复变函数与积分变换

陈元婕 董永胜 吴博特 编著

哈尔滨地图出版社

复变函数与积分变换

FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

陈元婕　董永胜　吴博特　编

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/陈元婕主编.—哈尔滨：哈尔滨地图出版社，2006.5

ISBN 7－80717－319－X

Ⅰ.复… Ⅱ.陈… Ⅲ.①复变函数②积分变换
Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 041670 号

哈尔滨地图出版社出版发行
（地址：哈尔滨市南岗区测绘路 2 号 邮编：150086）
牡丹江市教育印刷责任有限公司印刷
开本：850 mm×1 168 mm 1/32 印张：6.3125 字数：150 千字
2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷
印数：1～1 000 定价：16.80 元

前　言

当今世界，科学技术突飞猛进，知识经济已见端倪，国力竞争日趋激烈。教育在综合国力的形成中处于基础地位，国力的强弱越来越取决于劳动者的素质，取决于人才的质量和数量。面对新的形势，高职高专的教育教学也必须适应发展的需要。本教材的编写就是根据这一需要和高职高专人才的培养目标，认真研讨高职高专的教材特色，结合多年的教学实践与教学研究，努力适应高职高专的教学要求。

本教材在讲清基本概念、基本方法的基础上，由浅入深，重点突出，语言精练，通俗易懂。每章后安排小结，便于学生理解和掌握。

本教材的教学时数约为 44 学时，带*号内容为选学。

本教材第一章、第二章及第三章由董永胜（鸡西大学）编写；第四章、第五章及第六章由吴博特（黑龙江技师学院）编写；第七章及第八章由陈元婕（鸡西大学）编写。全书由陈元婕负责统稿和定稿。

鸡西大学金朝钧教授作为本书的主审，提出了宝贵的意见，在此表示衷心感谢。

编　　者

2006 年 3 月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

所谓的复变函数就是自变量为复数的函数，它是以复数为基础的。本章主要介绍复数的概念、性质及其运算，引入平面点集、区域、复平面以及复变函数的极限与连续的概念。

1.1　复数及其运算

1.1.1　复数域

复数是研究复变函数的基础，在中学我们已初步学习了复数，把形如 $z = x + iy$ 称为复数，其中 x 和 y 是任意实数，i 是虚数单位，$i^2=-1$。x 和 y 分别称为复数的实部和虚部，记为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z。$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相等，是指它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等，即必须且只须

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2。$$

一般说来，两个复数只能说相等或不相等，不能比较大小。

虚部为零的复数可以看作实数；虚部不为零的复数称为虚数；实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数。

设复数 $z = x + iy$，把 $x - iy$ 称为它的共轭复数，记为 $\bar{z}$，即 $\bar{z} = x - iy$ 。

全体复数构成的集合称为复数集，记为 **C**。

1.1.2 复数的表示法

1. 复平面

由复数 $z = x + iy$ 的结构可知，任意一复数都由一对有序实数 (x, y) 惟一确定，所以对于平面上给定的直角坐标系，复数 $z = x + iy$ 可以用坐标为 (x, y) 的点来表示。x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面或 z 平面。反之，对于平面直角坐标系内任意一点 P，由它的坐标 (x, y) 都可确定一个复数，于是复数与平面上的点之间建立了一一对应关系，并且把"点 z"作为"数 z"的同义词今后不再区分。

复数 $z = x + iy$ 还可用连结原点与点 $P(x, y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示(图 1.1.1)。向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值，记作 $|z|$ 或 r，即 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$。

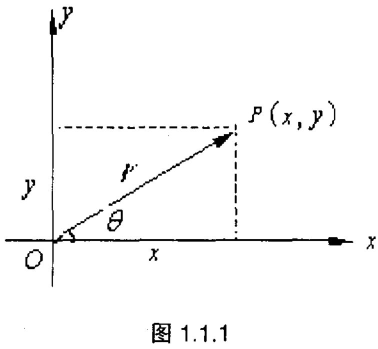

图 1.1.1

向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴的正方向所夹角 θ 称为 z $(z \neq 0)$ 的辐角，

记作 $\mathrm{Arg} z = \theta$，它是多值的。通常把满足条件 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的辐

