必有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上单调减少(或广义单调减少，或不增).

(3) 必有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上严格单调增加.

(4) 必有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上严格单调减少.

在定义域内单调增加(单调减少)的函数称为单调增加(单调减少) 函数.单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

主要结论:

(1) $f(x)$在 I 上单调增加$\Leftrightarrow$在 I 上 $f(x)$的图形是自左向右不下降的.

(2) $f(x)$在 I 上单调减少$\Leftrightarrow$在 I 上 $f(x)$的图形是自左向右不上升的.

(3) $f(x)$在 I 上严格单调增加$\Leftrightarrow$在 I 上 $f(x)$的图形是自左向右上升的.

(4) $f(x)$在 I 上严格单调减少$\Leftrightarrow$在 I 上 $f(x)$的图形是自左向右下降的.

3. 奇偶性

设$f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 若对$\forall x\in D$ 都有$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是奇函数; 若对$\forall x\in D$ 都有$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数.

4. 周期性

设 $f(x)$的定义域为 D. 若存在常数 $T\neq 0$，使得对$\forall x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$是周期函数，使上式成立的最小正数 T 称为$f(x)$的周期.

三、函数图形的对称性

(1) 奇函数的图形关于坐标原点对称.

(2) 偶函数的图形关于 y 轴对称.

(3) 函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=\varphi(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例题分析

例 1.1.1 填空题.设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{n次}$，则函数 $f_n(x)$的表达式为________.

分析 这是求已知函数的复合函数. 由于没有给出具体的复合次数 n，所以只能用推演归纳的方法求解.

解 根据题意

$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=f(f(f(x)))=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+[f_2(x)]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

于是，由推演过程可看出

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 1.1.2 已知 $f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，求 $f(x)$

提示 对于 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，我们把 $f(u)$ 称为外函数，$\varphi(x)$ 称为内函数. 本题是已知复合函数与内函数，求外函数. 这类题的常用解法有两种：

(1) 先将复合函数恒等变形，使其中的 x 都以 $\varphi(x)$ 的形式出现，然后把 $\varphi(x)$ 改写成 u 便得到函数 $y=f(u)$ 的表达式.

(2) 将 $x=\varphi^{-1}(u)$ 代入到复合函数 $f(\varphi(x))$ 中，便得到函数 $y=f(u)$ 的表达式.

解 因为

$$f(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\frac{1}{1-\sin^2 x}-1=\frac{1}{1-\sin^2 x}-2\sin^2 x,$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{1-x}-2x.$$

例 1.1.3 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$. 求 $\varphi(x)$.

分析 这是已知外函数的表达式 $f(u)$ 以及 $f(u)$ 与某个未知函数 $u=\varphi(x)$ 的复合函数的表达式 $F(x)$，求内函数 $\varphi(x)$ 的表达式. 按照已知条件，应有

$$f(\varphi(x))=F(x).$$

由此求解 $\varphi(x)$.

解 因为

$$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x,\ \varphi(x)\geqslant 0,$$

所以

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},$$

定义域为 $x\leqslant 0$.

例 1.1.4 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

提示 这是求分段函数的复合函数. 其做法是依据外函数 $f(u)$ 的自变量 u 的分段，讨论内函数 $u=\varphi(x)$ 的自变量 x 取何值时其函数值 u 落在相应的段落上.

解 记 $u=f(x)$，则 $f[f(x)]$ 是由函数 $f(u)$ 与函数 $u=f(x)$ 复合而成，其中

$$f(u)=\begin{cases}1+u, & u<0,\\ 1, & u\geqslant 0,\end{cases}\quad u=f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

令 $u=f(x)<0$，得

$$1+x<0.$$

由此解得

$$x<-1.$$

此时

$$f(f(x))=1+f(x)=2+x.$$

令 $u=f(x)\geqslant 0$，得

$$\begin{cases}1+x\geqslant 0,\\ x<0\end{cases} \quad 或 \quad x\geqslant 0.$$

由此解得

$$x\geqslant -1,$$

此时

$$f(f(x))=1.$$

因此

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

例 1.1.5　设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解　函数

$$f(u)=\begin{cases}u, & u\geqslant 0,\\ 0, & u<0.\end{cases}$$

令 $u=\varphi(x)\geqslant 0$，得

$$\begin{cases}x^2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

由此解得

$$x\geqslant 0.$$

此时

$$f[\varphi(x)]=u=\varphi(x)=x^2.$$

令 $u=\varphi(x)<0$，得

$$x<0.$$

此时

$$f[\varphi(x)]=0.$$

因此

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

例 1.1.6　**选择题**. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解　当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$f(x)=1\Rightarrow |f(x)|=1\Rightarrow f[f(x)]=1\Rightarrow |f[f(x)]|=1\Rightarrow f\{f[f(x)]\}=1.$$

