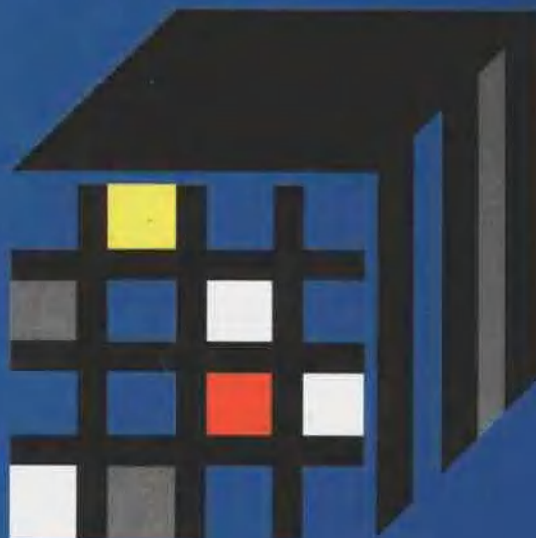
数学

SHU XUE

第三册

●中等职业学校国家审定教材



凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

中等职业学校国家审定教材

数　学

（修订版）

第三册

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

封面设计 杨志麟

中等职业学校国家规划教材
书　　名　数　学（修订本 [illegible]）
作　　者　[illegible]
责任编辑　[illegible]
出　　版　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社（南京市马家街 31 号 210009）
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
照　　排　[illegible]
印　　刷　[illegible]
厂　　址　[illegible]（邮编 225006）
电　　话　0514-[illegible]
开　　本　[illegible] 1/16
印　　张　[illegible]
字　　数　[illegible]
版　　次　2006 年 6 月第 2 版
　　　　　2006 年 [illegible] 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-5343-3581-7/G·[illegible]
定　　价　[illegible]
盗版举报　025-[illegible]

[illegible]

ISBN 7-5343-3581-7
9 787534 335815 >

《数学》教材编写组

主　　编：吴茂庆

副 主 编：胡幼予　陈学礼

参加编写人员（以姓氏笔画为序）：

丁　阳　汤　娟　杨春柏

陈晓平　周　坚　郑宏标

徐一冰　浦文倜　魏　力

责任编辑：宋　强

美术编辑：刘小地

设计制作：徐弘工作室

修订版前言

本教材根据江苏省教育厅关于中等职业学校文化基础课程改革和教材建设的部署，在省教育厅职业教育与社会教育处的组织下，从 2000 年 5 月到 2003 年 2 月，完成了第一版(共六册)的编制工作。本教材于 2004 年通过教育部职业教育教材审定委员会审定。

近三年来，基础数学教育改革有了新的发展，义务教育阶段、普高阶段的数学新课程标准已经颁布；对教育理念的认识有了进一步的提高；以注重能力为核心的教育思想日益深入人心，并在各类教育考试中明显地得到体现。《数学》教材本身的不足之处，经过三年试用也已清楚显现。因此对第一版教材的修订势在必行。

这次教材修订在坚持原教材编写指导思想的前提下，根据教育部审定意见，特别注重了下列几个方面：既注意作为职业教育数学教材的特点，又尽量与普高数学新课标保持同步；在注意基本数学素质教育的同时，进一步降低教材难度；结合当前职业教育实际情况，明朗模块和层次结构；在不影响注重能力培养的目标下，对第一版教材作较大幅度的精简。

新版《数学》教材由基础部分、提高部分、阅读部分、高等数学部分和复习总结五个板块组成。其中基础部分内容为所有学生必学，是检测学生合格的依据；提高部分及复习总结部分为有进入后继学历层次教育愿望的学生所必学；阅读部分作为知识介绍而设置，不作为教学内容；高等数学部分供有必要修学的专业选学。除第 0 章为复习初中数学内容外，全书正文共分为 21 章。第 0～5 章编成第一册，第 6～12 章编成第二册，第 13～21 章编为第三册，复习总结另编成第四册。第一、二册内容有基础部分，也有少量提高部分，建议分两学期完成教学，其中基础部分可支配 98 教时，提高部分可支配 28 教时(具体教时分配见教参)。第三册内容全部为提高部分。

