提炼思想　归纳方法　化难为易

高等数学自学必读

谢克藻　张少华　编著

西安地图出版社

前　　言

《高等数学自学必读》是一般理工科高等数学课教材的辅助读物，它包括三部分：I 课程理念；II 概念透析；III 技能强化.

在课程理念中，简述了高等数学课程的产生与延革、高等数学在素质教育中的作用、学习高等数学所必需的数学语言基础、学习高等数学过程中的难点与相应的对策.

在概念透析中，按照一般教材的编排顺序，将各知识板块上的难点、重点、应用的热点设计为 102 个问题，逐一解答、剖析，以便学习者理解、掌握、深化教材的相应内容.

在技能强化中，选编了 263 例高等数学题，将其归类作出题解. 在很多题目的解答之后加注，注中或点评解法作理性思考，或将具体上升为一般，或追问引深，或类比拓广，一题多解，一例多用. 通过解题，理顺思路，开启智慧，强化技能.

编写这本《高等数学自学必读》旨在解决在校与函授理工科学生学习高等数学所遇到的困难，也愿它能成为高等数学任课教师的参考资料.

张少华参与了本书主旨、框架结构、体例的讨论，并担负了“III—VII”——“III—XII”（约 100 千字）的撰写及全书的校对工作. 谢克藻拟定了主旨、框架结构、体例、目录，并担负了其余各部分（约 190 千字）的撰写及全书的统稿工作. 由于我们的

水平、经验及其他种种原因，本书必有诸多不足，望同行与读者批评指正.

谢克藻　　张少华

二零零三年十二月

目　　录

I　课程理念

I－I　高等数学课程的来历及延革

1　作为学科的高等数学

高等数学作为一门学科，对它的界定存在着两种见解：一是用数学发展史来界定；二是用研究对象是变量还是常量来界定.

1.1　数学发展史意义下的高等数学

数学是研究量的科学，数形是量的初期形式．整个数学的发展是围绕数和形这两个基本概念提炼、演变发展而发展的．随着人类认识的深入，数学的发展经历了四个时期：数学萌芽时期、初等数学时期、高等数学时期、现代数学时期.

1°　数学萌芽时期

数学开初是寄寓于天文、祭祀、农事活动中的，处在萌芽状态，到了公元前 5 世纪逐渐形成了数的概念，产生了数的运算方法，几何有了初步发展.

2°　初等数学时期

这个时期始自公元前六七世纪，直至公元 17 世纪中叶，跨度有两千年左、右，在这个时期，数学已由具体的实验阶段过渡到抽象的阶段，并逐渐形成一门独立的、演绎的科学，算术、初等几何、初等代数、三角已成长为独立的学科分支，现在我国中小学数学课的主要内容反映了这个时期的基本成果．数学史家称这个时期所形成的数学内容为初等数学.

3°　高等数学时期

从 17 世纪开始到 19 世纪中叶为止，经历将近三个世纪的时间，数学面貌发生了根本的变化，现代数学的三个部门——分析、几何和代数开始形成.

高等数学时期以笛卡儿的解析几何的建立为起点(1637)，接

着是微积分的兴起．这一时期还出现了概率论和射影几何等新的数学部门，但似乎都被微积分(或称数学分析)过分强大的光辉掩盖了，分析学以汹涌澎湃之势向前发展，在整个 18 世纪达到了空前灿烂的程度，其内容的丰富，应用的广泛，使人目不暇接．

恩格斯指出，微积分“是由牛顿、莱布尼茨大体上完成的，但不是他们发现的”．

积分思想、极限思想的萌芽可追溯到公元前 5 世纪，古希腊时代德谟克利特创立原子法，视物体为大量微小部分叠合而成． 阿基米德解弓形及旋转体的体积也隐含着近代的积分思想． 庄子《天下篇》中的“一尺之捶，万世不竭”，刘徽“割圆术”，攸克萨斯的“穷竭法”，祖恒原理都和极限有直接关系．

先有问题，后有微积分． 促成微积分学创立的问题有两个：一是平面面积和立体体积的求法；二是求曲线在给定点的切线．17 世纪初随着函数观念的建立和对机械运动规律的考察，求函数的极值与运动规律的变化率，也是促成微积分产生的实际问题． 为解决这类问题，开普勒等一批 17 世纪初的数学家开始了用无穷小量和积分方法解决具体问题的工作．曾经出现过不少极其成功富有启发性的方法，但始终没有人在这些方法的启发下构思出真正属于微积分的概念，自觉意识到要完成这一伟大发现并实际完成它的，是牛顿和莱布尼茨．

