

GONGKE SHUXUE FENXI JICHU XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

面向 21 世纪课程教材教学辅导书

# 工科数学分析基础 学习指导与习题解析

(下册)

孙清华 孙昊 李金兰

- ◇ 归纳知识要点 提纲挈领
- ◇ 解析疑难问题 深入浅出
- ◇ 演绎解题技巧 新颖独特
- ◇ 配套经典教材 学习必备

华中科技大学出版社

013  
160=2A  
:2

面向 21 世纪课程教材教学辅导书

# 工科数学分析基础

## 学习指导与习题解析

(下册)

孙清华 孙 昊 李金兰

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础 学习指导与习题解析(下册)

/孙清华 孙 昊 李金兰

武汉:华中科技大学出版社,2006年3月

ISBN 7-5609-3660-1

I. 工…

II. ①孙… ②孙… ③李…

III. 数学分析-高等学校-学习参考资料

IV. O17

工科数学分析基础  
学习指导与习题解析(下册)

孙清华 孙 昊 李金兰

策划编辑:徐正达

封面设计:潘 群

责任编辑:徐正达 柯 贝

责任校对:陈 骏

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉正风图文照排中心

印 刷:湖北省通山县九宫印务有限公司

开本:850×1168 1/32 印张:13.875 字数:336 000

版次:2006年3月第1版 印次:2006年3月第1次印刷 定价:19.80元

ISBN 7-5609-3660-1/O·383

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

# 前 言

普通高等教育“九五”国家级重点教材、面向 21 世纪课程教材《工科数学分析基础》(王绵森、马知恩主编)是高等学校工科对数学知识要求较高专业的一门数学基础课教材,它为大学生提高数学素养与能力,今后更新数学知识、学习现代数学方法奠定了良好的基础.与一般工科学习的高等数学教材相比,《工科数学分析基础》具有理论性更强、知识覆盖更广、内涵更深刻等特点,因而方法与应用更为复杂,习题难度也更大,学起来也更感困难.本书就是为了指导读者如何学好《工科数学分析基础》的内容,帮助读者切实掌握解题的思路、方法与技巧而编写的一本学习辅导书,它将成为您的良师益友.

本书主要依照《工科数学分析基础》编写,提纲挈领地归纳了该教材的知识要点,分析、解答了该书绝大部分习题(题前标符号“·”),另外补充了相当数量的典型例题.为了帮助读者解决学习理论中的困难,在“疑难解析”中对教材中不易理解的概念与学习中可能出现的问题作了诠释、分析和解答.

为了使本书能更好地为读者服务,我们特别注重了如下几点:第一,对教材的习题进行了细致求解,尽量避免错漏;对例题进行了精选,补充了原教材习题的不足,并在文字与解题过程方面下了不少功夫,读者阅读起来会更觉流畅、明白、易懂.第二,对方法、技

巧进行了归纳、评点,使读者通过学习能领会实质、融会贯通。第三,深入浅出地解析疑难问题,以帮助读者更好地理解教材内容、认识问题的本质。

本书是由孙清华、孙昊、李金兰共同完成的。

本书能以全新的面貌与读者见面,应感谢华中科技大学出版社的大力支持。

孙清华 孙昊 李金兰

2005年8月

# 目 录

第五章 多元函数微分学及其应用	(1)
第一节 $n$ 维 Euclid 空间点集拓扑初步	(1)
主要内容	(1)
疑难解析	(5)
典型例题与习题详解	(6)
第二节 多元函数的极限与连续性	(14)
主要内容	(14)
疑难解析	(16)
典型例题与习题详解	(17)
第三节 多元数量值函数的导数与微分	(34)
主要内容	(34)
疑难解析	(38)
典型例题与习题详解	(41)
第四节 多元函数的 Taylor 公式与极值问题	(70)
主要内容	(70)
疑难解析	(73)
典型例题与习题详解	(74)
第五节 多元向量值函数的导数与微分	(90)
主要内容	(90)
疑难解析	(94)
典型例题与习题详解	(95)
第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用	(104)
主要内容	(104)
疑难解析	(108)

