初三数学（下）

龙门图解

丛书主编　袁克群
本册主编　鲁瑞丰　刘云飞

数理化分册
随书赠送配套光盘

初三数学（下）

龍門書局
www.sciencep.com

龙门图解

（2004年春季用书）

初三数学（下）

■学科主编　赵国良
■本册主编　鲁瑞丰　刘云飞
■修　　订　杨建成　杨芝凤
　　　　　　李　欣

龍門書局
北京

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，凡无此标志者均为非法出版物。

图书在版编目(CIP)数据

龙门图解.初三数学.下／袁克群主编；鲁瑞丰、刘云飞分册主编.北京：龙门书局，2003.10

ISBN 7-80191-101-6

I.龙… II.①袁…②鲁…③刘… III.数学课—初中—教学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第085925号

责任编辑：王风雷　张丽艳　　封面设计：企鹅美编室

龙门图解

初三数学(下)

出　　版	龍門書局
地　　址	北京东黄城根北街16号
邮政编码	100717
网　　址	http://www.sciencep.com
印　　刷	化学工业出版社印刷厂
发　　行	科学出版社总发行　　各地书店经销
版　　次	2003年11月第一版
印　　次	2003年11月第一次印刷
开　　本	890×1240　A5
印　　张	12 3/4
字　　数	340 000
印　　数	1－25000
定　　价	24.00元(含光盘)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目录

代数部分

几何部分

第七章 圆

总 复 习

代数部分

第十三章　函数及其图象

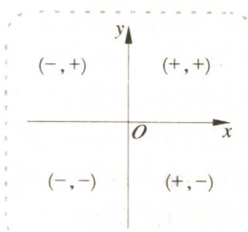
图导

知识网络

- 函数
  - 基本知识
    - 平面直角坐标系
      - 概念及结构 1
      - 点的坐标表示 2
      - 特殊点的坐标 3
    - 常量与变量
    - 函数概念
      - 函数自变量的取值范围
      - 建立函数关系式
  - 表示法
    - 解析法
    - 列表法
    - 图象法
    - 综合运用：描点法作函数图象
  - 分类
    - 一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$
    - 正比例函数 $y=kx$ $(k\neq0)$
    - 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$
    - 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$
    - 定义
    - 图象与性质
    - 待定系数法求解析式
    - 综合运用

本章数学思想

- 转化思想
- 方程和函数思想
- 数形结合思想
- 分类讨论思想



知识点导学

本章包含的主要知识点有：

坐标轴、坐标原点、坐标平面、象限、点的坐标的意义.函数、常量、变量、自变量、函数值、自变量的取值范围的意义.函数图象的意义，画函数的图象.一次函数与正比例函数的意义、图象及画法、性质.二次函数的意义.二次函数 $y=ax^2$ 的图象、画法以及对称轴、顶点等有关性质.二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象及画法.抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标，最大值或最小值.用待定系数法求一次函数、二次函数的解析式.反比例函数的意义、图象及画法、性质.

本章的重点是理解一次函数、正比例函数、二次函数、反比例函数的概念、图象和性质.

难点是对函数概念的理解，一次函数、正比例函数、二次函数、反比例函数知识的灵活运用，二次函数与一元二次方程根的判别式之间的关系.要掌握重点，攻克难点，必须注意以下几个问题：

1. 点 P 和它的坐标 (x,y) 的关系

<table>
<tr><th colspan="4">点 P 在各象限的坐标符号</th><th colspan="3">点 P 在坐标轴上的坐标</th></tr>
<tr><td>一</td><td>二</td><td>三</td><td>四</td><td>x轴</td><td>y轴</td><td>原点</td></tr>
<tr><td>x>0</td><td colspan="2">x<0</td><td>x>0</td><td rowspan="2">(x,0)</td><td rowspan="2">(0,y)</td><td rowspan="2">(0,0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">y>0</td><td colspan="2">y<0</td></tr>
</table>

$$P(x,y)\text{关于}\begin{cases}x\text{轴的对称点是}(x,-y)\\ y\text{轴的对称点是}(-x,y)\\ \text{原点的对称点是}(-x,-y)\end{cases}$$

2. 函数表达式中自变量的取值范围

(1) 用整式表示的函数，自变量的取值范围是全体实数.