牛顿(Newton) (英)是近代自然科学的伟大旗手，他创立微积分的代表作是《写于 1666 年 10 月的流数短论》、1669 年完成的《运用无穷多项方程的分析学》、1671 年发表的《流数法和无穷级数》、写于 1691 至 1693 年的《曲线图形求积术》．

莱布尼茨(Gottfrit Wilhelm Leibniz) (德)是另一个微积分奠基者，他的微积分思想、方法多见于研究手稿．关于微积分的两篇代表作都发表在《学艺》(Acta emditonm)杂志上．1684 年的《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种方法的奇妙类型计算》是世界上最早的专门微分学研究文

献． 1686年发表了他的积分学著作．

牛顿、莱布尼茨共同创立了微积分，其标志之一是他们微积分的方法一般化，正如莱布尼茨那个长而古怪的文章标题那样，他的文章中所给出的具体方法也可用于分式和无理函数．标志之二是有了属于微积分的专门概念． 如牛顿在《求积术》中为求$y=x^n$的流数，设x由流动而成$x+0$(这里的 0 其实就是今天的Δx)．称

$$0:\left[(x+0)^n-x^n\right]=1:nx^{n-1}+n\frac{n-1}{2}\cdot 0\cdot x^{n-2}+\cdots$$

为“最初比”，称$1:nx^{n-1}$为最后比，这其实是今天平均变化率与导数二概念的倒置． 这是伟大的突破，但亦保留着经验主义的影子，因为这里的一般是指解决一个实际问题的方法可以变通到另一个实际问题上去，但方法亦然附着在具体问题上．

18 世纪，欧拉(Enle)在贝努力家族、洛比达等一批欧洲数学家工作的基础上完成了微积分的形式化，使微积分成为一种形式的关于函数的理论，1748 年欧拉发表《无穷小分析引论》，定义了函数，并给函数分类，再用极限思想微积分方法对不同函数展开式进行讨论．

今天的数学分析(狭义的)包括以实数理论为基础的极限理论，一元函数与多元函数的微分学及积分学，级数理论．它们构成一个严密的体系．这种体系的建立是经历了 19 世纪数学史上的数学分析严密化运动才基本完成的． 第一是对函数概念理解的逐步深入，高斯、傅里叶、柯西、狄里克雷、达布、黎曼一批数学家的研究工作：突破了初等函数的限制，打破解析式的制约，确立了函数的现代定义；第二，确立了以极限为核心思想，是捷克数学家波尔查诺与柯西(Cauch)(法)用极限理论系统地给出了分析中基本概念的定义，排除了运动和几何直观因素，为分析学奠定了纯数学的理论基础，柯西还定义了广义积分，证明了微积分基

本定理；第三，$\varepsilon-\delta$ 语言的运用，$\varepsilon-\delta$ 语言是外尔斯脱拉斯(Weiestrass)(德)发明的，使得数学分析彻底的算术化；另外，19世纪 60 年代外尔斯脱拉斯、康脱、戴德金等建立了实数理论，加固了数学分析的理论基础.

高等数学时期又称变量数学时期，无限数学时期，数学发展阶段意义下的高等数学，就指的是这个时期发展成熟的一批数学成果，其中解析几何是一马当先的，微积分(即数学分析)是有雄厚强劲的，还包括抽象代数、非欧几何的一些产品.

4° 现代数学时期

从 19 世纪中叶到现在，数学的各部门在已有成就的基础上，它的研究范围不断扩大，它的内容急剧增长，除原有分支继续发展外，新的分支也越来越多，以致今天我们无法说出到底有多少分支，也无法对它进行确切的分类. 但是习惯上现代数学按内容分成数理逻辑、数论、代数学、几何学、拓扑学、函数论、泛函分析、微分方程、概率论和数理统计、计算数学等大的数学分支，同时也有许多边缘性学科，如运筹学、控制论等. 数学领域的迅速扩展和数学知识的急剧增长是现代数学的一个重要特征. 现代数学家要比先辈门研究的问题高深得多. 这一事实说明，当代数学家只能通晓数学的一个分支或一方面. 今天不仅像牛顿那样百科全书式的科学家不可能产生，像 18 世纪的欧拉、19 世纪上半期的高斯那样全能式的数学家不可能产生，就像上世纪初，希尔伯特这样雄视数学全局的数学家也难以找到，这不是厚古薄今，而是因为现代数学知识海洋的博大精深与浩瀚.

