假期快乐、劳逸结合

快乐假期

轻松练习

丛书主编：启 智

高一数学

延边人民出版社

HAppy HoLIDAY!

快乐假期

轻松练习

从书主编：启智

高一数学

延边人民出版社

责任编辑：许正勋
责任校对：许正勋

图书在版编目(CIP)数据
快乐假期轻松练习.高一数学/启智主编.—延吉：延边人民出版社,2006.4
ISBN 7-80698-686-3

Ⅰ.快... Ⅱ.启... Ⅲ.数学课—高中—习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 039837 号

书　　名：快乐假期　轻松练习(共 9 册)
主　　编：启　智

出　　版：延边人民出版社
（吉林省延吉市友谊路 363 号,http://www.ybcbs.com）
印　　刷：山东无棣县教育实业公司印刷厂
发　　行：延边人民出版社
开　　本：880×1230　1/16　　印张：30　　字数：960 千字
标准书号：ISBN 7-80698-686-3/G·477
版　　次：2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：10000 册　　定价：43.20 元

Contents 目录

第四章　三角函数

4.1　角的概念的推广

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. 下列命题中正确的是　　(　　)

A. 第一象限角一定不是负角

B. 小于 90°的角一定是锐角

C. 钝角一定是第二象限角

D. 第一象限角一定是锐角

2. 经过 22 个小时，钟表上的时针旋转了　　(　　)

A. 660°　　B. −660°　　C. 300°　　D. −300°

3. 在直角坐标系中，若角 α 与 β 的终边互相垂直，那么 α 与 β 的关系式为　　(　　)

A. $\beta=\alpha+90°$　　B. $\beta=\alpha\pm90°$

C. $\beta=\alpha+90°+k\cdot360°$　　D. $\beta=\alpha\pm90°+k\cdot360°$

4. 若角 α 的终边经过点 $P(-1,\sqrt{3})$，则与角 α 终边相同的角的集合是　　(　　)

A. $\{\alpha|\alpha=135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=150°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=120°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

5. 与 −457°角终边相同的集合是　　(　　)

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+457°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+97°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+263°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-263°,k\in\mathbf{Z}\}$

6. 已知角 α 是第三象限角，则角 $-\alpha$ 的终边在　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

7. 已知角 α、β 终边相同，那么 $\alpha-\beta$ 的终边在　　(　　)

A. x 轴非负半轴上　　B. y 轴非负半轴上

C. x 轴非正半轴上　　D. y 轴非正半轴上

8. 终边与坐标轴重合的角 α 的集合是　　(　　)

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

二、填空题

9. 与角 −1 050°终边相同的最小正角是________.

10. 若 α 是第四象限角，则 $\pi-\alpha$ 是________象限角.

11. 今天是星期一，159 天后的那一天是________.

三、解答题

12. 在 0°到 360°范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是第几象限角：

(1) −265°　　(2) 3 900°

(3) −840°10′　　(4) 560°24′

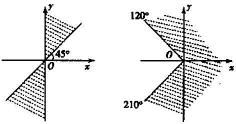
13. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-360°\leqslant\alpha\leqslant360°$ 的元素 α 写出来：

(1) 60°　　(2) −75°

(3) 90°　　(4) −180°

14. 已知 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，角 β 的终边与 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称，求角 β 的集合.

15. 如下图，写出终边落在阴影部分的角的集合(包括边界).



(1)　　(2)

轻松驿站

举杯邀明月，对影成三人！

游乐园里的数学

游乐园是人们爱去的地方，各种各样神奇而有趣的游戏器械吸引着人们去玩耍，那高大的观览车绕轴转动着，边缘上悬挂的座椅，带着游人在高空中旋转，给游人带来乐趣和刺激！你思考过吗？观览车在周而复始的转动中，就包含着许多数学问题。用你学过的数学知识能回答下列问题吗？

1. 从你的座位开始转动的时刻到某个时刻，你的座位转了多少角度？

2. 站在观览车两侧的人，看到观览车转动的方向是否一致？

为了回答这两个问题，你可能会想到初中我们学过的角的知识，但是你会发现只用初中角的知识是不够的。要回答“座位”转过了多少角度，必须把角的概念加以推广。学完本节你就能准确地回答这两个问题了。

典题推荐

不积小知，无以知天下！

【例】(2005年全国Ⅲ)已知α是第三角限角，则$\frac{\alpha}{2}$所在的象限是 (　　)

A. 第一或第二象限　　B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限　　D. 第二或第四象限

解析：$k\cdot 360°+180°<\alpha<k\cdot 360°+270°, k\in \mathbf{Z}$.

$k\cdot 180°+90°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+135°$

$\therefore \frac{\alpha}{2}$在第二、四象限.

答案：D

名题链接

作业，传道解惑也！

1. 若α是第一象限的角，试确定2α所在的象限.

2. 若α是第一象限角，试确定$\frac{\alpha}{3}$所在的象限.