(2) 用分式表示的函数，自变量的取值范围是使分母的值不为零的全体实数.

(3) 用偶次根式(如二次根式)表示的函数，自变量的取值范围是被开方数的值大于或等于零的全体实数.

(4) 用奇次根式(如三次根式)表示的函数，自变量的取值范围是全体实数.

(5) 用零指数幂或负整指数幂表示的函数，自变量的取值范围是底数不为零的全体实数.

(6) 复合函数，求自变量的取值范围应综合考虑.

(7) 实际问题求自变量的取值范围,应使函数解析式与实际问题均有意义.

3. 用待定系数法求二次函数的解析式

二次函数的解析式有三种表示形式

(1) 一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

(2) 顶点式：$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$

(3) 交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$.

三种表示形式可以互相转化.如果已知二次函数图象上的三点坐标,可设函数的解析式为一般式;如果已知函数图象的顶点坐标,可设解析式为顶点式;如果已知函数图象与 x 轴的两个交点 x_1、x_2,可设函数的解析式为交点式.

从函数解析式的求解过程来看，顶点式和交点式的解析式的求解过程比一般式解析式的求解过程较为简单.所以求二次函数解析式时,一般地应根据已知条件尽量将解析式设为顶点式或交点式;但要注意,无论解析式设为哪种形式,其最后结果都应化为一般式.

4. 二次函数解析式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 中 a、b、c 与函数图象的关系

(1) $|a|$ 的大小决定抛物线的形状.$|a|$ 越大,抛物线的开口越小;反之,$|a|$ 越小,抛物线的开口越大.

$a>0$,抛物线开口向上，$a<0$,抛物线开口向下.

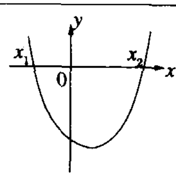
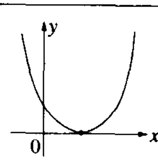
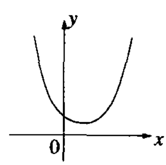
(2) a 与 b 的符号决定了抛物线对称轴的位置.

当 a、b 同号时,对称轴在 y 轴的左侧;当 a、b 异号时,对称轴在 y 轴的右侧;当 $b=0$ 时,对称轴为 y 轴.

(3) c 的符号决定了抛物线与 y 轴的交点位置.

当 $c>0$ 时,抛物线与 y 轴的正半轴相交;当 $c<0$ 时,抛物线与 y 轴的负半轴相交;当 $c=0$ 时,抛物线经过原点.

5. 二次函数与一元二次方程的根的判别式之间的关系

判别式	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象		 $x_1=x_2$	

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	有两个相异的实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_2>x_1)$	有两个相等的实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根

6. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$与坐标轴的交点

(1) 与 x 轴可能有两个交点,可能有一个交点、可能无交点(如上图).

① 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时,与 x 轴有两个交点,交点坐标为

$(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0)(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0)$;

② 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,与 x 轴有一个交点,这个交点也是抛物线的顶点,交点坐标为$(-\frac{b}{2a},0)$;

③ 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,与 x 轴无交点.

(2) 与 y 轴只有一个交点,交点坐标为$(0,c)$.

7. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$图象的平移

(1) 沿 y 轴平移遵循的规律是"上加下减".

若函数图象沿 y 轴向上平移 n 个单位,其解析式为 $y=ax^2+bx+c+n$.

若函数图象沿 y 轴向下平移 n 个单位,其解析式为 $y=ax^2+bx+c-n$.

(2) 沿 x 轴平移遵循的规律是"左加右减".

若函数图象沿 x 轴向左平移 m 个单位,其解析式为

$y=a(x+m)^2+b(x+m)+c$,若函数图象沿 x 轴向右平移 m 个单位,其解析式为 $y=a(x-m)^2+b(x-m)+c$.

8. 抛物线与 x 轴两交点间的距离 l

(1) 已知抛物线与 x 轴的两交点:$(x_1,0)$,$(x_2,0)$

$l=|x_2-x_1|$

(2)已知抛物线解析式:$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

$l=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$　$l=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$　(利用根与系数关系)

(3)已知抛物线解析式:$y=a(x-h)^2+k$

$l=2\sqrt{-\frac{k}{a}}$

第一单元

图例

13.1　平面直角坐标系

难点透析

1. 坐标平面内的点与谁建立了一一对应的关系?