教材配套习题分为课内练习、A 类课外习题、B 类课外习题三级。前两级以模仿课文中例题为主，为所有学生所必须完成；第三级在题型、技巧、运算等方面比例题略有提高和发展，大部分供学习提高部分的学生使用。课内练习编印在教材上，课外习题将全部编印在学习指导用书中。

与第一、二、三册教材配套，我们还编写了教学参考书和学习指导用书，并为教学参考书配备了光盘，方便教师备课及教学。在学习指导用书中配有一定量的例题，其目的是给学生提供一个解题书写格式模板。

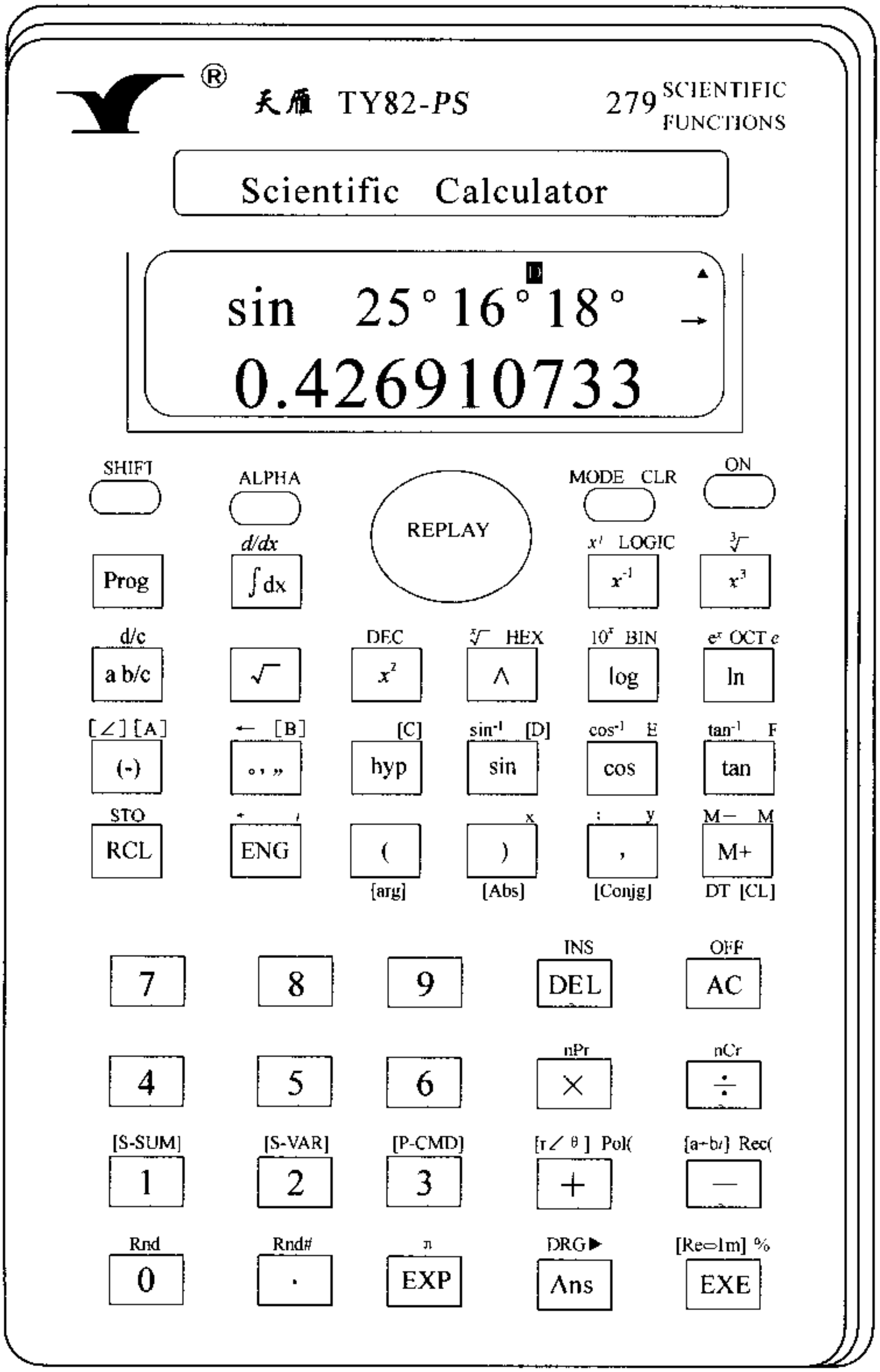
本次教材修订的主编为吴茂庆，副主编为胡幼予和陈学礼。下列教师参加了编写：魏力(第 0 章和第 13 章)、徐一冰(第 1 章和第 12 章)、陈学礼(第 2 章和第 3 章)、杨春柏(第 4 章和第 10 章)、胡幼予(第 5 章和第 15 章)、汤娟(第 6 章和第 19 章)、丁阳(第 7 章和第 14 章)、陈晓平(第 8 章、第 17 章和第 18 章)、郑宏标(第 9 章和第 16 章)、周坚(第 11 章)、吴茂庆(第 20 章)、浦文倜(第 21 章)。