4.2　弧度制

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. 若$\alpha=-6$，则角α的终边在 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 下列结论中，不正确的是 (　　)

A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位

B. 一度的角是周角的$\frac{1}{360}$，一弧度的角是周角的$\frac{1}{2\pi}$

C. 根据弧度的定义，180°一定等于π弧度

D. 不论是用角度制还是弧度制度量角，它们与圆的半径长短有关

3. 集合$M=\{x\mid x=k\cdot 90°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\left\{x\mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$，则 (　　)

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$

C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

4. 一条弦长等于半径的$\frac{1}{2}$，则此弦所对的圆心角是 (　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 以上都不对

5. 若角α与β的终边互为反向延长线，则有 (　　)

A. $\alpha=-\beta$　　B. $\alpha=2k\pi+\beta, k\in \mathbf{Z}$

C. $\alpha=\pi+\beta$　　D. $\alpha=(2k+1)\pi+\beta, k\in \mathbf{Z}$

6. 2弧度的圆心角所对的弦长为2，这个圆心角所夹的扇形面积的数值是 (　　)

A. $\frac{1}{\sin 1}$　　B. $\frac{1}{\sin^2 1}$

C. $\frac{1}{1-\cos 2}$　　D. $\tan 1$

二、填空题

7. 若$\alpha=3$ rad，则角α终边在第________象限，与α终边相同的角的集合可表示为________.

8. 圆的半径变为原来的$\frac{1}{2}$，而弧长不变，则该弧所对的圆心

角是原来的________倍.

9. 地球赤道的半径是 6 370 km,赤道上 1′所对的弧长是________.(精确到 0.01 km)

10. 已知直径为 10 cm 的滑轮上有一条长为 6 cm 的弦,P 是此弦的中点,若滑轮以每秒 5 弧度的角速度转动,则经过 5 s后,点 P 转过的弧长是________.

三、解答题

11. 已知 α 角的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同,在$[0,2\pi)$内哪些角的终边与 $\frac{\alpha}{3}$ 角的终边相同?

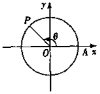
12. 半径为 R 的扇形,其周长为 $4R$,则扇形中所含弓形的面积是多少?

13. 已知 $A=\{x|y=\sqrt{36-x^2}\}$,

$B=\left\{x\left|2k\pi-\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$,

求 $A\cap B$.

14. 如右图,已知圆上一点 $A(1,0)$ 按逆时针方向做匀速圆周运动,1 秒钟时间转过 $\theta(0<\theta\leqslant\pi)$角,经过 2 秒钟到达第三象限,经过 14 秒钟又转到与最初位置重合的位置,求 θ 角的弧度数.



轻 松 驿 站

半醉邀明月,对影成三人!

角度制与弧度制的异同

(1)弧度制是以"弧度"为单位度量角的制度,角度制是以"度"为单位度量角的制度.

(2)1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小,而 1°是圆周长的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或该弧)的大小.

(3)不管是以"弧度"还是以"度"为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的常数.

(4)用弧度为单位表示角的大小时,"弧度"两字可以省略不写,这时弧度数在形式上虽是一个不名数,但我们应该把它理解为名数,如 sin 2 是指 sin(2 弧度),$\pi=180°$是指 π 弧度$=180°$;但如果以度为单位表示角时,度就不能省去.

(5)用弧度为单位表示角时,常常把弧度数写成多少 π 的形式,如无特殊要求,不必把 π 写成小数,如 $45°=\frac{\pi}{4}$ 弧度,不必写成 $45°\approx 0.785$ 弧度.

(6)弧度制与角度制一样,只是一种度量角的方法.弧度制与角度制相比有一定的优点,其一是在进位上角度制在度、分、秒上是 60 进位制,不便于计算,而弧度制是十进位制,给运算带来方便,其二是在下节所学的有关公式中用弧度制比用角度制要简单.

(7)用角度制和弧度制来度量零角,虽然单位不同,但量数相同,对于其他非零度角,由于单位不同,量数也就不同了.

(8)由于弧度制优于角度制,因此常用弧度表示角.

典 题 推 荐

不睬小知,无以知天下!

【例】(2002 年上海)若 α 是第四象限角,则 $\pi-\alpha$ 是　(　)

A. 第一象限角　B. 第二角限角

C. 第三象限角　D. 第四象限角

解析:主要考查角限角及有关象限角的范围.

∵α 是第四象限角.

∴$2k\pi-\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi,k\in \mathbf{Z}$.

∴$-2k\pi<-\alpha<-2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$.

∴$-2k\pi+\pi<\pi-\alpha<-2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$.

∴$\pi-\alpha$ 是第三角限角.

答案:C

名 题 链 接

作业,传道解惑也!

★1. $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$的值是　(　)

A. $\frac{1}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

★★2. 一扇形的周长为 20 cm,当扇形的圆心角 α 等于多少弧度时,这个扇形的面积最大?最大面积是多少?

