GONGKE SHUXUE FENXI JICHU XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

面向21世纪课程教材教学辅导书

工科数学分析基础学习指导与习题解析

（下册）

孙清华　孙昊　李金兰

◇归纳知识要点　提纲挈领

◇解析疑难问题　深入浅出

◇演绎解题技巧　新颖独特

◇配套经典教材　学习必备

华中科技大学出版社

面向 21 世纪课程教材教学辅导书

工科数学分析基础
学习指导与习题解析

(下册)

孙清华　孙　昊　李金兰

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础　学习指导与习题解析(下册)
/孙清华　孙　昊　李金兰
武汉:华中科技大学出版社,2006年3月
ISBN 7-5609-3660-1

Ⅰ.工…
Ⅱ.①孙…　②孙…　③李…
Ⅲ.数学分析-高等学校-学习参考资料
Ⅳ.O17

工科数学分析基础
学习指导与习题解析(下册)　　孙清华　孙　昊　李金兰

策划编辑:徐正达　　封面设计:潘　群
责任编辑:徐正达　柯　贝
责任校对:陈　骏　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉正风图文照排中心
印　刷:湖北省通山县九宫印务有限公司

开本:850×1168　1/32　印张:13.875　字数:336 000
版次:2006年3月第1版　印次:2006年3月第1次印刷　定价:19.80元
ISBN 7-5609-3660-1/O・383

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前　言

普通高等教育"九五"国家级重点教材、面向21世纪课程教材《工科数学分析基础》(王绵森、马知恩主编)是高等学校工科对数学知识要求较高专业的一门数学基础课教材,它为大学生提高数学素养与能力,今后更新数学知识、学习现代数学方法奠定了良好的基础.与一般工科学习的高等数学教材相比,《工科数学分析基础》具有理论性更强、知识覆盖更广、内涵更深刻等特点,因而方法与应用更为复杂,习题难度也更大,学起来也更感困难.本书就是为了指导读者如何学好《工科数学分析基础》的内容,帮助读者切实掌握解题的思路、方法与技巧而编写的一本学习辅导书,它将成为您的良师益友.

本书主要依照《工科数学分析基础》编写,提纲挈领地归纳了该教材的知识要点,分析、解答了该书绝大部分习题(题前标符号"·"),另外补充了相当数量的典型例题.为了帮助读者解决学习理论中的困难,在"疑难解析"中对教材中不易理解的概念与学习中可能出现的问题作了诠释、分析和解答.

为了使本书能更好地为读者服务,我们特别注重了如下几点:第一,对教材的习题进行了细致求解,尽量避免错漏;对例题进行了精选,补充了原教材习题的不足,并在文字与解题过程方面下了不少功夫,读者阅读起来会更觉流畅、明白、易懂.第二,对方法、技

巧进行了归纳、评点，使读者通过学习能领会实质、融会贯通. 第三，深入浅出地解析疑难问题，以帮助读者更好地理解教材内容、认识问题的本质.

本书是由孙清华、孙昊、李金兰共同完成的.

本书能以全新的面貌与读者见面，应感谢华中科技大学出版社的大力支持.

孙清华　孙昊　李金兰

2005年8月

目　　录

第五章　多元函数微分学及其应用

第一节　n 维 Euclid 空间点集拓扑初步

主要内容

1. n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$

(1) n 维实向量　一个 n ($n \geqslant 2$) 元有序数组

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n)$$

称为一个 n **维实向量**，记 n 维实向量全体所构成的集合为

$$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$，定义两个向量的加法为

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 与数 $\alpha \in \mathbf{R}$ 的乘积为

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n),$$

则 $\mathbf{R}^n$ 构成一个 n **维实向量空间**.

(2) 向量的内积　设

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n,$$

则定义 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 按以上内积定义构成一个 n **维 Euclid 空间**.

内积具有下列简单性质：

①$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$；

②$\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \quad (\alpha \in \mathbf{R})$；

③$\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle=\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle$;

④$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，当且仅当$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0$.

（3）向量的范数　$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \mathbf{R}^n$，定义 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**（或**范数**）为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

（4）n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中两点间的距离　$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的**距离**定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

（5）$\mathbf{R}^n$ 中的 n 维闭区间　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in \mathbf{R}^n$，则称点集

$$\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \mathbf{R}^n \mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中的 n **维闭区间**，记作$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. 显然

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n].$$

2. $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限

（1）点列极限的定义　设$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列，$\boldsymbol{x}_k=(x_{k,1},x_{k,2},\cdots,x_{k,n})$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一点，若当 $k\to\infty$ 时，$\rho(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{a})\to 0$，即

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k>N, \text{恒有 } \|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon,$$

则称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的**极限存在**，且称 $\boldsymbol{a}$ 为它的**极限**，记作

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}\ (k\to\infty).$$

这时也称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$ **收敛于** $\boldsymbol{a}$.