典型例题与习题详解 .....	(108)
第七节 空间曲线的曲率与挠率 .....	(129)
主要内容 .....	(129)
疑难解析 .....	(132)
典型例题与习题详解 .....	(132)
<b>第六章 多元函数积分学及其应用</b> .....	(150)
<b>第一节 多元数量值函数积分的概念与性质</b> .....	(150)
主要内容 .....	(150)
疑难解析 .....	(152)
典型例题与习题详解 .....	(154)
<b>第二节 二重积分的计算</b> .....	(156)
主要内容 .....	(156)
疑难解析 .....	(157)
典型例题与习题详解 .....	(158)
<b>第三节 三重积分的计算</b> .....	(184)
主要内容 .....	(184)
疑难解析 .....	(186)
典型例题与习题详解 .....	(186)
<b>第四节 重积分的应用</b> .....	(201)
主要内容 .....	(202)
疑难解析 .....	(204)
典型例题与习题详解 .....	(205)
<b>第五节 含参变量的积分与反常重积分</b> .....	(218)
主要内容 .....	(218)
疑难解析 .....	(222)
典型例题与习题详解 .....	(223)
<b>第六节 第一型线积分与面积分</b> .....	(236)
主要内容 .....	(236)

疑难解析 .....	(238)
典型例题与习题详解 .....	(239)
第七节 第二型线积分与面积分 .....	(259)
主要内容 .....	(259)
疑难解析 .....	(262)
典型例题与习题详解 .....	(263)
第八节 各种积分的联系及其在场论中的应用 .....	(277)
主要内容 .....	(278)
疑难解析 .....	(282)
典型例题与习题详解 .....	(283)
第七章 常微分方程 .....	(309)
第一节 常微分方程的基本知识 .....	(309)
主要内容 .....	(309)
疑难解析 .....	(310)
典型例题与习题详解 .....	(310)
第二节 线性微分方程组 .....	(318)
主要内容 .....	(318)
疑难解析 .....	(321)
典型例题与习题详解 .....	(321)
第三节 常系数线性微分方程组 .....	(333)
主要内容 .....	(333)
疑难解析 .....	(334)
典型例题与习题详解 .....	(335)
第四节 高阶线性微分方程 .....	(347)
主要内容 .....	(347)
疑难解析 .....	(348)
典型例题与习题详解 .....	(349)
第五节 微分方程的定性分析方法初步 .....	(362)



主要内容 .....	(362)
疑难解析 .....	(365)
典型例题与习题详解 .....	(365)
<b>第八章 无限维分析入门</b> .....	(377)
<b>第一节 赋范线性空间与压缩映射原理</b> .....	(377)
主要内容 .....	(377)
疑难解析 .....	(380)
典型例题与习题详解 .....	(382)
<b>第二节 Lebesgue 积分与 <math>L^p([a, b])</math> 空间</b> .....	(407)
主要内容 .....	(407)
疑难解析 .....	(411)
典型例题与习题详解 .....	(412)
<b>第三节 Hilbert 空间与最佳逼近问题</b> .....	(426)
主要内容 .....	(426)
疑难解析 .....	(430)
典型例题与习题详解 .....	(430)

## 第五章 多元函数微分学及其应用

### 第一节 $n$ 维 Euclid 空间点集拓扑初步

#### 主要内容

##### 1. $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$

(1)  $n$  维实向量 一个  $n$  ( $n \geq 2$ ) 元有序数组

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

称为一个  $n$  维实向量, 记  $n$  维实向量全体所构成的集合为

$$\mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

设  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ , 定义两个向量的加法为

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

向量  $\mathbf{x}$  与数  $\alpha \in \mathbf{R}$  的乘积为

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

则  $\mathbf{R}^n$  构成一个  $n$  维实向量空间.

(2) 向量的内积 设

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n,$$

则定义  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  的内积为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$n$  维实向量空间  $\mathbf{R}^n$  按以上内积定义构成一个  $n$  维 Euclid 空间.

内积具有下列简单性质:

①  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ ;

②  $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (\alpha \in \mathbf{R})$ ;

$$\textcircled{3} \langle x+z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle;$$

$$\textcircled{4} \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ 且 } x = \mathbf{0}, \text{ 当且仅当 } \langle x, x \rangle = 0.$$

(3) 向量的范数  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , 定义  $x$  的长度 (或范数) 为

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

(4)  $n$  维 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$  中两点间的距离  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  和  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $x$  与  $y$  之间的距离定义为

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

(5)  $\mathbf{R}^n$  中的  $n$  维闭区间 设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ , 则称点集

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为  $\mathbf{R}^n$  中的  $n$  维闭区间, 记作  $[a, b]$ . 显然

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

## 2. $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限

(1) 点列极限的定义 设  $\{x_k\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一个点列,  $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一点, 若当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\rho(x_k, a) \rightarrow 0$ , 即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{ 使得 } \forall k > N, \text{ 恒有 } \|x_k - a\| < \epsilon,$$

则称点列  $\{x_k\}$  的极限存在, 且称  $a$  为它的极限, 记作

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad \text{或} \quad x_k \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty).$$

这时也称点列  $\{x_k\}$  收敛于  $a$ .

