面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

数学分析（下册）

吕冠国　邵　南　谷天慧
王　涛　董义琳　方　钢　编著

科学出版社

www.sciencep.com

面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

数学分析

（下册）

吕冠国　邵　南　谷天慧
王　涛　董义琳　方　钢　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是教育部面向21世纪"高师教学改革计划"立项项目"数学分析课程教学改革"的成果. 本书分上、下两册. 上册内容包括集合与函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数与微分、中值定理及其应用、不定积分、直线上点集的测度(L测度)、定积分、可测函数及(LL)积分、定积分的简单应用. 下册内容包括数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、重积分、含参变量积分、曲线积分与曲面积分. 下册的主要特点在于精简了教学内容,真正加强数学分析与学生已学过的数学课程(主要是线性代数、解析几何、常微分方程)的综合与联系,革新了讲法,既提高了教学效率,又保证了学生在基础阶段受到必要的数学训练.

本书可作为师范院校、综合大学数学类各专业的基础课教材或教学参考书,也可供力学、理论物理、计算机等对数学要求较高专业的学生或教师用作教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上、下册)/吕冠国等编著. —北京:科学出版社,2006
(面向21世纪课程教材)
ISBN 7-03-017835-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. 吕… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第094314号

责任编辑:李鹏奇 王 静/责任校对:赵桂芬
责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷

科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006年8月第一次印刷 印张:28 1/2
印数:1—3 000 字数:547 000

定价:38.00元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

目　录

（下册）

第12章 数项级数

在初等数学中，我们已经学过了有限个数的和及其运算性质，本章我们要将它们推广到无穷个数相加的情形，注意到无穷和：$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$，如果我们将其视为$[1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots$，则其和似乎应该为0，而将其视为$1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots$，则其和似乎又应该为1. 由此我们不难看出，处理无穷多项相加不像处理有限项的和那样简单，必须发展一套专门的理论.

一般而言，我们称无穷多个"项"相加构成的和式为无穷级数(简称为级数)，若每个"项"均为确定的实或复数，我们称这样的级数为数项级数；若每个"项"均为一个函数，则我们称这样的级数为函数项级数. 在本课程中，我们将介绍"项"取实数的数项级数和两种重要的函数项级数——"项"为幂函数的幂级数和"项"为正弦和余弦函数的傅里叶(Fourier)级数.

本章介绍最简单的一种无穷级数——数项级数的基本概念、基本性质、收敛或发散的判别法和代数运算性质. 本章的知识是研究幂级数、傅里叶级数等函数项级数的基础. 另外，在本章的学习中，我们可以看到，数项级数的理论与我们前面学过的无穷限的广义积分的理论有很强的相似性，事实上，无穷限的广义积分是将无穷多个微元量"连续地"相加，而数项级数则是将无穷多个实数"离散地"相加，两者本质上是相同的——均为求无穷和，而且从积分的定义我们可以看到，"离散"的无穷和与"连续"的无穷和是可以相互转化的. 注意到这一点，并在与无穷限的广义积分的类比中学习本章的知识，无疑是学习本章的好方法，这样做将有助于我们深刻理解和掌握无穷级数的基本理论，也有助于我们从一个新的角度去更深刻地认识无穷限广义积分的理论.

12.1 数项级数的收敛性及简单性质

12.1.1 数项级数的收敛与发散的概念和柯西准则

设$\{a_n\}$是实数列，我们称和式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{1}$$

为数项级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$或$\sum a_n$，$a_n$叫做级数(1)的通项或一般项. 又记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，称$S_n$为级数(1)的部分和.

定义 12.1.1　若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$(有限实数),则称级数(1)收敛,把$S$叫做级数(1)的和,记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$;若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在或为$+\infty$或$-\infty$,则称级数(1)发散,并在后两种情况下称级数(1)发散到$+\infty$或$-\infty$,记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=-\infty$.

例 12.1.1　考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$,它的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$收敛到1,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$.

例 12.1.2　考虑我们在本章开头中给出的级数

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+1+(-1)+\cdots \tag{2}$$

的部分和为

$$S_n=\begin{cases}1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots$$

从数列的极限理论易见$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,从而级数(2)发散.

例 12.1.3　考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$,它的部分和为$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k+1}{k}=\ln(n+1)$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$,从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$发散到$+\infty$,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}=+\infty$.