当 $|x|>1$ 时，

$$f(x)=0\Rightarrow |f(x)|\leqslant 1\Rightarrow f[f(x)]=1\Rightarrow |f[f(x)]|\leqslant 1\Rightarrow f\{f[f(x)]\}=1.$$

因此，

$$f\{f[f(x)]\}=1.$$

例 1.1.7　试证 $f(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}(t+\sin t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

提示　证明连续函数在开区间、半开半闭区间或无穷区间上的有界性方法为：

(1) 证明在开的或无穷的端点函数有极限，并求出极限；

(2) 利用极限定义证明在开的或无穷的端点附近函数有界，即 $|f(x)|\leqslant M_1$ (有时两端点要分别讨论)；

(3) 在去掉开的或无穷的端点附近部分而剩下的闭区间上，根据闭区间上连续函数的性质得出函数有界 $|f(x)|\leqslant M_2$；

(4) 取 $M=\max\{M_1,M_2\}$，则在整个区间上 $|f(x)|\leqslant M$，根据定义得函数在所给区间上有界.

证明 因为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}(t+\sin t)\mathrm{d}t}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}(x+\sin x)}{2xe^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

所以根据极限定义，对于 $\varepsilon=1$，存在 $N>0$，使得当 $|x|>N$ 时

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon=1.$$

由此得到，在 $(-\infty,-N)$ 和 $(N,+\infty)$ 上

$$-\frac{1}{2}<f(x)<\frac{3}{2},$$

从而
$$|f(x)|<\frac{3}{2}.$$

又因为连续函数的变上限积分可导，从而连续，所以 $f(x)$ 在 $[-N,N]$ 上连续. 根据闭区间上连续函数的性质，$f(x)$ 在 $[-N,N]$ 上有界. 因此，存在 $M_0>0$，使得对 $\forall x\in[-N,N]$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M_0.$$

取 $M=\max\left\{\frac{3}{2},M_0\right\}$，则对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

于是，根据定义 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

例 1.1.8 选择题. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在(　　)区间内有界.

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

提示 如果函数 $f(x)$ 在开区间或无穷区间 (a,b) 内连续，极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则按照例 1.1.7 的方法可以证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

解 因为

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18},$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{\sin 1}{2},$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界.

例 1.1.9　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$. 证明若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数.

提示　证明一个函数 $f(x)$ 是偶函数，只需证明它满足 $f(-x)=f(x)$. 证明一个函数 $f(x)$ 是奇函数，只需证明它满足 $f(-x)=-f(x)$.

证明　因为

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{u=-t} \int_0^x -(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^x (x-2u)f(u)\mathrm{d}u = F(x), \end{aligned}$$

所以，$F(x)$ 是偶函数.

例 1.1.10　设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，且图形关于直线 $x=2$ 对称，证明 $f(x)$ 为周期函数.

提示　证明一个函数 $f(x)$ 是周期函数，只需证明存在 $T>0$ 使得它满足 $f(x)=f(x+T)$.

证明　因为 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称且是奇函数，所以有

$$f(2+x)=f(2-x)=-f(x-2),$$

又有

$$f(x-2)=f[2+(x-4)]=f[2-(x-4)]=f(6-x)=-f(x-6).$$

由此得到

$$f(x-6)=f(2+x).$$

令 $t=x-6$，则 $x=t+6$. 代入上式得

$$f(t)=f(t+8).$$

因此 $f(x)$ 是周期函数.

1.2　极限

基本内容总结

一、极限的定义

1. 直观定义

极限	直观定义
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$	当 n 无限增大时，u_n 无限接近于 A
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$	当 x 无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近于 A

续表

极限	直观定义
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	当 x 由大于 x_0 的一侧无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近于 A
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	当 x 由小于 x_0 的一侧无限接近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近于 A
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	当 $\|x\|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近于 A
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	当 x 无限增大时，$f(x)$ 无限接近于 A
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	当 x 取负值而 $\|x\|$ 无限增大时，$f(x)$ 无限接近于 A

2. 严格定义

极限	$\forall$	$\exists$	使得当	恒有
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$	$\varepsilon>0$	正整数 N	$n>N$	$\|u_n-A\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$0<x-x_0<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$0<x_0-x<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$N>0$	$\|x\|>N$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$N>0$	$x>N$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$N>0$	$x<-N$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 简记为 $f(x_0+0)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 简记为 $f(x_0-0)$.

