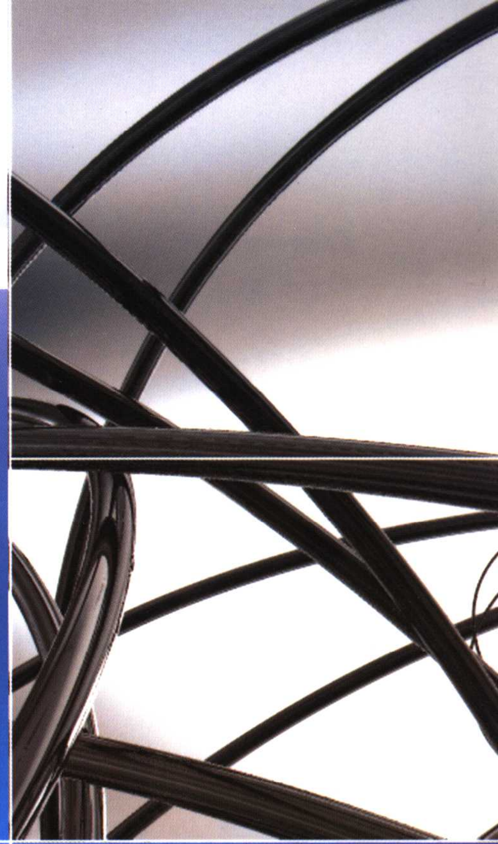

■ 高等学校教材

大学文科数学

盛 骤 范大茵 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学文科数学

高等学校教材

大学文科数学

盛骤 范大茵 编

高等教育出版社

内容简介

本书共分 10 章,第 1 章 ~ 第 4 章是一元微积分部分,内容有函数和极限、导数和微分及其一些应用、不定积分和定积分、无穷级数;第 5 章 ~ 第 6 章是线性代数部分,内容有矩阵、行列式和线性方程组;第 7 章 ~ 第 9 章是概率论和数理统计部分,内容有随机事件及其概率、随机变量的分布和数字特征、数理统计初步;第 10 章是运筹学的两个专题:对策论初步和排队论初步。全书内容取舍适当、安排紧凑,照顾到文科大学生的实际,便于教师教学、学生学习。

本书可作为高等学校文科各专业数学课程的教材,也可供有关人员学习参考之用。

图书在版编目 (CIP) 数据

大学文科数学 / 盛骤, 范大茵编. — 北京: 高等教育出版社, 2006.4
ISBN 7 - 04 - 018692 - 6

Ⅰ. 大... Ⅱ. ①盛...②范... Ⅲ. 高等数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 016406 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 于丽娜 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹文军
版式设计 张 岚 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 960　1/16	**版　　次**	2006 年 4 月第 1 版
印　　张	18.5	**印　　次**	2006 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	340 000	**定　　价**	19.60 元

物料号　18692 - 00

郑重声明

前　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学.随着现代科学技术和数学科学的发展,"数量关系"和"空间形式"具备了更丰富的内涵和更广泛的外延.现代数学内容更加丰富,方法更加综合,应用更加广泛.数学不仅是工具,而且是思维模式;不仅是知识,而且是素养;不仅是科学,而且是文化.能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志.数学教育对于培养高素质人才具有其独特的、不可替代的重要作用.

文科大学生应该掌握必需的数学知识,具备一定的数学素质,这已成为人们不争的共识.文科大学生学习数学课程的学时相对较少,基础又与理科、工科等学生不同,因此,需要针对文科大学生的数学教材.

本书为文科大学生提供必要的数学知识.学生通过学习数学培养进行抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力.

本书由以下四部分组成:

(1) 一元微积分,共四章,即函数和极限、导数和微分及其一些应用、不定积分和定积分、无穷级数.

(2) 线性代数,共二章,即矩阵、行列式和线性方程组.

(3) 概率论和数理统计初步,共三章,即随机事件及其概率、随机变量的分布和数字特征、数理统计初步.

(4) 对策论初步和排队论初步,共一章.

本书前三部分讲得较为系统,第四部分简单介绍了运筹学中的两个专题.如果学时不够,第四部分可作为学生选读的材料.