1.2 高等数学是变量数学

恩格斯在《反杜林论》中说：“初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑范围内活动的，至少总的来说是这样；而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用”. 他又在《自然辩证法》中说：“数学中的转折点是笛卡儿变数”.

依恩格斯所说的“转折点”为界限来划分，则可把高等数学定义为常数数学以外的数学．那么它不仅包括高等数学时期形成的数学，还包括现代所形成发展起来的数学分支和数学内容．

2　作为课程的高等数学

2.1　广义高等数学课

马克思说过：“一种科学只有成功地应用数学时，才算真正达到完善地步”．上世纪初以来科学发展表明，科学数学化的趋势越来越明显，数学已成为横断学科．自然的、人文的，理论的、技术的，现象要破译、问题要解决、结论要阐释，要用数学思维去思考，才能一针见血抓住要领揭露本质．正因为如此，高等院校很多专业，特别是理工科专业，不仅要用数学的多个分支作为学习专业基础课、专业课的工具，而且要学生学会用数学思维去思考，还要用数学的深厚文化底蕴去陶冶学生的情操，这便促成部分数学教育家和其他相关理工学科的专家，从天文学、力学、电学、光学、热学、化学、生命科学、工程、机械……各方面去搜寻所涉及到的数学思想方法、数学知识点，结合数学的特性与教育、教学规律，构建出高等数学课程，形成了广义的高等数学课．

例如，苏联的斯米尔诺夫(В. И. СМИРНОВ)所著的《高等数学教程》共五卷十一册．内容包括：函数与极限理论、微积分、矢量分析、级数理论、解析几何、常微分方程、偏微分方程、复变函数、实变函数、泛函分析、拓扑学等，几乎囊括了所有的数学分支．这部教程由孙念增、吴文俊等一批数学家翻译，译著在我国 1952 年初版，至 1979 年共印刷了 16 次．

又如，原四川大学数学系高等数学教研室所著的《高等数学》共四册．内容包括：函数与极限理论、微积分、级数理论、矢量分析、解析几何与矢量代数、常微分方程、偏微分方程、线性代数、复变函数、概率与数理统计．这部教科书 1978 年初版，1988 年第二版，1995 年第三版，多次印刷．

2.2　狭义的高等数学课程

狭义的高等数学课程内容，一般包括：函数与极限理论、一元函数的微积分、多元函数的微积分、矢量分析、解析几何与矢量代数、常微分方程． 选择这些内容，科学编排，是为高等院校理工科专业提供学习专业理论、培养数学思维、接受数学文化所需要的起码的数学知识考虑的．

这种狭义的高等数学课程的教科书，最典型的代表之作，要算樊映川的《高等数学讲义》，它自1958年初版，1964年再版，多次印刷． 自上世纪末，随着高校课程体系、教学内容的改革，又有好多新的高等数学教科书(狭义的)相继的出版，各具特色，一般所选知识板块，与樊书相比，尚无本质差异，当然这也是学科自身的成熟性所决定的． 但一般都更新了语言，更新了题例，提高了观点． 例如，函数的定义，在樊书中采纳的是“依赖关系”作定义，而现行高等数学教科书绝大部分采用了集合间的对应法则作定义． 一般编排结构是：函数、极限理论、一元函数的微积分、常微分方程、解析几何与矢量代数、多元函数的微积分、级数理论．

一般开设狭义的高等数学课的专业还要根据自身专业特点，开设其他数学课程，如计算机专业除开设高等数学课(狭义)外，还要单开线性代数、概率与数理统计、离散数学、运筹学等．

还有些工科专业，除开设狭义的高等数学外，还要根据本专业的需要，开设工程数学系列课(如线性代数、复变函数、矢量分析与场论等)．

我们这本《高等数学自学必读》则是针对自学狭义的高等数学课程而撰写的．

Ⅰ-Ⅱ 高等数学课程在素质教育中的功能

1 高等数学有着丰富的人文“教化”内涵，在德育教育中有着重要作用

1.1 现代德育教育观

人文“教化”的最终目的是“教人做人”. 人、社会、自然的统一和谐发展是人类社会宏观文化结构的基础，德育目标要体现人、社会、自然和谐发展的伦理要求，不仅要有我们通常要求的一般道德(文明礼貌、公而忘私、见义勇为、团结友爱等)，而且要有科学道德、生态道德、经济道德、信息道德的素质.

1.2 生态道德教育举例

人要利用自然资源改善自身的生存条件，又不可贪婪享用毁坏自然资源而葬送自身赖以生存的条件. 恪守可持续发展原则，牢固树立生态意识，方为大道大德之举. 在这一生态教育中，高等数学所起的作用是别的学科无法代替的.