二、数列极限的性质

1. 唯一性

若 $\{u_n\}$ 收敛，则其极限唯一.

2. 有界性

若 $\{u_n\}$ 收敛，则 $\{u_n\}$ 有界(即 $\exists M>0$，使得对 $\forall n$ 都有 $|u_n|\leqslant M$).

3. 同号性

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A>0(<0)$，则 $\exists N$ 使得对一切 $n>N$ 都有 $u_n>0(<0)$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} v_n=B$，且 $A<B$，则 $\exists N$ 使得对一切 $n>N$ 都有 $u_n<v_n$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} v_n=B$，且 $\exists N$ 使得对一切 $n>N$ 都有 $u_n\leqslant v_n$，则 $A\leqslant B$.

三、函数极限的性质

1. 唯一性

若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)$ 存在(其中□代表 $x_0, x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty$ 或 $-\infty$，下文同)，则其极限唯一.

2. 有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则在 x_0 点附近 $f(x)$ 有界.

3. 同号性

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0(<0)$，则在 x_0点附近(x_0除外)$f(x) > 0(<0)$.

(2) 若在 x_0点附近(x_0除外)$f(x) \geqslant 0(\leqslant 0)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0(\leqslant 0)$.

4. 函数极限与左、右极限的关系

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

四、几类重要极限

(1) $$\lim_{n \to \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} n + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_{k-1} n + b_k} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & m = k, \\ 0, & m < k, \\ \infty, & m > k, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_{k-1} x + b_k} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & m = k, \\ 0, & m < k, \\ \infty, & m > k. \end{cases}$$

(2) $$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ +\infty, & a > 1, \end{cases} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

由此得到，对任意的 $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$，$\lim\limits_{x \to \infty} a^x$不存在也不为$\infty$.

(3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

一般地，若 $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = 0$，且在□附近 $f(x)$恒不为零，则

$$\lim_{x \to \square} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1.$$

若 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$，且当 n 充分大时 u_n恒不为零，则

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin u_n}{u_n} = 1.$$

(4) $$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}, \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

一般地，若 $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = 0$，且在□附近 $f(x)$恒不为零，则

$$\lim_{x \to \square} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}.$$

若 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$，且当 n 充分大时 u_n恒不为零，则

$$\lim_{n \to \infty} (1 + u_n)^{\frac{1}{u_n}} = \mathrm{e}.$$

(5)初等函数在其定义域内各点的极限等于函数在该点的函数值.

(6)有界函数乘以无穷小仍是无穷小.

五、极限的计算方法

1. 不定式的极限

不定式有七种：

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},\infty^{0},0^{0}.$$

其中$\infty-\infty,0\cdot\infty$可通过代数运算化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$；$1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$是幂指函数$f(x)^{g(x)}$的极限，可利用$f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$化为指数$g(x)\ln f(x)$的$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型极限；$1^{\infty}$的极限还可去凑重要极限e. 因此，七种不定式极限的计算可归结为两种不定式$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$的计算.

求不定式$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$极限的方法是变形后用前面所列举的几类重要极限. 变形的方法有两种：

(1) 恒等变形. 这种变形包括有：

(i) 通分，约分，有理化等代数变形；

(ii) 用 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

变形.

(2) 不恒等变形. 这种变形包括有：

(i) 洛必达法则：

若$\lim\limits_{x\to□}\frac{f(x)}{g(x)}$为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$，$\lim\limits_{x\to□}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$，则

$$\lim_{x\to□}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to□}\frac{f'(x)}{g'(x)};$$

(ii) 等价无穷小代换：

若当$x\to□$时，$\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$，$\lim\limits_{x\to□}\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$存在，则

$$\lim_{x\to□}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to□}\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

在求不定式$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$的极限时，常常不是用一种变形方法就可化为某种重要极限，而是要相继采用几种变形方法，才能最终求出其极限值. 因此，必须熟练掌握各种变形方法的使用时机和使用技巧.

2. 数列极限的某些特殊求法

(1) 夹挤准则. 如果当n充分大时恒有$u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=A$.

(2) 单调有界准则. 单增有上界数列必有极限；单减有下界数列必有极限.

(3) 利用定积分定义化为定积分. 如果$f(x)$在$[0,1]$上可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$