本书致力于内容安排紧凑,注重讲清基本概念和基本方法;讲述力求深入浅出、思路清晰,便于教师教学和学生学习.本书对理论的论证和数学方法的推导作了适当的处理,求其取舍适当.

数学的学习是以理解为基础的,没有理解就不能掌握.它是一个循序渐进、潜移默化的过程.文科大学生对于数学运算能力的培养有一定的要求.学数学不做适量的习题就收不到实效.书中的习题经过认真挑选,要求学生能基本上完成这些习题,以保证对教材内容的掌握和一定的运算能力的培养.

本书承蒙浙江大学董光昌教授审阅,对此我们表示衷心地感谢.

诚恳地希望广大读者批评指正.

盛 骤 范大茵

二〇〇六年一月

目　录

第 1 章

函数和极限

本书的前 4 章是微积分的内容. 微积分与中学里学过的初等数学有较大的区别. 初等数学的研究对象基本上是常量,即不变的量,所涉及的运算是常量之间的运算;而微积分的研究对象则是变量,在微积分中的基本运算则是变量之间的运算.

本章介绍微积分的两个最重要、最基本的概念:函数与极限.

1.1 函数的概念

函数概念我们在中学里已经学过,现在加以复习,并进一步介绍函数的有关知识.

定义 设 D 是一个非空实数集合,若存在一个法则,按照它,对于每一个实数 $x\in D$ 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

D 称为函数的**定义域**,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,y 与 x 的对应关系 f 称为**函数关系**.

自变量 x 在点 $x=a\in D$ 处对应的因变量 y 的值记为 $f(a)$,称为函数 $y=f(x)$ 在点 a 处的函数值. 有时也记为 $y|_{x=a}$,即 $y|_{x=a}=f(a)$. 当 x 取遍定义域 D 的所有值时,对应的全体函数值所组成的集合

$$\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

在平面直角坐标系中,取自变量 x 在横轴上变化,因变量 $y=f(x)$ 在纵轴上变化,则平面点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为定义在 D 上的函数 $y=f(x)$ 的图形.

一般来说,函数的定义域是由所考虑问题的实际意义确定的. 但在数学上作

一般性讨论时，常常只给出函数的表达式，而没有说明实际背景，这时函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的变化范围. 例如函数

$$y=\frac{\lg(x^2-1)}{x(x+2)}$$

的定义域是 $|x|>1$ 且 $x\neq-2$，即 $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(1,+\infty)$.

函数完全由对应法则和定义域所确定. 两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数相同. 例如两函数

$$f(x)=x^2+1 \quad 与 \quad g(t)=t^2+1$$

是同一个函数，而

$$y=\frac{x^2}{x} \quad 与 \quad y=x$$

是两个不同的函数，因为它们的定义域不相同，前者的定义域是 $x\neq0$，后者的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

在函数的定义中，我们规定对于自变量 x 的每一个值，y 有惟一的确定值与之对应，这样的函数称为**单值函数**. 如果放宽这一限制，使得对于定义域中 x 的值，可以有 y 的多于一个的确定值与之对应，这样的函数称为**多值函数**. 例如，可以利用方程 $x^2+y^2=1$ 来定义 y 是 x 的函数. 对于任意 $x\in(-1,1)$，都有两个 y 值与之对应，即 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=-\sqrt{1-x^2}$. 这是一个多值(双值)函数，它可以分成两个单值函数：$f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ 和 $f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$，定义域均为 $|x|\leqslant1$. 这两个单值函数称为这个多值函数的单值分支. 一般，对于多值函数，我们只需研究它的单值分支. 以后如无特别说明，提到的“函数”都是指单值函数.

下面举几个例子.