(2) Cauchy 点列 设  $\{x_k\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的点列, 若  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$ , 使得  $\forall k > N$  及  $P \in \mathbf{N}_+$ , 恒有  $\|x_{k+P} - x_k\| < \epsilon$ , 则称  $\{x_k\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的基本点列或 Cauchy 点列.

(3) 关于点列极限的命题

**定理 1.1** 设点列  $\{x_k\} \subseteq \mathbf{R}^n$ , 点  $a \in \mathbf{R}^n$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  的充要

条件是  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , 都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i$ .

**定理 1.2** 设  $\{x_k\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的收敛点列, 则

①  $\{x_k\}$  的极限唯一;

②  $\{x_k\}$  是有界点列, 即  $\exists M (\in \mathbf{R}) > 0$ , 使得  $\forall k \in \mathbf{N}_+$ , 恒有  $\|x_k\| \leq M$ ;

③ 若  $x_k \rightarrow a, y_k \rightarrow b$ , 则  $x_k \pm y_k \rightarrow a \pm b, \alpha x_k \rightarrow \alpha a, \langle x_k, y_k \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ , 其中  $\alpha \in \mathbf{R}$ ;

④ 若  $\{x_k\}$  收敛于  $a$ , 则它的任一子列也收敛于  $a$ .

**定理 1.3(闭区间套定理)** 设  $\{[a_k, b_k]\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一个闭区间套, 即

①  $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \dots$ ,

②  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|b_k - a_k\| = 0$ , 其中

$a_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbf{R}^n, b_k = (b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,n}) \in \mathbf{R}^n$ ,  
则存在唯一的  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ , 使

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{\xi\}.$$

**定理 1.4(Bolzano-Weierstrass 定理)**  $\mathbf{R}^n$  中的有界点列必有收敛的子列( $\mathbf{R}^n$  中点列  $\{x_k\}$  的收敛子列的极限也称为  $\{x_k\}$  的极限点).

**定理 1.5(Cauchy 收敛原理)**  $\mathbf{R}^n$  中点列  $\{x_k\}$  收敛于  $\mathbf{R}^n$  中点的充要条件为:  $\{x_k\}$  是  $\mathbf{R}$  中的 Cauchy 点列.

### 3. $\mathbf{R}^n$ 中的开集与闭集

(1) 聚点、导集、闭包、孤立点、闭集 设  $A$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一个点集,  $a \in \mathbf{R}^n$ . 若存在  $A$  中的点列  $\{x_k\}, x_k \neq a (k = 1, 2, \dots)$ , 使得  $x_k \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$ , 则称  $a$  是  $A$  的聚点.  $A$  的所有聚点构成的集合称为  $A$  的导集, 记作  $A'$ . 集合  $\bar{A} = A \cup A'$  称为  $A$  的闭包. 若  $a \in A$ , 但  $a \notin A'$ , 则称  $a$  为  $A$  的孤立点. 若  $A' \subseteq A$ , 则称  $A$  为闭集.

(2) 邻域 设  $a \in \mathbf{R}^n, \delta > 0$ , 称点集

$$U(a, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}$$

为以  $a$  为中心、 $\delta$  为半径的**开球**或点  $a$  的  $\delta$  **邻域**, 简记作  $U(a)$ ; 称

$$\dot{U}(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$$

为点  $a$  的**去心  $\delta$  邻域**, 简记作  $\dot{U}(a)$ .

(3) **聚点的判别条件** 设  $A$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一个点集,  $a \in \mathbf{R}^n$ , 则  $a \in A'$  的充要条件为  $\forall \varepsilon > 0, \dot{U}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ . 这就是说,  $a$  为  $A$  的聚点当且仅当  $a$  的任何  $\varepsilon$  邻域中都含有  $A$  中除  $a$  之外的点.

(4) **内点、内部、外点、外部、边界点、边界** 设  $A \subseteq \mathbf{R}^n, a \in \mathbf{R}^n$ .

① 若存在  $\delta > 0$ , 使  $U(a, \delta) \subseteq A$ , 则称  $a$  为集  $A$  的**内点**. 由  $A$  的所有内点构成的集称为  $A$  的**内部**, 记作  $A^\circ$  或  $\text{int}A$ ;

② 若存在  $\delta > 0$ , 使  $U(a, \delta) \cap A = \emptyset$ , 则称  $a$  为集  $A$  的**外点**.  $A$  的所有外点构成的集称为  $A$  的**外部**, 记作  $\text{ext}A$ ;

③ 若对任何  $\delta > 0, U(a, \delta)$  中既含有  $A$  中的点, 也含有  $A$  的余集  $A^c$  中的点, 则称  $a$  为集  $A$  的**边界点**.  $A$  的所有边界点构成的集称为  $A$  的**边界**, 记作  $\partial A$ .