角 θ_0 称为 θ 的主值，记作 $\theta_0 = \arg z$，于是有

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \qquad （k\ 为任意整数）。$$

又由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

$$\tan\ \mathrm{Arg}z = \tan\theta = \frac{y}{x}\ 。$$

它给出了 z 的全部辐角。在确定主值 $\arg z$ 时，必须考虑 z 所在的象限：

$$\arg z \quad = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & x > 0, y \substack{> \\ = \\ <} 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases} \quad ,$$

$z \neq 0)$

2. 复数的三角表示

利用直角坐标与极坐标的关系：

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，可以把复数 z 表示成下面形式：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

称为复数的三角表示法，而 $z=x+iy$ 称为复数的代数表示法。

3. 复数的指数表示

由欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 又可得到

$$z=re^{i\theta},$$

称为复数的指数表示法。

复数的各种表示法可以相互转化，以适应讨论不同问题的需要。

例 1 将 $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 化为三角表示式和指数表示式。

解 $|z|=r=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$ ，

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\sqrt{3} 。$$

由于 z 在第四象限，所以 $\theta=-\frac{\pi}{3}$。从而 z 的三角表示式

$$z=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} 。$$

z 的指数表示式 $z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ 。

例 2 计算 $z=e^{-i\pi}$ 。

解 因为 $e^{-i\pi}=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)$ ，所以 $z=e^{-i\pi}=-1$ 。

1.1.3 复数的代数运算

1. **复数的四则运算**

由中学所学的复数知识可知：设两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$，则它们的加法、减法、乘法及除法如下：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2}, \qquad (z_2 \neq 0)$$

复数的加法、乘法遵守交换律和结合律，且还遵守乘法对于加法的分配律。

根据复数的运算法则可知，两个复数 z_1 和 z_2 的加(减)法运算和相应向量的加(减)法运算一致（图 1.1.2），$|z_2 - z_1|$ 表示了 z_1 和 z_2 之间的距离，

且有
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|。$$

2. **共轭复数的性质**

对于共轭复数 $\bar{z}$，它与 z 在平面内的位置是关于实轴对称的（图 1.1.3），且有如下性质：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$, $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$;

(3) $|z|=|\bar{z}|$, $z\bar{z}=|z|^2$。

在计算复数的乘除法时，复数用三角表示式或指数表示式更为方便。

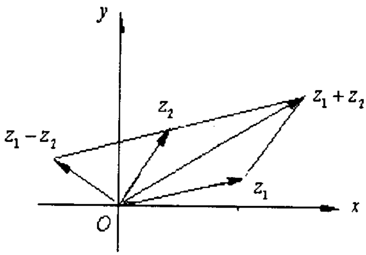

图 1.1.2

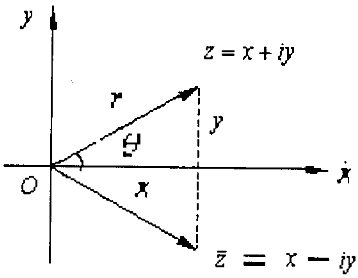

图 1.2.3

3. 乘积和商的模与辐角

若设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$， $z_2=r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}$

则有

$$
\begin{aligned}
z_1z_2&=r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}\\
&=r_1r_2\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)},
\end{aligned}
$$

从而有 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$,

即：两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和。

又有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(z_2\neq 0,r_2\neq 0),$$

从而有

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2,$$

即:两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于被除数的辐角与除数的辐角之差。

1.1.4 复数的乘幂与方根

1. 乘幂运算

作为乘积的特例,我们把 n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,记为 z^n 。它有下面的运算律:

$$z^mz^n=z^{m+n},\ (z^m)^n=z^{mn},\ (z_1z_2)^n=z_1^nz_2^n。$$

对于任意的正整数 n,我们有

$$z^n=(r\mathrm{e}^{i\theta})^n=r^n\mathrm{e}^{in\theta},$$

从而有 $|z^n|=|z|^n$, $\mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z$,

即:复数的 n 次幂的模等于它模的 n 次幂；复数的 n 次幂的辐角

等于它辐角的n倍。

特别当z的模$r=1$时，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

这是著名的棣莫佛(De Moivre)公式。

例3 求$(1-i)^4$。

解 $1-i=\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})]$，

所以 $(1-i)^4=4[\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)]=-4$。

2. 开方运算

对于复数z，若存在复数w满足等式$w^n=z$（n为正整数），则称w为z的n次方根，记为

$$w=\sqrt[n]{z}。$$

当$z=0$时，$w=0$；当$z\neq 0$时，设 $z=re^{i\theta}$， $w=\rho e^{i\varphi}$，由等式$w^n=z$有

$$\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta},$$

从而有 $\rho^n=r$， $n\varphi=\theta+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$，