尽管我们花费了大量时间，尽了最大努力，但囿于水平，疏漏和不当仍在所难免，批评和指正将是对我们最大的关怀和鼓励。

中等职业学校《数学》教材编写组

2006 年 7 月

教材推荐使用计算器面板图



目录

第 13 章　命题与逻辑推理

第 14 章　解析几何(Ⅱ)

第 15 章　空间向量与立体几何(Ⅱ)

第 16 章　复数

第 17 章　计数法

第13章 命题与逻辑推理

"逻辑"即思维的规律.掌握了逻辑,就是掌握了思维规律.数学学科本身具有极强的逻辑性,学习数学的过程,同时也是一个不断提高逻辑判断和推理能力的过程.例如,解一元二次不等式、分式不等式及绝对值不等式时,我们在计算的同时,必须不断地作逻辑判断,以求得它们的解集.

本章将对前面已经接触到的逻辑知识作一个归纳和小结,在此基础上,比较集中地学习命题及其关系、逻辑联结词、推理和证明等方面的知识.本章还将介绍一种常用的证明方法——数学归纳法.

预备知识

- 不等式及其解集
- 直线及其位置关系
- 直线方程、二元一次不等式所确定的平面区域

重　点

- 命题的概念及命题真假的概念
- 命题的逻辑联结词
- 充分条件、必要条件

难　点

分析命题的条件和结论

充分条件、必要条件

学习要求

了解命题及真假命题的概念

理解命题的逻辑联结词“且”“或”“非”的涵义

会分析一个数学命题的条件和结论

对不太复杂的命题会判断其真假

理解充分条件、必要条件和充要条件的概念，会判断一个命题的条件与结论之间的关系

学习逻辑判断及推理之前，首先要弄清所要面对的对象．日常生活和数学中，逻辑判断和分析的基本对象是命题．因此在本节我们首先要学习命题的概念及其表现形式、命题之间的逻辑联结词．数学中的命题一般都有条件和结论，所以在本节最后，还将学习充分条件、必要条件与充要条件，阐明条件与结论之间的关系．

1．命题

（1）命题

看下面的语句：

① 如果 $x>-3$，那么 $x+3>0$；

② 如果 $|x|=1$，那么 $x=1$．

显然，①是正确的，而②是错误的．我们把这种可以判定对错的语句叫做命题，并把正确的命题叫做真命题（或称命题为真），把错误的命题叫做假命题（或称命题为假）．

不仅数学中有命题，在生活中使用的大部分语句也有真假之分，因而也是命题．例如，“今天是雨天”、“同学张三数学成绩一直是优秀（80 分以上）”等等就都是命题．命题都是陈述句形式，诸如“请坐！”“你吃过了吗？”之类的祈使句、疑问句不能判定真假，因而不是命题；还有像“我是个高个子”、“我的学习成绩很好”之类的语句，因为判断标准模糊，无法判定真假，也不是命题．