对  $\mathbf{R}^n$  中的任一点集  $A$ , 必有

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

特别地, 称开球与它的边界之并为**闭球**, 记作

$$\bar{U}(a, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - a\| \leq \delta\}.$$

(5) **开集及其判别条件** 设  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ , 若  $A^\circ = A$ , 即  $A$  中的点全是  $A$  的内点, 则称  $A$  为**开集**.

**定理 1.6(开集的判别条件)**  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  是开集的充要条件为  $A^c$  是闭集.

**定理 1.7** 在  $n$  维 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$  中, 开集有如下性质:

① 空集  $\emptyset$  与全空间  $\mathbf{R}^n$  是开集;

\* 国标规定  $A$  的余集用  $\complement_A$  表示, 为了与教材呼应, 本书仍用  $A^c$  表示.

② 任意多个开集的并是开集；

③ 有限多个开集的交是开集.

用对偶原理可以证明闭集有三个对应的基本性质：

① 空集  $\emptyset$  与全空间  $\mathbf{R}^n$  是闭集；

② 任意多个闭集的交是闭集；

③ 有限多个闭集的并是闭集.

#### 4. $\mathbf{R}^n$ 中的紧集与区域

(1) 有界集与紧集 设  $A$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一个点集, 如果存在一个常数  $M > 0$ , 使得对于所有的  $x \in A$ , 都有  $\|x\| \leq M$ , 则称  $A$  是有界集, 否则称  $A$  为无界集.

若  $A$  中任何点列都有收敛的子列, 则称  $A$  是列紧的(或相对紧的). 若  $A$  是列紧闭集, 则称  $A$  为紧集.

根据 Bolzano-Weierstrass 定理,  $\mathbf{R}^n$  中的有界点集  $A$  必为列紧集. 因而,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  是紧集当且仅当  $A$  为有界闭集.

(2) 连通集、区域、闭区域、凸集 设  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  是一个点集, 如果  $A$  中的任意两点  $x$  与  $y$  都能用完全属于  $A$  的有限个线段连接起来, 则称  $A$  是连通集. 连通的开集称为区域. 区域与它的边界之并称为闭区域.

设  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ , 若连接  $A$  中任意两点的线段都属于  $A$ , 即若  $x_1, x_2 \in A$ , 则  $\forall t \in [0, 1], tx_1 + (1-t)x_2 \in A$ , 则称  $A$  是  $\mathbf{R}^n$  中的凸集.

显然, 任何凸集都是连通的, 因而任何凸开集都是区域.

### 疑难解析

1.  $\mathbf{R}^n$  上的完备性与实数系  $\mathbf{R}$  上的完备性有何联系?

答  $\mathbf{R}^n$  上的完备性是实数系  $\mathbf{R}$  上完备性的推广. Cauchy 收敛定理指出,  $\mathbf{R}^n$  中的 Cauchy 点列必收敛于  $\mathbf{R}^n$  中的点, 从而将  $\mathbf{R}^n$  中点列  $\{x_k\}$  的收敛问题转化为实数列的收敛问题. 所以说 Cauchy 收敛定理刻画了空间  $\mathbf{R}^n$  的完备性, 建立了  $\mathbf{R}^n$  上的完备性与实数

系  $\mathbf{R}$  上完备性的联系.

2. 一个集  $A$  若不是开集,就一定是闭集吗?

答 否. 开集与闭集是两类常见的集合,但还有很多既不是闭集又不是开集的点集,例如无理点集与有理点集. 因为它们没有内点,所以不是开集;又因为每个实数都是聚点,而有些实数是有理数,有些实数是无理数,所以也不是闭集. 还有些集合,如  $\mathbf{R}^n$  和  $\emptyset$ ,既是开集又是闭集.

### 典型例题与习题详解

(题前标有符号“·”的为《工科数学分析基础》教材中的习题,下同)

要求理解  $n$  维 Euclid 空间的基本概念,能辨析与证明关于点集的一些基本命题,是学好多元函数微积分学的基础.