例 1　取整函数　设 x 是一个实数，以记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[1.3]=1$，$[\pi]=3$，$[-3.1]=-4$. 一般有 $[x]=n$，当 $x\in[n,n+1)$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 函数

$$f(x)=[x],\quad -\infty<x<+\infty,$$

称为**取整函数**. 可以作出它的图形如图 1－1 所示，这是一条逐段升高的“阶梯”形曲线. □

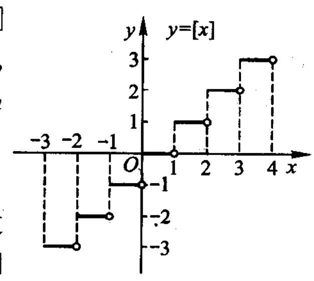

图 1－1

例 2　作出下列函数的图形：

$$(1)\ y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$(2)\ y=F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{x+1}{2}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

并求 $f(-3),f(-1),f(0),f(2),F(-2),F(-1/2),F(1/2),F(4),F(5)$.

解 (1) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,在区间$(-1,1)$,因变量与自变量的对应关系为 $f(x)=1/2$,而在区间$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,因变量与自变量的对应关系为 $f(x)=0$.函数的图形如图 1-2 所示.注意到$-3\in(-\infty,-1]$,$-1\in(-\infty,-1]$,$0\in(-1,1)$,$2\in[1,+\infty)$,故有

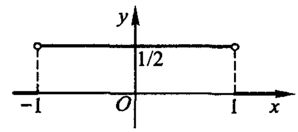

图 1-2

$$f(-3)=0,f(-1)=0,f(0)=\frac{1}{2},f(2)=0.$$

(2) $F(x)$的定义域也是$(-\infty,+\infty)$.在区间$(-\infty,-1)$,因变量与自变量的对应关系为 $F(x)=0$;在区间$[-1,1)$,因变量与自变量的对应关系为 $F(x)=\dfrac{x+1}{2}$;在区间$[1,+\infty)$,因变量与自变量的对应关系为 $F(x)=1$.函数的图形如图 1-3 所示,且有

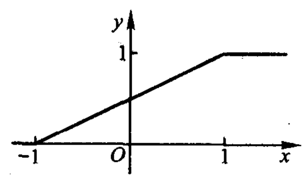

图 1-3

$$F(-2)=0,F(-1/2)=\frac{1}{4},F(1/2)=3/4,$$

$$F(4)=1,F(5)=1.$$ □

上例中的两个函数在自变量的不同范围内,因变量与自变量的对应关系要用不同的数学式子来表示.一般,在函数的定义域内,用两个或两个以上的数学式子分段表示的函数叫做**分段函数**.应该注意,不要将分段函数误解为是几个函数.它是一个函数,只不过在定义范围内,它的对应关系要用不同的数学式子来分段表示罢了.在求分段函数的函数值时要分清 a 落在自变量的哪一个范围内,然后按该范围内的函数表达式求出 $f(a)$的值.

例 3 某市市内家庭固定电话的收费标准规定如下:每次通话,首 3 分钟收费 0.20 元,以后按每分钟 0.10 元计费,尾数不满 1 分钟的按 1 分钟计费.以 t(以分计)表示通话时间,以 y(以元计)表示需付的通话费,试将 y 表示为 t 的函数.

解

$$y=f(t)=\begin{cases}0.20, & 0<t\leqslant 3,\\ 0.30, & 3<t\leqslant 4,\\ 0.40, & 4<t\leqslant 5,\\ \quad\vdots & \quad\vdots\end{cases}$$

或写成

$$y=f(t)=\begin{cases}0.20, & 0<t\leqslant 3,\\ 0.20+0.10\{[t-3]+1\}, & t>3, t\neq 4,5,6,\cdots,\\ 0.20+0.10(t-3), & t=4,5,6,\cdots,\end{cases}$$

其中$[t-3]$是取整函数. □

1.2 复合函数和反函数

1. 复合函数

设 y 是 u 的函数

$$y=f(u),$$

而 u 又是 x 的函数

$$u=\varphi(x).$$

设 D_φ 是 $\varphi(x)$的定义域或其一部分. 当 x 在 D_φ 上取值时, 如果所得到的 u 的值对于函数 $y=f(u)$是有定义的, 这时 y 通过 u 与 x 建立了函数关系. 我们就说 y 是 x 的一个定义在 D_φ 的**复合函数**, 记为

$$y=f[\varphi(x)], \tag{1.2.1}$$

或

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x), \tag{1.2.2}$$

u 称为**中间变量**.