4.3 任意角的三角函数

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. 已知角 α 的正弦线的长度为单位长度，那么角 α 的终边 （ ）

A. 在 x 轴上　　B. 在 y 轴上

C. 在直线 $y=x$ 上　　D. 在直线 $y=-x$ 上

2. 角 α 的终边上有一点 $P(a,a)$，$a\in\mathbf{R}$，$a\neq0$，则 $\sin\alpha$ 的值是 （ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$或$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

3. 若$\frac{|\sin x|}{\sin x}=\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{|\tan x|}{\tan x}=-1$，则角 x 一定不是 （ ）

A. 第四象限角　　B. 第三象限角

C. 第二象限角　　D. 第一象限角

4. $\sin 2\cdot\cos 3\cdot\tan 4$ 的值 （ ）

A. 小于0　　B. 大于0

C. 等于0　　D. 不存在

5. 如果$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，那么下列各式正确的是 （ ）

A. $\cos\theta<\tan\theta<\sin\theta$　　B. $\sin\theta<\cos\theta<\tan\theta$

C. $\tan\theta<\sin\theta<\cos\theta$　　D. $\cos\theta<\sin\theta<\tan\theta$

6. 若 $\sin\theta\cos\theta>0$，则 θ 在 （ ）

A. 第一、二象限　　B. 第一、三象限

C. 第一、四象限　　D. 第二、四象限

二、填空题

7. 若角 α 的终边经过点 $P(-3,b)$，且 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $b=$________，$\sin\alpha=$________.

8. 求值：$\sin 420^\circ\cos 750^\circ+\sin(-690^\circ)\cos(-660^\circ)=$________.

9. 已知 α 的终边经过点 $(3a-9,a+2)$ 且 $\cos\alpha\leqslant0$，$\sin\alpha>0$，则 a 的取值范围是________.

10. 若角 α 的终边过点 $P(3\cos\theta,-4\cos\theta)$（$\theta$ 为第二象限角），则 $\sin\alpha=$________.

三、解答题

11. 若角 α 的终边与直线 $y=3x$ 重合，且 $\sin\alpha<0$，又 $P(m,n)$ 是 α 终边上一点，且 $|OP|=\sqrt{10}$，则 $m-n$ 等于多少？

12. 根据下列条件，确定 θ 是第几象限角或哪个坐标轴上的角：

(1) $\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta>0$；

(2) $\sin\theta\cos\theta>0$；

(3) $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$；

(4) $|\sin\theta|=\sin\theta$.

13. 若角 θ 的终边经过点 $P(4a,-3a)(a\neq0)$，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值.

轻松驿站

举杯邀明月，对影成三人！

计算机上的练习

使用几何画板或结合课件 4103 研究以下问题.

网上学习

1. 在计算机上作直角坐标系并在直角坐标系中作单位圆，作任意角 α 的终边关于 y 轴对称的射线，以此射线为终边的角记为 β，令 α 的终边绕原点转动，并使得上述对称关系保持不变.

(1) 探索 β 与 α 的数量关系；

(2) 探索 β 的正弦、余弦与 α 的正弦、余弦之间的联系.

2. 使上题中的角 β 的终边与角 α 的终边关于 x 轴或关于原点对称，探索上题各问题.

3. 作 α 和 $\alpha+\frac{\pi}{2}$，让 α 变动，研究 α 与 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 的正弦与余弦函数之间的关系.

典题推荐

不积小知，无以知天下！

【例】已知 $\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是 （ ）

A. 若 α、β 是第一象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

B. 若 α、β 是第二象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

C. 若 α、β 是第三象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

D. 若 α、β 是第四象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

解析：本题考查三角函数的基本性质，同名不同角的三角函数值的大小关系及逻辑推理能力.

若 α、β 是第一象限角，取 α、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\because\sin\alpha>\sin\beta$，$\therefore\alpha>\beta$，此时 $\cos\alpha<\cos\beta$，$\therefore$A 不正确.

若 α、β 是第二象限角，取 α、$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\because\sin\alpha>\sin\beta$，$\therefore\alpha<\beta$，此时，$\tan\alpha<\tan\beta$

$\therefore$B 不正确，若 α、β 是第三象限角，取 α、$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，

$\because\sin\alpha>\sin\beta$，$\therefore\alpha<\beta$.

此时，$\cos\alpha<\cos\beta$，$\therefore$C 不正确.

答案：D

名题链接

作业，传道解惑也！

★1. 在 $[0,2\pi]$ 上满足 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

★★2. 求 $\cos\frac{25\pi}{3}+\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$ 的值.