例 12.1.4　考虑由等比数列构成的级数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}. \tag{3}$$

显然,当$a=0$时,级数的所有项均为0,从而级数收敛到0,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=0$. 下设$a\neq 0$.

当$r=1$时,级数(3)的部分和$S_n=na$,从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}na=\begin{cases}+\infty, & a>0,\\ -\infty, & a<0.\end{cases}$$

当$r=-1$时,级数(3)就变成例12.1.2的级数(2),因此这时级数(3)发散.

当$|r|\neq 1$时,级数(3)的部分和

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & |r| < 1, \\ \infty, & |r| > 1. \end{cases}$$

所以这时级数(3) 当 $|r| < 1$ 时,收敛于$\dfrac{a}{1-r}$,当 $|r| > 1$ 时发散到 ∞.

级数(3) 称为等比级数,它对于我们后面级数收敛若干判别法则的研究有重要作用.

从定义 12.1.1 可见,关于数项级数收敛和发散的讨论,可以转化成对数列极限的讨论. 反之,关于数列极限的讨论,也可转化成对数项级数的讨论,事实上,设 $\{S_n\}$ 为实数列,我们可构造数列

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \cdots, a_n = S_n - S_{n-1}, \cdots$$

易见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和就是 S_n. 因此我们可以说,数项级数的理论和数列极限的理论其实是一样的,是同一理论的不同表现形式,但是无穷级数形式上看是有限和的推广,具有很强的直观性,在许多问题的研究中能给我们带来方便.

判断数列极限的存在性,有一个基本而重要的准则 —— 柯西准则,同样,我们也可建立判别数项级数是否收敛的柯西准则.

定理 12.1.1(柯西准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是:任给正数 ε,存在自然数 N,对一切 $n > N$ 及一切自然数 p 成立

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

证明 必要性 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则其部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限,从而由数列极限的柯西准则知,任给 $\varepsilon > 0$,存在自然数 N,对一切 $n > N$ 及一切自然数 p 有

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

即

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

充分性 若任给正数 $\varepsilon > 0$,存在自然数 N,对一切 $n > N$ 及一切自然数 p 有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

则

$$| S_{n+p} - S_n | < \varepsilon.$$

由数列极限的柯西准则知$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在,从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

从定理 12.1.1 不难写出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散的充分必要条件,请读者自己完成.

例 12.1.5　证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛.

证明　对任意自然数 n 和 p,有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| \\
\leqslant\ & \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
=\ & \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) \\
=\ & \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

从而任给正数 ε,只要取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则对任意自然数 $n > N$ 及任意自然数 p 有

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| < \varepsilon.$$

从而由定理 12.1.1 知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

例 12.1.6　证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证明　易见

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right| \\
\geqslant\ & \left|\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

因此,取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,对任意自然数 N,总可取自然数 $n > N$ 及自然数 $p = n$,有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right| \\
=\ & \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right| \geqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

从而由定理 12.1.1 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例 12.1.6 中的级数被称为调和级数.

12.1.2 数项级数的简单性质

为了下面研究的方便,我们将数项级数的一些马上要用到的简单性质叙述如下,更复杂的运算性质我们在 12.4 节中研究.

定理 12.1.2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, α,β 是与 n 无关的常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n)$ 也收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha S_1 \pm \beta S_2$.

定理 12.1.3 改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的有限项不影响级数的敛散性.

这两个定理的证明是显然的,请读者自己完成.

定理 12.1.4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,所以其部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 有极限,设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S_1$,则有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

注意定理 12.1.4 中 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 只是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件,而非充分条件. 例如例 12.1.3 中, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n} = 0$,但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 发散.

12.2 正项级数

12.2.1 正项级数收敛的充分必要条件

如果数项级数的每一项都是正数,则称其为正项级数. 易见,正项级数的部分和数列是单调递增数列,利用"单调有界数列必有极限"定理,可得如下定理.

定理 12.2.1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界,若 $\{S_n\}$ 无上界,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

例 12.2.1 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p > 1)$ 收敛.