答：对于坐标平面内的任意一点,都有一对有序实数与它一一对应;反之,对于任意一对有序实数,坐标平面内都有一个确定的点与它一一对应.

2. 各个象限内点的坐标有什么特点? 2

答：各象限内点的坐标特点如下:第一象限(+,+),第二象限(−,+),第三象限(−,−),第四象限(+,−).

3. 坐标轴上的点的坐标有什么特点?

答：x 轴上的任意一点的纵坐标均为 0,其点的坐标为$(x,0)$. y 轴上的任意一点的横坐标均为 0,其点的坐标为$(0,y)$.

4. 和坐标轴平行直线上点的坐标有什么特点?

答：和 x 轴平行的直线上各点的纵坐标都相同,和 y 轴平行的直线上各点的横坐标都相同.

5. 点 $P(a,b)$关于 x 轴、y 轴和原点的对称点的坐标是什么?

答：点 $P(a,b)$关于 x 轴对称点 P_1的坐标是$(a,-b)$,关于 y 轴对称点 P_2的坐标是$(-a,b)$,关于原点对称点 P_3的坐标是$(-a,-b)$.

6. 坐标平面内任意两点距离的公式是什么?

答：坐标平面内任意两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

基础知识例解

例题 1

如果点 $M(1-x,1-y)$在第二象限,那么 $N(1-x,y-1)$关于原点对称的点 P 在第______象限.

自助解题

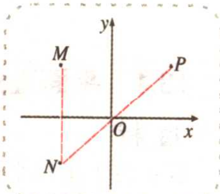
解：∵ 点 $M(1-x,1-y)$ 是第二象限的点

∴ $\begin{cases}1-x<0\\1-y>0\end{cases}$

∴ $\begin{cases}1-x<0\\y-1<0\end{cases}$ 这是关键

∴ 点 $N(1-x,y-1)$ 在第三象限

∴ 点 N 关于原点对称的点 P 在第一象限.



即学即练

1. 如果点 $P(a-2,b)$ 在第三象限，那么点 $M(-a+2,b-1)$ 在第______象限.
2. 如果 $xy>0$ 且 $x+y>0$，那么 $P(x,y)$ 在第______象限.
3. 若点 $M(-a,b)$，且 $a\leqslant 0,b>0$，则点 M 在______.

例题 2

已知在平面直角坐标系中有 $M(m,2)$ 和 $N(-3,n)$ 两点，根据下列条件求出 m,n 的值.

这类题必须熟练掌握

(1) M、N 两点关于 x 轴对称；

(2) M、N 两点关于 y 轴对称；

(3) M、N 两点关于原点对称；

(4) MN 平行于 x 轴；

(5) M、N 两点在第二、四象限两条坐标轴夹角的平分线上.

自助解题

解：(1) 当点 $M(m,2)$，$N(-3,n)$ 关于 x 轴对称时

$\begin{cases}x_M=x_N\\y_M=-y_N\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}m=-3\\n=-2\end{cases}$

(2) 当点 $M(m,2)$、$N(-3,n)$ 关于 y 轴对称时

$\begin{cases}x_M=-x_N\\y_M=y_N\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}m=3\\n=2\end{cases}$

(3) 当点 $M(m,2)$、$N(-3,n)$ 关于原点对称时

$\begin{cases}x_M=-x_N\\y_M=-y_N\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}m=3\\n=-2\end{cases}$

(4) 当点 $M(m,2)$、$N(-3,n)$的连线与 x 轴平行时

有 $y_M=y_N$ $\therefore m\neq-3, n=2$ ← 为什么？

(5) 当点 $M(m,2)$、$N(-3,n)$在第二、四象限两坐标轴夹角的平分线上时必有 $P(x,y)$中 $x+y=0$

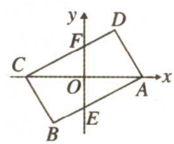
$\begin{cases}x_M=-y_M\\x_N=-y_N\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}m=-2\\n=3\end{cases}$.