例 1 逻辑斯蒂(Logistic)曲线

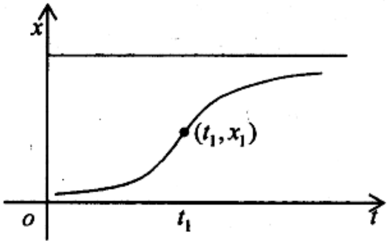
Malthus(英)1798 年提出：人口规模变化率是人口规模的正比例函数，对自然界的其他物种也适用，这就是物种增长的 Malthus 模型. 荷兰科学家 Verhulst 1840 年提出：由于生存资源的有限性及种间成员的竞争使得物种数量增长受到约束，于是在有限资源下，物种有一个最大容量 k. 综合这两个原则可得到，物种规模变化率 dx/dt. 与现时规模 x 成正比，且与 k-x 成正比，故此

$$dx / dt = rx(k-x)$$

其中 r 为比例常数. 解此微分方程可得种群规模函数，又称大道函数

$$x = k/(1+Be^{-at})$$

其中 $B=e^{-kc}$ (c 为积分常数)，$a=rk$. 该函数的图像就是有名的逻辑斯蒂曲线. 如图 1-1 所示.



(图 1-1)

这里 $x=k$ 是渐近线，(t_1,x_1) 是它的拐点，当 $t<t_1$ 时，$d^2x/dt^2>0$ (凹向上)，则增长速度 (dx/dt) 不断加快；$t>t_1$ 时，$d^2x/dt^2<0$ (凹向下)，则增长速度 (dx/dt) 不断放慢，并越来越趋近于零增长.

"大道函数"明大道之理，在技术上它指出怎样寻求自然资源开发利用之"度"，在人文教化上它阐明恪守生态道德，免受自然惩罚之理，叫你心悦诚服.

2 在素质教育中，高等数学应使概念化的函数附着到新问题上去，促进学习者创造能力的提高

2.1 微积分形成发展的轨迹

在Ⅰ-Ⅰ的 1.1 中，我们突出的陈述了高等数学的主干部门微积分(数学分析)发展成长过程，不难看出高等数学经历了这样一个形成发展轨迹：在哲学思考、社会实践、自然具体中极限和积分思想萌发,在具体问题解决过程中所孕育的微积分方法与极限方法,带有经验主义阴影的微积分理论和方法,抛弃运动和几何直观解释的、形式化了的、建立了公理体系的、使用了 $\varepsilon-\delta$ 语言的近现代微积分体系. 这是一条"具体—抽象—具体"螺旋前进之路，完全符合人类认识规律，什么时间内什么人完成什么内容是

偶然的，但它要沿着这样一个轨迹深入发展却是历史必然.

2.2 数学分析培养创造能力的途径

数学分析由附着在个别问题上的具体方法，到针对一般函数的分析性质研究，形成形式化严密化的理论体系，应该说是进步、是发展. 它不仅有利于数学分析信息的交流与传授，而且也利于学科自身的发展，更为重要的是它能更本质地反映客观实际，具有更广泛的应用前景.但它失去了当初用无穷小量时的那种直观、生动、活泼、易于发现问题和解决途径的思想方法. 如果我们在数学分析教学中陶醉沉湎于这种形式化的圈子里，仅仅把它当作一种"思维体操"，那是消极的，是对数学分析宝贵资源的浪费. 数学分析来源于实际问题、具体函数. 是解决实际问题，解释具体现象的，是在"用"中产生的. 对形式化、严密化的数学分析理论应调动其"用"的潜力，而"用"数学分析的关键在于：在新的基础上"返璞归真"，将分析的理论、方法再次用于发现解决新的实际问题，新的具体函数上去，沿着"螺旋上升"之路高歌向前. 从教育的角度讲这是培养"创造力"的素质教育之路；从学术角度讲，这是学科发展的必由之路；从技术经济的角度讲，这才适销对路.