（2）简单命题和复合命题

在考察某两个特定的角时，语句“两个角是对顶角”、“两个角相等”是命题．这类只用一句简单的陈述句表达的命题叫做简单命题．“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”也是一个命题，这种命题用“如果”、“那么”将两个简单命题联结起来，叫做复合命题．

数学中出现的命题，一般都是“如果……，那么……”形式的复合命题，前半部分是命题的条件，后半部分则是结论．只不过有时在表述时作了简化，条件和结论显得不那么明确．例如把命题“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”表述成“对顶角相等”，其条件和结论就不那么显而易见了．善于看出一个简化了的数学命题中的条件和结论，是重要的基本功．

（3）命题的表示

为了表述简便，常常用一个小写英文字母 p，q，r，s，…来表示命题．比如用 p 表示“两个角是对顶角”，用 q 表示“两个角相等”，则命题“对顶角相等”可

以写成“如果 p，那么 q”，或者“若 p，则 q”，有时也简记成“$p \to q$”. 这也是一般数学命题出现的形式.

在数学中，命题常以公理、定理、推论等名称出现. 当命题公认为真，叫做公理；当命题被证明为真，那就叫做定理或推论. 命题“$p \to q$”为真时，说成“p 推出 q”，记作“$p \Rightarrow q$”；反之，则说成“p 推不出 q”，记作“$p \nRightarrow q$”.

课内练习 1

1. 判断下列语句是否为命题，若是，请判定其真假.

(1) 数学真好玩！　　(2) $x > 3$；

(3) $2 + 4 = 7$；　　(4) $x^2 < 0$；

(5) $3x + 2y - 3 > 0$ 是可能的；　　(6) 如果 $x^2 - 1 > 0$，那么 $x > 1$；

(7) 指数函数一定是增函数；　　(8) 空集未必是任何集合的真子集.

2. 说出下面这些命题的条件和结论.

(1) 若 $a > b$，$c > 0$，则 $ac > bc$；　　(2) 平行四边形的对角线互相平分；

(3) 两个全等的三角形面积相等；　　(4) 垂直于同一直线的两平面平行；

(5) 偶函数的图象关于 y 轴对称；　　(6) 平行于同一平面的两直线平行.

3. 把下列 p、q 两句话复合成命题“$p \to q$”，并判断这个复合命题的真假.

(1) p: $x > 3$; q: $x > 2$.　　(2) p: x 能被 2 整除；q: x 是偶数.

(3) p: $xy = 0$; q: $x = 0$.　　(4) p: $a > b$; q: $a^2 > b^2$.

(5) p: $a > b > 0$; q: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.　　(6) p: $x = 0$, q: $xy = 0$.

2. 命题的逻辑联结

(1) 逻辑联结词

以“$p \to q$”形式出现的数学命题中，作为条件的 p 和作为结论的 q 未必都是简单命题，而常常是由“且”、“或”、“非”联结的几个简单命题组成的. 例如：“若 $x^2 + 3x + 2 > 0$，则($x + 1 > 0$ 且 $x + 2 > 0$) 或($x + 1 < 0$ 且 $x + 2 < 0$)”；“若 $x + 1 > 0$ 且 $x + 2 \geqslant 0$，则 $x^2 + 3x + 2 > 0$ 或 $x^2 + 3x + 2 = 0$”. “且”、“或”、“非”叫做命题的逻辑联结词.

准确理解这三个逻辑联结词的涵义，对掌握命题条件、命题含义及判定命题真假至关重要. 让我们先来看下面一个选择题.

山姆、汤姆、宁吉士是一起抢劫案的三个嫌疑犯，罪犯是他们中的一个或一

伙.已知如下：

① 罪犯是坐汽车带着赃物逃走的；

② 不伙同山姆，宁吉士不会作案；

③ 汤姆不会开车.