即 $\rho=r^{\frac{1}{n}}$， $\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$。

故$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n})$，

当$k=0,1\cdots n-1$时，得到n个相异的根。

例 4　解方程 $z^4+2=0$。

解　因为　$z^4=-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$，

所以

$$z=\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ (k=0,1,2,3),$$

由此可解得

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\sqrt[4]{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{pmatrix}。$$

1.2　复平面

1.2.1　曲线的复数表示

任何一条平面曲线 $y=f(x)$ 一定能用复数形式的方程来表示。我们看下面的例子:

例 1　求直线方程 $y=2x-3$ 的复数表示式。

解　由共轭复数的性质 $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$ 与 $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$ 有

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}),$$

将其代入所给的方程中可得

$$\frac{1}{2i}(z-\bar{z})=z+\bar{z}-3,$$

即
$$(1-2i)z-(1+2i)\bar{z}+6i=0。$$

一些常见的平面曲线用复数形式的方程表示往往显得更加简明。

例 2 指出下列方程所表示的曲线:

(1) $|z-2i|=1$；(2) $|z+i|=|z+2|$；(3) $\mathrm{Re}(2+\bar{z})=3$。

解 (1) 方程 $|z-2i|=1$ 从几何上可以看出它表示所有与点 $2i$ 距离为 1 的点的轨迹, 即是以 $2i$ 为圆心, 1 为半径的圆。

(2) 方程 $|z+i|=|z+2|$ 表示到点 $-i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹, 即是以 $-i$ 和 -2 为端点的线段的垂直平分线。

(3) 方程 $\mathrm{Re}(2+\bar{z})=3$ 表示过点 1 与实轴垂直的直线。

由上面的例 1 和例 2 可知平面曲线可用复数所满足的方程来表示。

1.2.2 复平面的点集与区域

为定义开集和闭集，下面我们首先给出平面上的邻域定义。

定义 1.2.1 由不等式 $|z-z_0|<\delta$ 所确定的平面点集,即以 z_0 为中心, δ 为半径的圆内的点集称为点 z_0 的 δ 邻域, 记作

$N(z_0,\delta)$。由 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点集称为点 z_0 的去心邻域,记为 $N(\hat{z}_0,\delta)$。

定义 1.2.2 对于复平面点集 D,若存在点 z_0($z_0 \in D$)的某一个邻域,使得该邻域的所有点都属于 D,则称点 z_0 为 D 的一个内点,若 D 内的所有点都是内点,则称 D 为开集。

定义 1.2.3 若平面点集 D 满足下面两个条件:

(1) D 是开集;

(2) D 是连通的,即 D 中任何两点都可以用完全属于 D 的一条折线连接起来,则称 D 是一个区域。

定义 1.2.4 对于复平面点集 D,若点 z_0 任何邻域内既含有属于 D 的点,也含有不属于 D 的点,则称 z_0 为 D 的边界点。D 的所有边界点的集合称为 D 的边界。区域 D 连同边界一起称为闭区域或闭域,记为 $\overline{D}$。

区域的边界可能是由一条或者几条曲线和一些孤立的点所组成,边界点可能属于 D,也可能不属于 D。

定义 1.2.5 若一个区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆内,则称区域 D 为有界的,否则称区域 D 为无界的。

例 3 由方程 $|z|\le 1$ 所确定的单位圆是一个有界闭区域(图 1.2.1)。

由不等式 $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{3}$ 所表示介于两射线 $\arg z=\frac{\pi}{4}$ 与 $\arg z=\frac{\pi}{3}$ 之间的角形域是无界区域(图 1.2.2)。

由不等式 $1<\operatorname{Im} z<2$ 表示介于两直线 $y=1$ 与 $y=2$ 之间的