（2）Cauchy 点列　设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$ 中的点列，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbf{N}_+$，使得 $\forall k>N$ 及 $P\in \mathbf{N}_+$，恒有 $\|\boldsymbol{x}_{k+P}-\boldsymbol{x}_k\|<\varepsilon$，则称$\{\boldsymbol{x}_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的**基本点列**或 Cauchy **点列**.

（3）关于点列极限的命题

定理 1.1　设点列$\{\boldsymbol{x}_k\}\subseteq \mathbf{R}^n$，点 $\boldsymbol{a}\in \mathbf{R}^n$，则$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$ 的充要

条件是 $\forall i=1,2,\cdots,n$,都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$.

定理 1.2 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列,则

①$\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限唯一;

②$\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列,即 $\exists M(\in\mathbf{R})>0$,使得 $\forall k\in\mathbf{N}_+$,恒有 $\|\boldsymbol{x}_k\|\leqslant M$;

③ 若 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{x}_k\pm\boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b},\alpha\boldsymbol{x}_k\to\alpha\boldsymbol{a},\langle\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_k\rangle\to\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,其中 $\alpha\in\mathbf{R}$;

④ 若$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于 $\boldsymbol{a}$,则它的任一子列也收敛于 $\boldsymbol{a}$.

定理 1.3(闭区间套定理) 设$\{[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k]\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭区间套,即

①$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1]\supseteq[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2]\supseteq\cdots\supseteq[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k]\supseteq\cdots$,

② $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{b}_k-\boldsymbol{a}_k\|=0$,其中

$\boldsymbol{a}_k=(a_{k,1},a_{k,2},\cdots,a_{k,n})\in\mathbf{R}^n,\quad \boldsymbol{b}_k=(b_{k,1},b_{k,2},\cdots,b_{k,n})\in\mathbf{R}^n$,

则存在唯一的 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$,使

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k]=\{\boldsymbol{\xi}\}.$$

定理 1.4(Bolzano-Weierstrass 定理) $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列必有收敛的子列($\mathbf{R}^n$ 中点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的收敛子列的极限也称为$\{\boldsymbol{x}_k\}$的**极限点**).

定理 1.5(Cauchy 收敛原理) $\mathbf{R}^n$ 中点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中点的充要条件为:$\{\boldsymbol{x}_k\}$是 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 点列.

3. $\mathbf{R}^n$ 中的开集与闭集

(1) 聚点、导集、闭包、孤立点、闭集 设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集,$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$. 若存在 A 中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$,$\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{a}\ (k=1,2,\cdots)$,使得 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}\ (k\to\infty)$,则称 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的**聚点**. A 的所有聚点构成的集合称为 A 的**导集**,记作 A'. 集合 $\overline{A}=A\cup A'$ 称为 A 的**闭包**. 若 $\boldsymbol{a}\in A$,但 $\boldsymbol{a}\notin A'$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为 A 的**孤立点**. 若 $A'\subseteq A$,则称 A 为**闭集**.

(2) 邻域 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,$\delta>0$,称点集

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\}$$

为以 $\boldsymbol{a}$ 为中心、δ 为半径的**开球**或点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ **邻域**,简记作 $U(\boldsymbol{a})$;称

$$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\delta)=U(\boldsymbol{a},\delta)\setminus\{\boldsymbol{a}\}$$

为点 $\boldsymbol{a}$ 的**去心** δ **邻域**,简记作 $\mathring{U}(\boldsymbol{a})$.

(3) 聚点的判别条件　设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集,$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,则 $\boldsymbol{a}\in A'$ 的充要条件为 $\forall\varepsilon>0,\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$. 这就是说,$\boldsymbol{a}$ 为 A 的聚点当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 的任何 ε 邻域中都含有 A 中除 $\boldsymbol{a}$ 之外的点.

(4) 内点、内部、外点、外部、边界点、边界　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$.

① 若存在 $\delta>0$,使 $U(\boldsymbol{a},\delta)\subseteq A$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为集 A 的**内点**. 由 A 的所有内点构成的集称为 A 的**内部**,记作 A° 或 $\mathrm{int}A$;

② 若存在 $\delta>0$,使 $U(\boldsymbol{a},\delta)\cap A=\varnothing$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为集 A 的**外点**. A 的所有外点构成的集称为 A 的**外部**,记作 $\mathrm{ext}A$;

③ 若对任何 $\delta>0$,$U(\boldsymbol{a},\delta)$ 中既含有 A 中的点,也含有 A 的余集 A^C* 中的点,则称 $\boldsymbol{a}$ 为集 A 的**边界点**. A 的所有边界点构成的集称为 A 的**边界**,记作 ∂A.