4.4 同角三角函数的基本关系式

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. 以下各式能成立的是 ( )

A. $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{1}{2}$

B. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ 且 $\tan\alpha=2$

C. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 且 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\tan\alpha=2$ 且 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$

2. 若 $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{\sin x-1}{\cos x}$，则 x 的取值范围是 ( )

A. $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

B. $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

C. $2k\pi+\frac{3\pi}{2}<x<(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$

D. $(2k+1)\pi<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

3. 已知 $\tan\alpha=-\frac{3}{2}$，则 $\sin\alpha\cos\alpha$ 等于 ( )

A. $\frac{6}{13}$　B. $-\frac{6}{13}$　C. $\pm\frac{6}{13}$　D. $\pm\frac{5}{13}$

4. 已知 $\sin x\cos x=\frac{1}{6}$，且 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos x-\sin x$ 的值等于 ( )

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　C. $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$　D. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. 若 $\sin\alpha+\sin^2\alpha=1$，则 $\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$ 的值等于 ( )

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

6. 设 A 是 $\triangle ABC$ 的一个内角且 $\sin A+\cos A=\frac{2}{3}$，则这个三角形是 ( )

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 不等腰的直角三角形　　D. 等腰的直角三角形

7. 若角 α 的终边落在直线 $x+y=0$ 上，则 $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ 的值为 ( )

A. -2　B. 2　C. -2 或 2　D. 0

8. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 且 $0<\alpha<\pi$，则 $\tan\alpha$ 的值为 ( )

A. $-\frac{3}{4}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $-\frac{4}{3}$　D. $\frac{4}{3}$

二、填空题

9. 若 $\tan\alpha=-2$，且 $\sin\alpha<0$，则 $\cos\alpha$ 的值为________.

10. 已知 $\tan\theta=2$，则 $\frac{4\sin\theta-2\cos\theta}{5\cos\theta+3\sin\theta}=$________.

11. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha=$________.

12. 化简 $\frac{1-\cos^4\theta-\sin^4\theta}{1-\cos^6\theta-\sin^6\theta}=$________.

三、解答题

13. 已知 $\tan\alpha=2$，$180^\circ<\alpha<270^\circ$，求 $\frac{3-\sin\alpha}{1+2\cos\alpha}$ 的值.

14．若$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，化简 $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$．

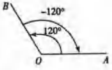
15．求证：$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$．

轻松驿站

举杯邀明月，对影成三人！

三角学的发展

航海、历法推算以及天文观测的需要，推动了三角学的发展．早期三角学总是与天文学密不可分，这样在1450年以前，三角学主要是球面三角，后来由于间接测量、测绘工作的需要而出现了平面三角．15、16世纪德国人开始对三角学作出新的推进，他们从意大利获得了阿拉伯天文学著作中的三角学知识．游学意大利、后来定居维也纳的波伊尔巴赫(G. Peurbach，1423～1461)曾经把托勒玫的《天文大成》译成拉丁文，并且编制了十分精确的正弦表．在欧洲，第一部脱离天文学的三角学专著是波伊尔巴赫的学生雷格蒙塔努斯(J. Regiomontanus，1436～1476)的《论各种三角形》．雷格蒙塔努斯原名叫缪勒(J. Müller)，生于德国，曾经游历于意大利，他搜集、译注了托勒玫的《天文大成》，还翻译过阿波罗尼奥斯、海伦、阿基米德等希腊数学家的著作．



典题推荐

不积小知，无以知天下！

【例】已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\cot\alpha$ 的值是________．

解析：直接解方程组

若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha\geqslant1$．

$\therefore\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$

由$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$ 得$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5},\\ \cos\alpha=-\frac{3}{5}.\end{cases}$

$\therefore\cot\alpha=-\frac{3}{4}$．

还可用构造方程、构造对称方程、弦化切及利用数列等方法解答．

答案：$-\frac{3}{4}$

名题链接

作业，传道解惑也！

★★1．已知 $\theta\in[0,2\pi)$，$\sin\theta$、$\cos\theta$ 分别是方程 $x^2-kx+2k-2=0$ 的两个根，求 $\sin\theta-\cos\theta$ 的值．

★★2．设 $a>0$，求函数 $y=2a(\sin x+\cos x)-\sin x\cdot\cos x-2a^2$ 的最大值和最小值．

4.5　正弦、余弦的诱导公式

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. $\tan 300^\circ+\sin 450^\circ$的值为　(　　)

A. $1+\sqrt{3}$　　B. $1-\sqrt{3}$

C. $-1-\sqrt{3}$　　D. $-1+\sqrt{3}$

2. $\tan 315^\circ-\tan(-300^\circ)+\dfrac{1}{\tan(-330^\circ)}$值为　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3. 如果 $f(x+\pi)=f(-x)$且 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$可以是　(　　)

A. $\sin 2x$　　B. $\cos x$

C. $\sin|x|$　　D. $|\sin x|$

4. 设 $\cos(\pi+\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi\right)$，那么 $\sin(2\pi-\alpha)$的值是　(　　)

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. 下列三角函数，其中函数值与 $\sin\dfrac{\pi}{3}$的值相同的是　(　　)

①$\sin\left(n\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)$　②$\cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$

③$\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$　④$\cos\left[(2n+1)\pi-\dfrac{\pi}{6}\right]$