由定义知道, 复合函数 $f[\varphi(x)]$的定义域或者与 $\varphi(x)$的定义域相同, 或者是 $\varphi(x)$的定义域的一部分. 例如, 由 $y=\sin u$ 与 $u=\sqrt{x}$复合起来的函数为

$$y=\sin\sqrt{x},$$

它的定义域是$[0,+\infty)$, 这与 $u=\sqrt{x}$的定义域相同, 而由 $y=\sqrt{u}$与 $u=\lg x$ 复合起来的函数为

$$y=\sqrt{\lg x},$$

它的定义域为$[1,+\infty)$, 这是 $u=\lg x$ 的定义域的一部分.

复合函数也可以由多于两个函数复合而成.

有时为了研究问题的需要, 对于一个复杂的函数需要引入适当的中间变量将它分解成为几个简单函数的复合. 例如, 对于函数

$$y=\tan^2(x^2+1),$$

可引入中间变量 $v=x^2+1, u=\tan v$,将它看成是由三个函数

$$y=u^2,\quad u=\tan v,\quad v=x^2+1$$

复合起来的复合函数.

2. 反函数

设有函数 $y=f(x)$,它的定义域为 D_f,值域为 R_f. R_f 内任取一个值 $y=y_0$,则在 D_f 内必能求出数值 $x=x_0$,使得

$$f(x_0)=y_0.$$

像这样的数值 x_0 可能仅出现一个,也可能出现多于一个.因此,R_f 内的任一数值 y 将与一个或几个 x 的值相对应.由此确定了在区域 R_f 内的单值或多值函数,它称为函数 $y=f(x)$的**反函数**,记为

$$x=f^{-1}(y).$$

此时称 $y=f(x)$为**直接函数**.

因习惯上常用字母 x 表示自变量,用字母 y 表示因变量,因而常将 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$中变量 x,y 的记号互换写成

$$y=f^{-1}(x).$$

例 1 设有函数 $y=2x+1$,自函数表达式中解出 x 得:$x=\frac{1}{2}(y-1)$,将 x,y 互换,即得函数 $y=2x+1$ 的反函数:

$$y=\frac{1}{2}(x-1).$$ □

例 2 设有函数 $y=x^2$,由函数表达式中解出 x 得:$x=\pm\sqrt{y}$,将 x,y 互换,即得函数 $y=x^2$ 的反函数:

$$y=\pm\sqrt{x}.$$

这是一个双值函数,它有两个单值分支:$y=-\sqrt{x}$和 $y=\sqrt{x}$.这两个函数的定义域均为直接函数 $y=x^2$ 的值域$[0,+\infty)$.它们的值域分别为$(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$.将这两个区间合起来就是直接函数 $y=x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$. □

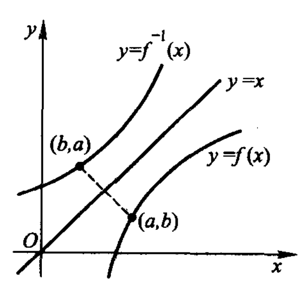

图 1-4

在一个坐标平面 xOy 中,函数 $y=f(x)$的图形与其反函数 $x=f^{-1}(y)$的图形是同一条曲线(因 $x=f^{-1}(y)$是从 $y=f(x)$中解 x 而得到的).在 $x=f^{-1}(y)$中将 x,y 互换得到 $y=f^{-1}(x)$,于是若在曲线 $x=f^{-1}(y)$上有一点(a,b),相应地,在曲线 $y=f^{-1}(x)$

上有一点(b,a)，因此，$y=f(x)$和 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 是对称的(如图 1－4).

1.3　基本初等函数和初等函数

1. 基本初等函数

在实际中遇到的函数是各种各样的，有简单的，有复杂的. 人们在长期的科学活动与社会实践中总结出一类最基本的函数，它们是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 这六种函数统称为**基本初等函数**，我们在这里进行简要的讲述.