据此可推证

A. 山姆无罪　　　　B. 山姆有罪

C. 汤姆有罪　　　　D. 山姆、汤姆、宁吉士全都有罪

这道题目的形式是选择题，其实是一个命题，条件是①②③；结论是A～D之一.要做好这类逻辑题，首先要理解题目意思：并列形式书写的三个条件是"且"联结，即是同时具有的.根据③可知，开车的只能是山姆或宁吉士中的一个.如果是山姆开车，根据①山姆当然有罪；如果是宁吉士开车，根据②山姆一定是同犯，因此山姆也有罪.由此可见应该选择B.至于宁吉士、汤姆是否有罪，则不能确定.

（2）逻辑联结词涵义分析

① 且

若 p，q 是两个命题，用"且"将 p，q 联结成为"p 且 q"，则是一个把 p，q 合在一起的复合命题，因此当且仅当 p，q 同时为真命题时，这个命题才是真命题；只要 p，q 中有一个是假命题，"p 且 q"必定是假命题.在逻辑学中把"且"形象地叫做"合取".

一般地，复合命题"p 且 q"的真假情况与两个简单命题 p，q 的真假情况之间的联系可以归纳为下表.

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

例如，"菱形的对角线互相垂直且平分"，其实是合取了 p："菱形的对角线互相垂直"和 q："菱形的对角线互相平分".因为 p 为真，q 也为真，所以这是个真命题.

又如，命题"菱形的对角线互相垂直且相等"，其实是合取了 p："菱形的对角线互相垂直"和 q："菱形的对角线相等".虽然 p 为真，但 q 为假，所以这是个假命题.

再如，不等式 $x^2-x-2<0$ 的解集为 $\{x \mid x>-1 且 x<2\}$，表示 $x>-1$ 和 $x<2$ 要同时成立.

实际生活中的命题，联结词"且"常常被省略不写，或改述为"并且""而且""同时""既……，又……"等.

② 或

若 p，q 是两个命题，则用"或"将 p，q 联结成为"p 或 q"是一个"至少为 p，q 之一"的复合命题，因此当且仅当 p，q 都是假命题时，这个命题才是假命题；只要 p，q 之一为真命题，"p 或 q"必定是真命题. 在逻辑学中把"或"形象地叫做"析取"，意思是为了判定"p 或 q"为真，只要能从 p，q 中析取到一个真命题就行了.

一般地，复合命题"p 或 q"的真假情况与两个简单命题 p，q 的真假情况之间的联系可以归纳为下表.

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

例如，"10 可以被 3 或 4 整除"，它是"10 可以被 3 整除"、"10 可以被 4 整除"的"或"联结. 因为 10 既不能被 3 整除，也不能被 4 整除，因此是假命题.

若上面的命题改为"10 可以被 3 或 5 整除"，则是"10 可以被 3 整除"、"10 可以被 5 整除"的"或"联结. 因为后者是真命题，所以这样联结得到的复合命题是真命题.

再如，命题"$7 \geqslant 5$"表示"$7 > 5$"或"$7 = 5$"，因为"$7 > 5$"为真，所以它是真命题.

但在直觉上你会觉得"$7 \geqslant 5$"不为真，这是很正常的，原因是假命题"$7 = 5$"对你的刺激太大了. 同样你也会觉得"x 是实数，则 $x \geqslant 0$ 或 $x < 0$"是废话一句——尽管它是真命题. 可见在数学上不仅要找到真命题，还要尽可能去除真命题中的废料.

注意不要把日常生活中所说的"或"与逻辑联结词中的"或"等同起来. 生活中"或"的一般涵义是择一，例如生活中说"参加这次活动者是甲或乙"，是指参加者为甲、乙之一；而作为命题真假判定，即使甲、乙一起参加了活动，这个命题仍然是真命题.

③ 非

比较两个命题，p："2 是 6 的约数"；q："2 不是 6 的约数". 这两个命题的关系是 q 否定了 p，因此把 q 叫做"非 p"或"p 的非". 一般地，否定一个命题 p 而得出的新命题叫做"非 p". 容易理解，若 p 为真，则非 p 必为假；若 p 为假，则非 p 必为真. 例如，"2 是 6 的约数"为真，则"2 不是 6 的约数"必定为假.