对 $\mathbf{R}^n$ 中的任一点集 A,必有

$$\overline{A}=A\cup\partial A.$$

特别地,称开球与它的边界之并为**闭球**,记作

$$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\leqslant\delta\}.$$

(5) 开集及其判别条件　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,若 $A^\circ=A$,即 A 中的点全是 A 的内点,则称 A 为**开集**.

定理 1.6(开集的判别条件)　$A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是开集的充要条件为 A^C 是闭集.

定理 1.7　在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中,开集有如下性质:

① 空集 $\varnothing$ 与全空间 $\mathbf{R}^n$ 是开集;

---

* 国标规定 A 的余集用 $\complement_A$ 表示,为了与教材呼应,本书仍用 A^C 表示。

② 任意多个开集的并是开集；

③ 有限多个开集的交是开集.

用对偶原理可以证明闭集有三个对应的基本性质：

① 空集 $\varnothing$ 与全空间 $\mathbf{R}^n$ 是闭集；

② 任意多个闭集的交是闭集；

③ 有限多个闭集的并是闭集.

4. $\mathbf{R}^n$ 中的紧集与区域

(1) 有界集与紧集　设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于所有的 $\boldsymbol{x}\in A$，都有 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant M$，则称 A 是**有界集**，否则称 A 为**无界集**.

若 A 中任何点列都有收敛的子列，则称 A 是**列紧的**(**或相对紧的**). 若 A 是列紧闭集，则称 A 为**紧集**.

根据 Bolzano-Weierstrass 定理，$\mathbf{R}^n$ 中的有界点集 A 必为列紧集. 因而，$A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是紧集当且仅当 A 为有界闭集.

(2) 连通集、区域、闭区域、凸集　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个点集，如果 A 中的任意两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 都能用完全属于 A 的有限个线段连接起来，则称 A 是**连通集**. 连通的开集称为**区域**. 区域与它的边界之并称为**闭区域**.

设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，若连接 A 中任意两点的线段都属于 A，即若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in A$，则 $\forall t\in[0,1]$，$t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2\in A$，则称 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**凸集**.

显然，任何凸集都是连通的，因而任何凸开集都是区域.

疑 难 解 析

1. **$\mathbf{R}^n$ 上的完备性与实数系 $\mathbf{R}$ 上的完备性有何联系？**

答　$\mathbf{R}^n$ 上的完备性是实数系 $\mathbf{R}$ 上完备性的推广. Cauchy 收敛定理指出，$\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列必收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中的点，从而将 $\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{x_k\}$ 的收敛问题转化为实数列的收敛问题. 所以说 Cauchy 收敛定理刻画了空间 $\mathbf{R}^n$ 的完备性，建立了 $\mathbf{R}^n$ 上的完备性与实数

系 $\mathbf{R}$ 上完备性的联系.

2. 一个集 A 若不是开集,就一定是闭集吗?

答 否. 开集与闭集是两类常见的集合,但还有很多既不是闭集又不是开集的点集,例如无理点集与有理点集. 因为它们没有内点,所以不是开集;又因为每个实数都是聚点,而有些实数是有理数,有些实数是无理数,所以也不是闭集. 还有些集合,如 $\mathbf{R}^n$ 和 $\varnothing$,既是开集又是闭集.

典型例题与习题详解

(题前标有符号"·"的为《工科数学分析基础》教材中的习题,下同)

要求理解 n 维 Euclid 空间的基本概念,能辨析与证明关于点集的一些基本命题,是学好多元函数微积分学的基础.

·例 1 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点列, $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$, $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$,证明: $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k\|=\|\boldsymbol{a}\|$.

证 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$,即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,使得 $\forall k>N$,恒有 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon$. 又

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|\geqslant\big|\,\|\boldsymbol{x}_k\|-\|\boldsymbol{a}\|\,\big|\text{(范数的三角不等式)},$$

所以

$$\big|\,\|\boldsymbol{x}_k\|-\|\boldsymbol{a}\|\,\big|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k\|=\|\boldsymbol{a}\|.$$

·例 2 求平面 $\mathbf{R}^2$ 中下列点列的极限(其中 $n\in\mathbf{N}_+$):

(1) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n},\dfrac{n}{n-1}\right)$; (2) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-n-1},\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n},\frac{n}{n-1}\right)=(0,1).$$

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2-n-1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-n-1},\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=(1,\mathrm{e}).$$

·**例 3** 证明定理 1.2 中的 ②、④.