⑤$\sin\left[(2n+1)\pi-\dfrac{\pi}{3}\right]$(以上 $n\in\mathbf{Z}$)

A. ①③　　B. ①③④

C. ③③⑤　　D. ①③⑤

6. 若 $\cos(\pi+\alpha)=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，且 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，则$\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$的值为　(　　)

A. $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

7. 设 A、B、C是三角形的三个内角，下列关系恒等成立的是　(　　)

A. $\cos(A+B)=\cos C$　　B. $\sin(A+B)=\sin C$

C. $\tan(A+B)=\tan C$　　D. $\sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$

8. 函数 $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{3}(x\in\mathbf{Z})$的值域为　(　　)

A. $\left\{-1,-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1\right\}$　　B. $\left\{-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right\}$

C. $\left\{-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right\}$　　D. $\left\{-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right\}$

二、填空题

9. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)=$________.

10. 已知 $\cos(11\pi-3)=p$，则 p 表示 $\tan(-3)=$________.

11. $\dfrac{1-3\cos(\pi-\theta)}{\cos(2\pi-\theta)}=\dfrac{2}{9}$，则 $\cos(3\pi-\theta)=$________.

三、解答题

12. 求下列各三角函数值：

(1)$\sin\dfrac{2\pi}{3}$；　(2)$\cos\left(-\dfrac{8\pi}{3}\right)$；

(3)$\tan\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)$；(4)$\sin 930^\circ$.

13. 化简：

(1)$\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\tan(\alpha+\pi)\tan(-\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)\tan(3\pi-\alpha)}$.

(2)$\tan 10^\circ\tan 20^\circ\tan 30^\circ\tan 45^\circ\tan 60^\circ\tan 70^\circ\tan 80^\circ$.

14. 已知 $\cos(75^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{3}$，其中 α 为第三象限角，求 $\cos(105^\circ-\alpha)+\sin(\alpha-105^\circ)$的值.

轻松驿站

举杯邀明月，对影成三人！

三角学的发展(续)

1464 年他撰写了自己的著作《论各种三角形》，该书主要从纳西尔丁的著作中吸取养分，全书分五卷，前两卷论平面三角，后三卷论球面三角，给出了球面三角的正弦定理和关于边的余弦定理. 雷格蒙格努斯在其另一部著作《方位表》中，制定了多达 5 倍的三角函数表，除正弦和余弦表外，还有正切表. 在 1450 年以前，希腊、阿拉伯人著作中的三角方法很不严谨，雷格蒙塔努斯首次对三角学作出完整、独立的阐述，使其开始在欧洲广泛传播.

随后，维尔纳(J. Werner，1468～1528)著《论球面三角》(1514)，改进并发展了雷格蒙塔努斯的思想.. 不过此时的三角学存在一个最大的困难，就是缺少一批公式，使用仅知的几个公式，计算十分困难，这主要是由于雷格蒙塔努斯只采用正弦和余弦函数，而且其函数值限定为正数所致. 哥白尼的学生雷提库斯(G. J. Rhaeticus，1514～1576)将传统的弧与弦的关系，改进为角的三角函数关系，并采用了六个函数(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割)，而且还编制了间隔为 10″的 10 位和 15 位正弦表.

典题推荐

不积小知，无以知天下！

【例】(2004年北京)已知 $\sin(\theta+\pi)<0$，$\cos(\theta-\pi)>0$，则下列不等关系中必定成立的是 ( )

A. $\tan\frac{\theta}{2}<\cot\frac{\theta}{2}$ B. $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$

C. $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$ D. $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$

解析：∵ $\sin(\pi+\theta)<0$，∴ $\sin\theta>0$，$\cos(\theta-\pi)>0$，

∴ $\cos\theta<0$，

∴ $2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi$，

∴ $k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<k\pi+\frac{\pi}{2}$.

∴ $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$.

答案：B

名题链接

作业，传递解惑由！

★1. $\tan 300°+\sin 450°$的值为 ( )

A. $1+\sqrt{3}$ B. $1-\sqrt{3}$

C. $-1-\sqrt{3}$ D. $-1+\sqrt{3}$

★★2. (2003年福建)已知 $f(n)=\sin\frac{n\pi}{3}$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 002)+f(2\ 003)$的值等于 ( )

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 0 D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. 设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$等于 ( )

A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{7}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

2. 设 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值是 ( )

A. $\frac{3}{18}$ B. $\frac{13}{18}$ C. $\frac{3}{22}$ D. $\frac{13}{22}$

3. $\sin 163°\sin 223°+\sin 253°\sin 313°$等于 ( )

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 在△ABC中，若 $2\cos B\sin A=\sin C$，则△ABC的形状一定是 ( )

A. 等腰直角三角形 B. 直角三角形

C. 等边三角形 D. 等腰三角形

5. 在平面直角坐标系中，已知两点 $A(\cos 80°,\sin 80°)$，$B(\cos 20°,\sin 20°)$，则 $|AB|$的值等于 ( )

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=2$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值是 ( )

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

7. 在△ABC中，若 $\tan A=\frac{1}{3}$，$\tan B=-2$，则角 C等于 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

8. 已知 $f(x)=\sin x+\cos x$，则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$的值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

9. 若 $\cos\theta=-\frac{12}{13}$，$\theta\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，那么 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=$______.