为了写出一个命题的非，一般只要在原来命题中适当地加个“不”字即可，比如，命题 p 表示“李会开车”，则非 p 是“李不会开车”．又如，命题 s 是“我们班的同学都是团员”，则非 s 是“我们班同学不都是团员”．

注意：非、不是“我们班同学都不是团员”．为什么？

例 1 分别指出下列命题是哪些命题使用怎样的逻辑联结词联结而成的．

(1) 12 既是 4 的倍数，又是 6 的倍数；

(2) ± 2 的平方为 4；

(3) 异面直线不相交．

解 (1) 这是“p 且 q”的形式，其中 p 为“12 是 4 的倍数”，q 为“12 是 6 的倍数”；

(2) 这是“p 或 q”的形式，其中 p 为“2 的平方为 4”，q 为“-2 的平方为 4”；

(3) 这是“非 p”的形式，其中 p 为“异面直线相交”．

例 2 判定例 1 中各命题的真假．

解 (1) 由于 p 和 q 均为真，因此“p 且 q”为真；

(2) 由于 p 和 q 均为真，因此“p 或 q”为真；

(3) 由于 p 为假，因此“非 p”为真．

课内练习 2

1. 分别写出由下列各组命题构成的“p 或 q”、“p 且 q”形式的复合命题，并判断它们的真假．

(1) p: 27 是 3 的倍数；　　q: 27 是 9 的倍数．

(2) p: $(-2)^2 = 4$；　　q: $\sqrt{16} = 4$．

(3) p: $16 < 17$；　　q: $16 = 17$．

(4) p: $x^2 - 1 > 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$；　　q: $x^2 - 1 > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1)$．

(5) p: 正方形的对角线相等；　　q: 正方形的对角线垂直．

(6) p: 垂直于同一平面的两平面平行；　　q: 垂直于同一平面的两平面相交．

2. 写出下列命题的非，并判断其真假．

(1) $x^2 < 0$；　　(2) $2 \geqslant 3$；

(3) 梯形有一组对边平行；　　(4) 树叶都是绿色的．

3. 充分条件、必要条件和充分必要条件

在命题"若 p 则 q"中，p 是条件，q 是结论. 在对命题进行证明的同时，应该了解条件 p 对于成立 q 有无冗余? 是否足够? 还是正好?

考察命题 "若 $x>3$，则 $x>2$". 显然这是一个真命题. 因为一个数 x 比 3 大足以保证比 2 大，因此条件 p:"$x>3$"对于成立结论 q:"$x>2$"而言是充分的，我们把 p 叫做 q 的充分条件；而 q 对于 p 而言是必要的，我们把 q 叫做 p 的必要条件.

考察命题 "若 x 不大于 $2(x\leqslant 2)$，则 x 不大于 $3(x\leqslant 3)$". 这也是真命题. 条件 p:"$x\leqslant 2$"对于成立结论 q:"$x\leqslant 3$"而言是充分的；q 对于 p 而言是必要的. 我们也把 p 叫做 q 的充分条件，q 叫做 p 的必要条件.

再考察命题 p:"两条直线平行"，命题 q:"同位角相等". 由平面几何知识可知，p 对于 q 不但是充分的，而且还是必要的. 因此把 p 叫做 q 的充分必要条件，简称充要条件.

一般地，设 p，q 是两个命题，如果"$p\to q$"为真，就把 p 叫做 q 的充分条件，简记作 $p\Rightarrow q$(或 $q\Leftarrow p$)；如果只有当 q 为真时 p 才可能为真，就把 q 叫做 p 的必要条件；如果 p 既是 q 的充分条件又是 q 的必要条件，就把 p 叫做 q 的充要条件(此时 p、q 是等价命题)，简记作 $p\Leftrightarrow q$.

注意：若已知 $p\Rightarrow q$，那么 q 必定是 p 的必要条件.

例 3　指出下列各组命题中 p 是 q 的什么条件，q 是 p 的什么条件.

(1) p:今天整天都在下大雨；q:今天天阴.