·例1 设  $\{x_k\}$  为  $\mathbf{R}^n$  中的点列,  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ , 证明:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|a\|.$$

证 因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ , 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+,$  使得  $\forall k > N,$  恒有  $\|x_k - a\| < \varepsilon.$  又

$$\|x_k - a\| \geq |\|x_k\| - \|a\|| \quad (\text{范数的三角不等式}),$$

所以  $|\|x_k\| - \|a\|| < \varepsilon,$

即 
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|a\|.$$

·例2 求平面  $\mathbf{R}^2$  中下列点列的极限(其中  $n \in \mathbf{N}_+$ ):

$$(1) \left( \frac{(-1)^n}{n}, \frac{n}{n-1} \right); \quad (2) \left( \frac{n^2+1}{n^2-n-1}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right).$$

解 (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1,$  所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(-1)^n}{n}, \frac{n}{n-1} \right) = (0, 1).$$

(2) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-n-1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$  所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2 - n - 1}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = (1, e).$$

• 例 3 证明定理 1.2 中的 ②、④.

设  $\{x_k\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的收敛点列, 则

②  $\{x_k\}$  是有界点列, 则  $\exists M \in \mathbf{R} > 0$ , 使得  $\forall k \in \mathbf{N}_+$ , 恒有  $\|x_k\| \leq M$ ;

④ 若  $\{x_k\}$  收敛于  $a$ , 则它的任一子列也收敛于  $a$ .

证 ② 因为  $\{x_k\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的收敛点列, 不妨设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbf{R}^n$ , 即  $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < 1)$ ,  $\exists N \in \mathbf{N}_+$ , 使得  $\forall k > N$ , 恒有

$$\|x_k - a\| < \varepsilon < 1.$$

$$\text{又 } \|x_k - a\| \geq \|x_k\| - \|a\|,$$

所以,  $\forall k > N$ , 有

$$\|x_k\| < \varepsilon + \|a\| < 1 + \|a\|.$$

令  $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_N\|, 1 + \|a\|\} > 0$ ,

$\forall k \in \mathbf{N}_+$ ,  $\exists \|x_k\| \leq M$ , 即  $\{x_k\}$  是有界点列.

④ 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ , 且假设  $\{x_k\}$  中存在一个子列  $\{x_{k_j}\}$  不收敛于  $a$ , 不妨设  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = b, b \neq a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists J \in \mathbf{N}_+$ , 使得  $\forall j > J$ , 恒有  $\|x_{k_j} - b\| < \varepsilon$ .

令  $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}), a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 则由定理 1.1 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \textcircled{1}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j,i} = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad \textcircled{2}$$

由于  $b \neq a$ , 则  $\exists i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得  $a_{i_0} \neq b_{i_0}$ , 不妨设  $a_{i_0} > b_{i_0}$ . 令  $\varepsilon_0 = \frac{a_{i_0} - b_{i_0}}{2} > 0$ , 则由式 ① 知,  $\exists K \in \mathbf{N}_+$ , 使得  $\forall k > K$ , 有

$$\frac{a_{i_0} + b_{i_0}}{2} = a_{i_0} - \varepsilon_0 < x_{k,i_0} < a_{i_0} + \varepsilon_0 = \frac{3a_{i_0} - b_{i_0}}{2}. \quad \textcircled{3}$$



由式②知,  $\exists J \in \mathbf{N}_+$ , 使得  $\forall j > J$ , 有

$$\frac{3b_{i_0} - a_{i_0}}{2} = b_{i_0} - \varepsilon_0 < x_{k_j, j_0} < b_{i_0} + \varepsilon_0 = \frac{a_{i_0} + b_{i_0}}{2}. \quad (4)$$

取  $J \in \mathbf{N}_+$ , 使得  $K_j > K$ , 则由式③得

$$\frac{a_{i_0} + b_{i_0}}{2} < x_{k_j, i_0} < \frac{3a_{i_0} - b_{i_0}}{2}. \quad (5)$$

比较知, 式④与式⑤矛盾, 故假设不成立, 即  $\{x_k\}$  中的任一子数列都收敛于  $a$ .

• 例4 下列集合是开集还是闭集? 求出它们的内部、边界和闭包.

(1)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ;

(2)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < x^2\}$ ;

(3)  $A = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ ;

(4)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < x < 1, y = 0\}$ .

解 (1)  $A$  是闭集.

$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\},$$

$$\partial A = \{(x, y) \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\cup \{(x, y) \mid y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\cup \{(x, y) \mid x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$\bar{A} = A.$$

(2)  $A$  是开集.

$$A^\circ = A, \quad \partial A = \{(x, y) \mid y = x^2\},$$

$$\bar{A} = \{(x, y) \mid y \leq x^2\}.$$

(3)  $A$  是闭集.

$$A^\circ = \emptyset, \quad \partial A = A, \quad \bar{A} = A.$$

(4)  $A$  既不是开集也不是闭集.

$$A^\circ = \emptyset,$$

$$\partial A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, y = 0\}, \quad \bar{A} = \partial A.$$