10. 若 $\tan\alpha=2$，$\tan(\beta-\alpha)=3$，则 $\tan(\beta-2\alpha)=$______.

11. $\tan 80°-\tan 20°-\sqrt{3}\tan 80°\tan 20°=$______.

12. 若 $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，则 $\cos 2\beta=$______.

三、解答题

13. 求 $\sin\frac{7}{18}\pi\cos\frac{2}{9}\pi-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2}{9}\pi$的值.

14. 已知 α,β是锐角，$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，且 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$.

求证：$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$.

15．已知 $\tan A$ 与 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两根，且 $3\tan A=2\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$．

求：p 与 q 的值．

轻松驿站

半杯邀明月，对影成三人！

三角学的发展(续)

三角学的进一步发展，是法国数学家韦达所做的平面三角与球面三角系统化工作．他在《标准数学》(1579)和《斜截面》(1615)二书中，把解平面直角三角形和斜三角形的公式汇集在一起，其中包括他自己得到的正切公式：

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}.$$

他还给出了解球面直角三角形的方法和一套公式，以及帮助记忆这些公式的今天所谓的"纳皮尔法则"．这些球面三角公式大都是托勒玫建立的，但也有韦达自己提出的公式，如 $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\sin A$($A$ 为钝角)，$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，尤为重要的是韦达将这套三角恒等式表示成了代数形式，尽管他所用的并不是现代符号．

在16世纪，三角学已从天文学中分离出来，成为一个独立的数学分支．

典题推荐

不积小知，无以知天下！

【例】(2005年全国Ⅱ)已知 α 为第二象限角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，β 为第一象限角，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，求 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值．

分析：由 α、β 所在象限及 α、β 的正弦、余弦值，可求出 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 的值．然后用两角和的正切公式求解．

解：∵α 为第二象限角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，∴$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$．

$$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}.\ \tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}.$$

∵β 为第一象限角，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$．

$\therefore\tan\beta=\frac{12}{5}$．

所以 $\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{-\frac{24}{7}-\frac{12}{5}}{1+\left(-\frac{24}{7}\right)\left(\frac{12}{5}\right)}=\frac{204}{253}.$$

名题链接

作业，传递解惑也！

★1．(2005年北京)对任意的锐角 α、β，下列不等式关系中正确的是　　(　　)

A. $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$

B. $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$

C. $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$

D. $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

★★2．在△ABC 中，已知 A、B、C 成等差数列，求 $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$ 的值．

★★3．若 $\cos\theta=-\frac{12}{13}$，$\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，那么 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值等于__________．

★★★4．(2004年全国)已知锐角三角形 ABC 中，$\sin(A+B)=\frac{3}{5}$，$\sin(A-B)=\frac{1}{5}$．

(1)求证：$\tan A=2\tan B$；

(2)设 $AB=3$，求 AB 边上的高．

4.7　二倍角的正弦、余弦、正切

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. $\cos^2 75°+\cos^2 15°+\cos 75°\cos 15°$的值等于　（　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　B. $\frac{3}{2}$　C. $\frac{5}{4}$　D. $1+\frac{\sqrt{3}}{4}$

2. 函数$f(x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$是　（　）

A. 周期为π的奇函数　B. 周期为π的偶函数

C. 周期为2π的奇函数　D. 周期为2π的偶函数

3. 已知$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\cos x=\frac{4}{5}$，则$\tan 2x$等于　（　）

A. $\frac{7}{24}$　B. $-\frac{7}{24}$　C. $\frac{24}{7}$　D. $-\frac{24}{7}$

4. 已知$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$且$\alpha\in(0,\pi)$，则$\sin\alpha+\cos\alpha$等于　（　）

A. $-\frac{\sqrt{7}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　C. $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$　D. $\pm\frac{1}{2}$

5. $y=\sin^4 x+\cos^2 x$的最小正周期是　（　）

A. π　B. 2π　C. $\frac{\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{2}$

6. $\frac{\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$的值为　（　）

A. 2　B. 1　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{4}$

7. (2004年安徽春季)若$\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$，则$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$的值为　（　）

A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{7}{5}$

C. $\pm\frac{1}{5}$　D. $\pm\frac{7}{5}$

8. (2003年全国)函数$y=2\sin x(\sin x+\cos x)$的最大值为　（　）

A. $1+\sqrt{2}$　B. $\sqrt{2}-1$

C. $\sqrt{2}$　D. 2

二、填空题

9. 已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则$\sin 2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$________.

10. 已知$\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，且$\alpha$、$\beta$均为锐角，则$\cos(\alpha-\beta)=$________，$\cot(\alpha-\beta)=$________.