证明 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$,则

$$\begin{aligned}S_{2n+1}&=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^p}\right)\\&<1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)\\&=1+\frac{1}{2^p}S_n+\frac{1}{2^p}S_n\\&=1+2^{1-p}S_n\\&<1+2^{1-p}S_{2n+1}.\end{aligned}$$

从而有 $(1-2^{1-p})S_{2n+1}<1$. 由于 $p>1$,所以 $1-2^{1-p}>0$,从而 $S_{2n+1}<\frac{1}{1-2^{1-p}}$. 因此对一切自然数 n,$S_n<S_{2n+1}<\frac{1}{1-2^{1-p}}$,即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>1)$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界 $\frac{1}{1-2^{1-p}}$,从而它收敛.

12.2.2 判别正项级数敛散性的常用法则

本小节介绍几个常用的判别正项级数敛散性的法则. 利用它们,我们可以判定一批正项级数的敛散性,它们也是我们后面研究一般数项级数敛散性的基础.

定理 12.2.2(比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数.

(1) 若存在正数 l 和 N,使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$a_n\leqslant lb_n,$$

则由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

(2) 若存在正数 m 和 N,使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$a_n\geqslant mb_n,$$

则由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明 (1) 无妨设 $a_n\leqslant lb_n$ 对一切 $n\geqslant 1$ 都成立,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,由定理 12.2.1 知,存在正数 M,对一切 $n\geqslant 1$ 都有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant M,$$

从而对一切 $n \geqslant 1$ 都有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} l b_k \leqslant lM,$$

所以由定理 12.2.1 知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 无妨设 $a_n \geqslant m b_n$ 对一切 $n \geqslant 1$ 都成立,因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,由定理 12.2.1 知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ 无界,即 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty$. 又因为对一切 $n \geqslant 1$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} m b_k,$$

从而 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 无界,由定理 12.1.1 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

应用中更容易使用的是比较判别法的极限形式.

定理 12.2.3(比较判别法的极限形式) 设正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{2}$$

满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时,级数(1),(2)同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l = 0$ 时,从级数(2)收敛可推出级数(1)收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时,从级数(2)发散可推出级数(1)发散.

证明 (1) 若 $0 < l < +\infty$ 时,则存在正数 N,对一切 $n \geqslant N$,有

$$\frac{1}{2} l < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l,$$

即

$$\frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n,$$

从而由定理 12.2.2 知,级数(1) 和(2)同时收敛或同时发散.

(2) 若 $l = 0$,则存在正数 N,对一切 $n \geqslant N$,有

$$\frac{a_n}{b_n} < 1,$$

即

$$a_n < b_n,$$

从而由定理 12.2.2 知,从级数(2) 收敛可推出级数(1) 收敛.

(3) 若 $l = +\infty$,则存在正数 N,对一切 $n \geqslant N$,有

$$\frac{a_n}{b_n} > 1,$$

即

$$a_n > b_n,$$

从而由定理 12.2.2 知,从级数(2) 发散可推出级数(1)发散.

例 12.2.2　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}(a > 0)$ 的敛散性.

解　若 $a \leqslant 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+a^n} \neq 0$,从而级数发散. 若 $a > 1$, 则由于对一切 $n \geqslant 1$ 有 $\frac{1}{1+a^n} \leqslant \frac{1}{a^n}$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 收敛(例 12.1.4), 从而由定理 12.2.2 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

例 12.2.3　从例 12.1.3 我们知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$ 发散,易知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$,从而由定理 12.2.3 可再次证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

定理 12.2.4(比值法,达朗贝尔判别法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数,满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \tag{3}$$

(1) 若 $l < 1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $l>1$ 或 $l=+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明　(1) 若 $l<1$，则可取 $\varepsilon>0$，使 $0\leqslant l<1+\varepsilon<1$. 由(3)式成立知存在正整数 $N>0$，对一切 $n>N$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1+\varepsilon$，从而对一切 $n>N$，$a_n<a_N(l+\varepsilon)^{n-N}$.

由等比级数 $\sum_{n=N+1}^{\infty}(l+\varepsilon)^{n-N}$ 收敛及定理12.2.2知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $l>1$，则可取 $\varepsilon>0$，使 $l>l-\varepsilon>1$. 由(3)式成立知，存在正数 $N>0$，对一切 $n>N$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}>l-\varepsilon$，从而对一切 $n>N$ 有 $a_{n+1}>a_n$，由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注意：若定理12.2.4中 $l=1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能收敛也可能发散. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 对应的(3)式均有 $l=1$，但前者发散，后者收敛.