例 2 最小二乘法

勒让德(Adrien， Marie Legendre) (法) 1905 年在确定彗星轨道的论文中最早提出二乘法原理，这是微积分形式化后的事. 其内容是：

两个变量 x、y 的 n 次观测值在平面上描出的点集 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)，且看起来这两个变量间有直线关系，则选择参数 a、b 作

$$y=ax+b$$

来拟合这个点集. 其中理想的一条是使得每个观测点(x_i, y_i)

到这条直线上对应点(x_i, y)的垂直距离之和，即

$$\sum_{i=1}^{n}|y-y_i|=\sum_{i=1}^{n}|ax_i+b-y_i|$$

最小，转化为

$$\min S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

由
$$\begin{cases}\partial s/\partial a=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0\\ \partial s/\partial b=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0\end{cases}$$

得 $a=\dfrac{\sum x_iy_i-n\overline{XY}}{\sum x_i^2-n(\overline{X})^2}$ $\quad b=\overline{Y}-\dfrac{\sum x_iy_i-n\overline{XY}}{\sum x_i^2-n(\overline{X})^2}\overline{X}$

其中$\overline{X}=\sum x_i/n$，$\overline{Y}=\sum y_i/n$. 用二元函数极值的充分条件验证，此时$S(a,b)$取极小值，由于驻点唯一，故也是最小值. 故可得回归直线

$$Y-\overline{Y}=\frac{\sum x_iy_i-n\overline{XY}}{\sum x_i^2-n(\overline{X})^2}(X-\overline{X})$$

这一方法在相关分析中占有重要地位，十分有用. 而它的提出，正是将二元函数极值理论用于实际问题中所构成的函数$S(a,b)$的结果

3 在素质教育中，高等数学的首要任务是索取、积累足够的高等数学知识

3.1 数学分析派生出多个学科，数学分析是高等数学的主干部门，也是多个学科的基础

先看微分方程的产生.

早期导致微分方程的问题有：弹簧在外力作用下的伸长和缩短问题以及摆的运动等等. 但当时的方法是几何的. 1690 年，雅各·贝努利提出"悬链线"问题，开始了微分方程的分析探求. 一年后，莱布尼茨、约翰·贝努利都给出了问题的解，最完整的解是约翰·贝努利的，他引出 $dy/dx = S/C$，其中 S 是"悬链线"最低点到线上任意的弧长，C 则是依赖弦在单位长度内的重量，其解为

$$y = (e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})$$

以后天体力学、弦的振动、流体力学、量子力学等方面不断向数学分析提供问题，在解决问题的过程中不断有新的方程、新的解法与新的理论出现. 以至于 19 世纪常微分方程、偏微分方程才从数学分析中独立出来.

变分法的形成过程.

牛顿研究水中以常速作直线运动的物体，为使阻力尽可能小，提出应选取怎样的旋转曲面为其表面形状，即选择怎样的 $y(x)$，使

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y(x)[y'(x)]^3}{1+[y(x)]^3} dx$$

取极小值. 还有诸如"最速降线问题"、"测地线"问题、"等周问题"相继提出. 在诸多解法中欧拉工作最富创造. 欧拉 1744 年的新著《寻求具有某种极大或极小值的曲线的技巧》是变分法作为一个新的数学分支诞生的标志. 变分法的主要应用，是结合

最小作用原理，给动力学一种优美的数学形式. 古希腊的自然哲学家就有一种信念：大自然是以最简捷的可能途径行动的，“自然界不做多余的事情”. 至今变分法有了完善丰富的内容，不仅是现代理论物理学中一个强有力的工具，在社科、人文研究中也得以广泛应用.

概率论.

在早先这门学科被作为“组合”数学的一部分. 19世纪初，拉普拉斯的《分析概率法》出版，将分析法系统用于概率论，开启了现代概率论的先河.

复变函数、实变函数、泛函分析都是数学分析的后继课程.

微分几何是随着微积分在几何学中的应用深入研究而产生的.

还能举出好多……

“微积分的出现，与其说是整个数学史，不如说是整个人类历史的一件大事，它因生产技术和理论科学的需要而产生，同时又回过头深刻地影响生产技术和自然科学的发展. 假设我们把微积分从工程技术、天文、物理等学科中抽去，那么将是不可想象的事. 微积分对于今天的自然科学工作者来说，越来越像望远镜之于天文学家，显微镜之于生物学家一样重要”. 这是梁宗巨先生的话，说得好极了，但我们又不得不率直地为老先生作补充：请注意，人文、社科工作者亦是如此！

3.2 知识就是力量，学习高等数学要突出数学分析，有了足够的数学分析知识，才有在书本和实践中索取知识的力量

在大学掌握专业知识仍是首要任务，知识就是力量. 无知，则无以用，无以创. 由3.1的例证和论述，我们可看到作为高等数学的主干部门——数学分析——对索取书本和实践知识所起到的奠基作用和开创作用. 因而学习高等数学，要突出数学分析的学习. 要系统地索取、积累数学分析知识，但不可在数学分析的“夹缝”里钻来钻去. 要抓住主体结构，领会知识和领会思想方