11. 已知：$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2\,006$，则$\frac{1}{\cos 2\alpha}+\tan 2\alpha=$________.

12. $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}=$________.

三、解答题

13. 求值：$\sin 6°\sin 42°\sin 66°\sin 78°$.

14. 化简：$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

15. (2005年重庆)(理)若函数$f(x)=\frac{1+\cos 2x}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}-a\sin\frac{x}{2}\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)$的最大值为2，试确定常数$a$的值.

(文)若函数$f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sin x+a^2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最大值为$\sqrt{2}+3$，试确定常数$a$的值.

轻松驿站

举杯邀明月，对影成三人！

正切、余切等三角函数的由来

正切和余切的概念是由阿拉伯天文学家、数学家巴塔尼(al-Battani，约858～929)提出的.为了测定太阳的仰角，他把一根定长的杆子树立在地面上，再以这定长为单位量出日影的长度，并把这样的阴影叫做“直阴影”；有时他把定长的杆水平地插在墙上，这时水平杆投影在墙上的影长(以定长为单位)叫做“反阴影”.后来在拉丁文译本中，“直阴影”变成“余切”，“反阴影”变成“正切”.公元920年左右，巴塔尼编制了从0°到90°的每隔1°的余切表.

后来，另一位阿拉伯天文学家、数学家艾布·瓦法(Abu'l-Wafa，940～998)编制了每隔10°的正弦表和正切表，他还首次引入正割和余割，可惜没有引起同时代人的注意.

16世纪时，天文观测日益精密，迫切需要更为精确的三角函数表.天文学家哥白尼的学生雷蒂库斯(Rheticus，1514～1574)重新给出三角函数的定义，即把它定义为直角三角形的边长之比，并首次编制全部六个三角函数表.

17世纪时，现在通用的六个三角函数的符号陆续由不同的学者引入．18世纪时，由于瑞士数学家欧拉的使用，这些符号得以推广．

前面，我们学习了三角函数线，并用正弦线画出了正弦函数的图象，你能类比用正弦线画正弦函数图象的作法，用正切线作出正切函数在长度为一个周期的区间上的图象吗？

典题推荐

不积小知，无以知天下！

【例】(2005年全国Ⅱ)设 α 为第四象限角，若 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{15}$，则 $\tan 2\alpha=$____________.

解析：由 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$，$\therefore\frac{\sin(2\alpha+\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$

$\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$.

$\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$

$\frac{2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$

$\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$

$3-4\sin^2\alpha=\frac{13}{5}$

$\therefore\sin^2\alpha=\frac{1}{10}$．又 α 为第四象限角．

$\therefore\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}},\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{3}$

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{9}}=-\frac{3}{4}$.

答案：$-\frac{3}{4}$

名题链接

作业，待重新露出！

★1．(2005年全国Ⅲ) $\frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ 等于　(　　)

A. $\tan\alpha$　　B. $\tan 2\alpha$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

★★2．(2005年北京)已知 $\tan\frac{\alpha}{2}=2$，求：

(1) $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值；

(2) $\frac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-2\cos\alpha}$ 的值.

★★★3．(2005年福建)已知 $-\frac{\pi}{2}<x<0,\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$.

(1)求 $\sin x-\cos x$ 的值；

(2)(理)求 $\frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\tan x+\cot x}$

(文)求 $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}$ 的值.

4.8　正弦函数、余弦函数的图象和性质

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. $y=1+\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=\frac{3}{2}$ 交点的个数是　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 函数 $y=4\sin(-2x+1)$ 的周期是　(　　)

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. 4π

3. 使 $\cos x=\frac{1+m}{1-m}$ 有意义的 m 的值为　(　　)

A. $m\geqslant 0$　　B. $m\leqslant 0$

C. $-1<m<1$　　D. $m<-1$ 或 $m>1$

4. 函数 $y=2\sin^2 x+2\cos x-3$ 的最大值是　(　　)

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -5

5. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $[0,\pi]$ 内的一个单调递减区间是　(　　)

A. $\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$

C. $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

6. 若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$a=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，$b=\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$，则　(　　)

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<1$　　D. $ab>\sqrt{2}$

7.（2004年天津）函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)(x\in[0,\pi])$ 为增函数的区间是（　　）

A. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$　　D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

8. 下列函数在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上是增函数的是（　　）

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$

C. $y=\sin 2x$　　D. $y=\cos 2x$

二、填空题

9. 函数 $y=3\cos\left(\frac{\pi}{5}x+\frac{1}{2}\right)-1$ 的最小正周期是______.

10. 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值是______，最小值是______.

11. 函数 $f(x)=2\sin\omega x(\omega>0)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，且在这个区间上的最大值是 $\sqrt{3}$，那么 $\omega=$______.

三、解答题

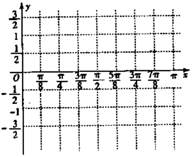
12. 求函数 $y=\sqrt{-2\cos^2x+3\cos x-1}+\lg(36-x^2)$ 的定义域.