设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列，则

②$\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列，则 $\exists M(\in\mathbf{R})>0$，使得 $\forall k\in\mathbf{N}_+$，恒有 $\|\boldsymbol{x}_k\|\leqslant M$;

④ 若$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于 $\boldsymbol{a}$，则它的任一子列也收敛于 $\boldsymbol{a}$.

证 ② 因为$\{\boldsymbol{x}_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列，不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}(\in\mathbf{R}^n)$，即 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使得 $\forall k>N$，恒有

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon<1.$$

又
$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|\geqslant\|\boldsymbol{x}_k\|-\|\boldsymbol{a}\|,$$

所以，$\forall k>N$，有

$$\|\boldsymbol{x}_k\|<\varepsilon+\|\boldsymbol{a}\|<1+\|\boldsymbol{a}\|.$$

令 $M=\max\{\|\boldsymbol{x}_1\|,\|\boldsymbol{x}_2\|,\cdots,\|\boldsymbol{x}_N\|,1+\|\boldsymbol{a}\|\}>0$，$\forall k\in\mathbf{N}_+$，$\exists\|\boldsymbol{x}_k\|\leqslant M$，即$\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界点列.

④ 设 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，且假设$\{\boldsymbol{x}_k\}$中存在一个子列$\{\boldsymbol{x}_{k_j}\}$不收敛于 $\boldsymbol{a}$，不妨设 $\lim\limits_{j\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_j}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{a}$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists J\in\mathbf{N}_+$，使得 $\forall j>J$，恒有 $\|\boldsymbol{x}_{k_j}-\boldsymbol{b}\|<\varepsilon$.

令 $\boldsymbol{x}_k=(x_{k,1},x_{k,2},\cdots,x_{k,n})$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则由定理 1.1 得

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_{k,i}=\boldsymbol{a}_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{①}$$

$$\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_j,i}=\boldsymbol{b}_i\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{②}$$

由于 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{a}$，则 $\exists i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $a_{i_0}\neq b_{i_0}$，不妨设 $a_{i_0}>b_{i_0}$. 令 $\varepsilon_0=\dfrac{a_{i_0}-b_{i_0}}{2}>0$，则由式①知，$\exists K\in\mathbf{N}_+$，使得 $\forall k>K$，有

$$\frac{a_{i_0}+b_{i_0}}{2}=a_{i_0}-\varepsilon_0<x_{k,i_0}<a_{i_0}+\varepsilon_0=\frac{3a_{i_0}-b_{i_0}}{2}.\tag{③}$$

由式 ② 知，$\exists J \in \mathbf{N}_+$，使得 $\forall j > J$，有

$$\frac{3b_{i_0} - a_{i_0}}{2} = b_{i_0} - \varepsilon_0 < x_{k_j, j_0} < b_{i_0} + \varepsilon_0 = \frac{a_{i_0} + b_{i_0}}{2}. \qquad ④$$

取 $J \in \mathbf{N}_+$，使得 $K_J > K$，则由式 ③ 得

$$\frac{a_{i_0} + b_{i_0}}{2} < x_{k_j, i_0} < \frac{3a_{i_0} - b_{i_0}}{2}. \qquad ⑤$$

比较知，式 ④ 与式 ⑤ 矛盾，故假设不成立，即 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 中的任一子数列都收敛于 $\boldsymbol{a}$.

· 例 4 下列集合是开集还是闭集？求出它们的内部、边界和闭包.

(1) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$；

(2) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < x^2\}$；

(3) $A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$；

(4) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < x < 1, y = 0\}$.

解 (1) A 是闭集.

$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\},$$

$$\begin{aligned} \partial A = &\{(x, y) \mid x = 0, 0 \leqslant y \leqslant 1\} \\ &\cup \{(x, y) \mid y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1\} \\ &\cup \{(x, y) \mid x + y = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}, \end{aligned}$$

$$\overline{A} = A.$$

(2) A 是开集.

$$A^\circ = A, \quad \partial A = \{(x, y) \mid y = x^2\},$$

$$\overline{A} = \{(x, y) \mid y \leqslant x^2\}.$$

(3) A 是闭集.

$$A^\circ = \varnothing, \quad \partial A = A, \quad \overline{A} = A.$$

(4) A 既不是开集也不是闭集.

$$A^\circ = \varnothing,$$

$$\partial A = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\}, \quad \overline{A} = \partial A.$$