例 12.2.4　研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)x=x,$$

从而由定理12.2.4知，当 $0<x<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 收敛，当 $x>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 发散. 当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$，显然是发散的.

若比值判别法中 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 极限不存在，我们还有下面不等式形式的比值判别法(定理12.2.5)和上、下极限形式的比值判别法(定理12.2.6)，这两个定理的证明与定理12.2.4相仿，留给读者自己完成.

定理 12.2.5　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

(1) 若存在正数 N 及 $l(0<l<1)$，对一切 $n>N$，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant l<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 若存在正数 N,对一切 $n > N$,有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 12.2.6 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

(1) 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

比达朗贝尔判别法更强的判别法是下面的柯西判别法,也叫根值法.

定理 12.2.7(根值法,柯西判别法) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数,满足$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$.

(1) 若 $l < 1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $l > 1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 (1) 取 $\varepsilon > 0$ 满足 $l < l + \varepsilon < 1$,则存在正数 N,对一切 $n > N$ 有 $a_n < (l+\varepsilon)^n$,由等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)^n$ 收敛及定理 12.2.2 知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 取 $\varepsilon > 0$ 使 $l > l - \varepsilon > 1$,则存在正数 N,对一切 $n > N$,有 $a_n > (l-\varepsilon)^n$,由等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)^n$ 发散及定理 12.2.2 知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 12.2.5 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

解 记 $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$,当 $n = 2k(k = 1,2,\cdots)$ 时,有

$$\sqrt[2k]{a_{2k}} = \sqrt[2k]{\frac{3}{2^{2k}}} \to \frac{1}{2} \quad (k \to +\infty),$$

而当 $n = 2k+1(k = 1,2,\cdots)$ 时,有

$$\sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2^{2k+1}}} \to \frac{1}{2} \quad (k \to +\infty),$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2}$.

由根值判别法知此级数收敛.

在本例中,注意到$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \dfrac{3}{2}$,$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \dfrac{1}{6}$,从而用比值法不能判断这个

级数是否收敛.

事实上,我们有以下结论.

定理 12.2.8　设 $a_n > 0 (n = 0,1,2,\cdots)$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$.

证明　记

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l.$$

又

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_0} \cdot \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n},$$

不难证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n} = l,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$.

从定理 12.2.8 及例 12.2.5 可以看出,凡能用比值法判别敛散性的级数,一定可以用根值判别法来判别其敛散性,反之则不一定. 但在两者均适用的时候,比值判别法往往比根值判别法更方便.

和比值法相似,当 $\sqrt[n]{a_n}$ 的极限不存在时,我们有不等式形式的根值法和上下极限形式的根值法,我们将这两个定理陈述在下面,证明留给读者.

定理 12.2.9　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

(1) 若存在正数 N 及 $l(0 < l < 1)$,对一切 $n > N$ 有

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant l < 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若存在正数 N,对一切 $n > N$ 有

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 12.2.10 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l.$$

(1) 若 $l<1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $l>1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

比值法和根值法的实质是通过证明级数的一般项收敛于0的速度比一个收敛的等比级数的一般项收敛于0的速度更快来证明级数收敛,通过证明级数的一般项不趋于0来证明级数发散.如果一个级数虽收敛,但其一般项趋于0的速度并不比收敛的等比级数的一般项趋于0的速度更快,或者虽然发散,但一般项却收敛于0,这两种判别法就失效了.这时为了判定级数收敛,就需要选择一个一般项趋于0的速度比收敛的等比级数慢的收敛级数作为比较标准,而为了判定级数发散,就要选择一个一般项趋于0的发散级数作为比较标准.我们用 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 作为比较标准,就可以得到下面的拉阿伯判别法.

定理 12.2.11(拉阿伯判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数,满足

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l.$$

(1) 若 $l>1$,则级数收敛;

(2) 若 $l<1$,则级数发散.

为证明拉阿伯判别法,我们先证明比较判别法的另外一种不等式形式.

定理 12.2.12 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数,且存在正数 N,对一切 $n\geqslant N$ 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

(1) 从 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

这个定理很容易从定理 12.2.2 得到证明,留给读者完成.

下面我们给出拉阿伯判别法的证明.