13.（2005年全国I）设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$，$y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{8}$.

(1)求 φ；

(2)求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间；

(3)画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图象.



轻松驿站

举杯邀明月，对影成三人！

正弦函数与余弦函数的叠加

在第4章里，通过对函数图象的考查，我们已经知道，函数 $g(x)=a\sin(x+\theta)$ 和 $f(x)=a\sin x(a\neq0)$ 具有相同的周期和振幅. 在学习了和角公式以后，我们可以对它们的关系作进一步的研究.

若将 $g(x)=a\sin(x+\theta)$ 依和角公式展开，有

$g(x)=A\sin x+B\cos x$，

其中 $A=a\cos\theta$，$B=a\sin\theta$，且 $A^2+B^2=a^2\neq0$.

一般地，我们把周期相同的正弦函数与余弦函数的和 $f(x)=A\sin x+B\cos x$（其中实数 A,B 不全为0）称为正弦函数与余弦函数的叠加.

容易看出，形如 $a\sin(x+\theta)$ 或 $a\cos(x+\theta)$ 的函数都是正弦函数与余弦函数的叠加. 反过来，是不是所有的正弦函数与余弦函数的叠加都可以化成 $a\sin(x+\theta)$ 或 $a\cos(x+\theta)$ 的形式呢？

我们研究一个简单的例子：

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

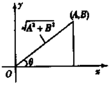
$$=\sqrt{2}\sin x+\frac{\pi}{4}.$$

回到一般的情形，将函数

$f(x)=A\sin x+B\cos x\quad(A^2+B^2\neq0)$，改写为

$$f(x)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right).$$

因 $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 与 $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 的平方和是1，故如右图所示，存在角 $\theta\in[0,2\pi)$，使得



$$\cos\theta=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\sin\theta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

因此 $f(x)=\sqrt{A^2+B^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)$

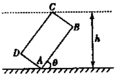
$=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\theta)$.

由此可见，任意的正弦函数与余弦函数的叠加函数 $f(x)$ 都可以化成 $a\sin(x+\theta)$ 或 $a\cos(x+\theta)$ 的形式，而且周期不变.

上面的结论在物理学中有广泛的应用. 例如，两个同频率的正弦交流电相加，得到的是一个同频率的正弦交流电. 利用该结论，我们也可以解释声波的共振现象.

(1)你能求出函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的振幅和周期吗？

(2)矩形 $ABCD$ 所在平面与地面垂直，A 点在地面上，$AB=a$，$BC=b$，AB 与地面成 θ 角（如右图所示），若记点 C 到地面的距离为 h，试用 θ 的函数表示 h，并求出 h 的最大值.

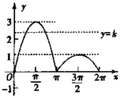


典题推荐

不积小知，无以知天下！

【例】(2005 年上海)函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|,x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点，则 k 的取值范围是____________.

解析：$f(x)=\sin x+2|\sin x|=\begin{cases}3\sin x & x\in[0,\pi]\\ -\sin x & x\in[\pi,2\pi]\end{cases}$



由图象知 k 的取值范围是 $1<k<3$.

答案：$1<k<3$

名题链接

作业，传道解惑也！

★1.(2005 年全国Ⅱ)函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是　　(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

★★2.(2005 年全国Ⅰ)当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)=\frac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为　　(　　)

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{3}$

★★3.(2005 年广东)化简 $f(x)=\cos\left(\frac{6k+1}{3}\pi+2x\right)+\cos\left(\frac{6k-1}{3}\pi-2x\right)+2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)(x\in\mathbf{R},k\in\mathbf{Z})$，并求函数 $f(x)$ 的值域和最小正周期.

4.9　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

基础演练

学而时习之，不亦乐乎！

一、选择题

1. 为了得到函数 $y=\cos\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的图象，只需将余弦函数图象上各点　　(　　)

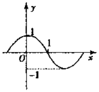
A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{1}{3}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{1}{3}$ 个单位长度

2. 如果右图是周期为 2π 的三角函数 $y=f(x)$ 的图象，那么，$f(x)$ 可以写成　　(　　)



A. $\sin(1+x)$

B. $\sin(-1-x)$

C. $\sin(x-1)$

D. $\sin(1-x)$

3. 函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心是　　(　　)

A. $\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{3},-1\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{24},0\right)$

4. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)-1$，则下列命题正确的是　　(　　)

A. $f(x)$ 是周期为 1 的奇函数

B. $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数

C. $f(x)$ 是周期为 1 的非奇非偶函数

D. $f(x)$ 是周期为 2 的非奇非偶函数

5. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上每一点的纵坐标保持不变，横坐标伸长到原来的 2 倍，然后再将整个图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，最后将得到的函数图象沿 y 轴向下平移 1 个单位，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象，则 $f(x)$ 是　　(　　)

A. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

B. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

C. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$

D. $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+1$