(1) 常值函数

$$y=c\ (c\ 为常数)，定义域为(-\infty,\infty).$$

(2) 幂函数

$$y=x^{\alpha}\ (\alpha\ 是实数),$$

它的定义域与 α 有关. α 为正整数时定义域为$(-\infty,+\infty)$；α 为负整数时定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；$\alpha=\dfrac{1}{n}$($n$ 为正整数)，若 n 为奇数，定义域为$(-\infty,+\infty)$，n 为偶数，定义域为$[0,+\infty)$；α 为有理数时，设 $\alpha=p/q$(p,q 为整数，p/q 为既约分数，且 $q>1$)，定义域要根据 q 的奇偶及 p 的正负而定；α 为无理数时，规定其定义域为$(0,+\infty)$.

(3) 指数函数

$$y=a^{x}\quad (a>0,a\neq 1),$$

定义域为$(-\infty,+\infty)$.

科学技术中用得最多的指数函数是(图 1－5)

$$y=e^{x},\quad y=\left(\frac{1}{e}\right)^{x}=e^{-x},$$

其中 $e=2.718281828459\cdots$.

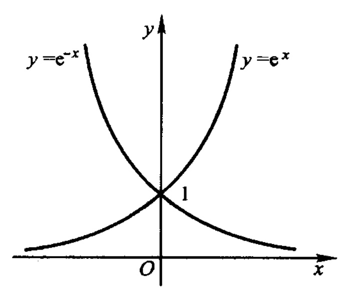

图 1－5

(4) 对数函数

$$y=\log_a x\quad (a>0,a\neq 1),$$

定义域为$(0,+\infty)$.

当 $a=10$ 时，$y=\log_{10}x$，简记为 $y=\lg x$，称作**常用对数**.

当 $a=e$ 时，$y=\log_e x$，简记为 $y=\ln x$，称作**自然对数**.

这两种对数有以下的换算公式：

$$\lg x \approx 0.4343 \ln x, \quad \ln x \approx 2.3026 \lg x.$$

$y=\lg x$, $y=\ln x$ 的图形如图 1－6.

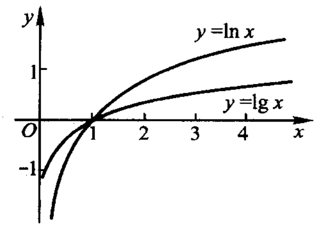

图 1－6

(5) 三角函数

$$y=\sin x, \quad y=\cos x,$$

定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$y=\tan x, \quad y=\sec x,$$

定义域为 $x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

$$y=\cot x, \quad y=\csc x,$$

定义域为 $x \neq k\pi$, $\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

$y=\sin x$, $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

$y=\tan x$, $y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

它们的图形如图 1－7.

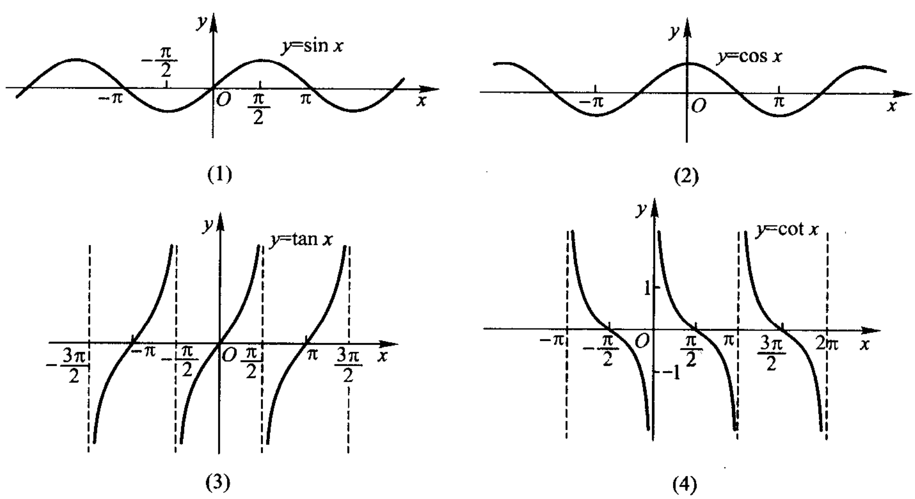

图 1－7

(6) 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 的反函数叫做反正弦函数. 由于正弦函数是一个以 2π 为周期的周期函数，因此，它的反函数是多值函数，记作

$$y=\operatorname{Arcsin} x.$$