(2) p:今天学校放假；q:今天是国庆节.

(3) p:小李的眼睛近视；q:小李没有肝炎.

(4) p:今天是星期一；q:明天是星期二.

解　(1) 一般来说，下大雨时是不会同时出太阳的，即 $p\Rightarrow q$；但天阴未必下大雨，即 $q\nRightarrow p$. 因此 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 p 的必要不充分条件.

(2) 因为 $p\nRightarrow q$，而 $q\Rightarrow p$，所以 q 是 p 的充分不必要条件，p 是 q 的必要不充分条件.

(3) 因为 $p\nRightarrow q$，而且 $q\nRightarrow p$，所以 p 既不是 q 的充分条件也不是 q 的必要条件. 反之亦然(即说明命题 p、q 无关).

(4) 因为 $p\Leftrightarrow q$，所以 p 是 q 的充要条件.

例 4 指出下列各组命题中 p 是 q 的什么条件，q 是 p 的什么条件.

(1) p: x 是整数；q: x 是自然数.

(2) p: $\triangle ABC$ 是等边三角形；q: $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(3) $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 为二面角，p: $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角是直角；q: α 内有垂直于 β 的直线.

(4) p：圆心到直线的距离等于半径；q：直线是圆的切线.

解 (1) 因为 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$，所以 $p \nRightarrow q$ 而 $q \Rightarrow p$，即 p 是 q 的必要不充分条件，q 是 p 的充分不必要条件.

(2) 因为等边三角形是特殊的等腰三角形，所以 $p \Rightarrow q$ 而 $q \nRightarrow p$，即 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 p 的必要不充分条件.

(3) 由两平面垂直的判定和性质定理可知，$p \Leftrightarrow q$，即 p 与 q 互为充要条件.

(4) 由直线与圆的位置关系的判断方法可知，圆心到切线的距离等于半径，到圆心的距离等于半径的直线一定是圆的一条切线. 因此 $p \Leftrightarrow q$，即 p 与 q 互为充要条件.

例 5 在下列各组命题中，p 是 q 的什么条件？

(1) p: $(x-2)(x-3)=0$; q: $x-3=0$.

(2) p：两三角形三边对应相等；q：两三角形三个角对应相等.

(3) p：点$(x,\ y)$在第二象限；q: $x+y>0$.

(4) p：点$(x,\ y)$在第一象限；q: $x+y>0$.

(5) p: $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ 且 $a \not\subset \alpha$; q: $a \parallel \alpha$.

(6) p: $a>b$; q: $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

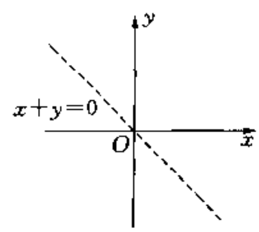


图 13-1

解 (1) 由 $p \nRightarrow q$，但 $q \Rightarrow p$，因此 p 是 q 的必要不充分条件.

(2) 由 $p \Rightarrow q$ 但 $q \nRightarrow p$，故 p 是 q 的充分不必要条件.

(3) 如图 13-1 所示为 $x+y>0$ 表示的区域，可见 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，所以 p 既不是 q 的充分条件也不是 q 的必要条件.

(4) 由 $p \Rightarrow q$ 但 $q \nRightarrow p$，故 p 是 q 的充分不必要条件.

(5) 由直线与平面平行的判定定理可知，$p \Rightarrow q$，但 $q \nRightarrow p$，所以 p 是 q 的充分不必要条件.

(6) 因为 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，所以 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件.

(6)中若 a、b 同号，则 p 与 q 互为充要条件，试用不等式的基本性质和反比例函数的单调性分别解释它.

例 6 $a>b$ 的一个必要不充分条件是 ( )

A. $ac^2>bc^2$;　　B. $a+c>b+c$;

C. $|a|>|b|$;　　D. $a>b-1$.

本题的答案 p 应该是 $a>b$ 的一个必要不充分条件，即 $a>b \Rightarrow p$，且 $p \nRightarrow a>b$.