即学即练

4. 已知点 $P(-3,\frac{1}{3})$，则点 P 关于 x 轴对称点的坐标为______；点 P 关于 y 轴对称点的坐标为______；点 P 关于原点对称点的坐标为______.
5. 若点 $A(a,-2)$与点 $B(2,-b)$关于原点对称，则 $a+b$ 的值等于______.
6. 点 $A(-3,2)$关于原点的对称点是 B，点 B 关于 x 轴的对称点是 C，则 C 点的坐标是______.

例题 3

矩形 $ABCD$ 在直角坐标系中位置如图所示，AB、CD 与 y 轴的交点分别为 E、F，点 O 是 AC 的中点，$AB=8$，$BC=6$，求 E、F 的坐标.



自助解题

解：由图可知，Rt△COF∽Rt△CDA ← 关键一步

$\therefore \frac{OF}{OC}=\frac{AD}{CD}$，即 $OF=\frac{AD\cdot OC}{CD}$

又已知 $AB=CD=8$，$BC=AD=6$，

$\therefore AC=10$

又 O 是 AC 中点，

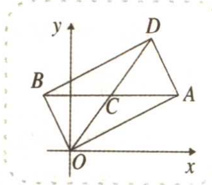
$\therefore OC=5$

$\therefore OF=\frac{6\times5}{8}=\frac{15}{4}$，故 $F(0,\frac{15}{4})$

同理可求 $OE=\frac{15}{4}$，故 $E(0,-\frac{15}{4})$.

即学即练

7. 如图所示，直角坐标系中矩形 $OADB$，OA 与 x 轴正半轴夹角 $\alpha=30°$，$AO=2$，$BO=1$，对角线 AB、OD 交于 C，求 A、B、C、D 各点的坐标.



例题 4

一个菱形，较短的对角线的长是 2，有一个内角是 120°，取两条对角线所在的直线为坐标轴，求四个顶点的坐标.

由于题目未指明哪条对角线在哪个轴上，故应分类讨论

自助解题

解：第一种情况 以较长对角线所在直线为 x 轴，另一条对角线所在直线为 y 轴，建立直角坐标系(如图所示).

$\because BD=2$，$\therefore OB=OD=1$，

则 $B(0,1)$，$D(0,-1)$

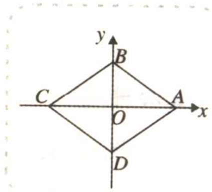
又 $\because \angle ABC=120°$，$\therefore \angle ABO=60°$

$\because OA=OB\cdot\tan\angle ABO=1\times\tan 60°=\sqrt{3}$.

$\therefore A(\sqrt{3},0)$

$\because OC=OA=\sqrt{3}$

$\therefore C(-\sqrt{3},0)$

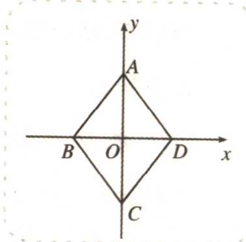


即四个顶点的坐标分别是

$A(\sqrt{3},0)$、$B(0,1)$、$C(-\sqrt{3},0)$、$D(0,-1)$.

第二种情况 以较短对角线所在直线为 x 轴，另一条对角线所在直线为 y 轴，建立直角坐标系(如图所示)，同理可得到菱形的四个顶点的坐标是

$A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(0,-\sqrt{3})$，$D(1,0)$.



即学即练

8. 已知等边三角形 ABC 的边长为 2，取直线 AB 为 x 轴且 A 为原点，求出各顶点坐标的所有可能情况.
9. 求以 $P(3,0)$ 为圆心，半径为 5 的圆，与两坐标轴的交点坐标.

综 合 应 用 例 解

例题 5

若 a 为整数，且点 $M(3a-9,2a-10)$ 在第四象限，则 a^2+1 的值为(　　)

A. 17　　B. 16　　C. 5　　D. 4

自助解题

解：$\because M(3a-9,2a-10)$ 在第四象限

$\therefore 3a-9>0$ 且 $2a-10<0$

$\therefore 3<a<5$

又 $\because a$ 为正整数

$\therefore a=4$

$\therefore a^2+1=4^2+1=17$

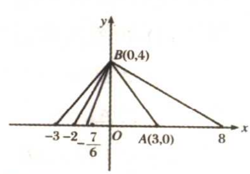
答案　A

即学即练

10. 已知点 $P(2a-8,2-a)$ 是第三象限的整点(横坐标、纵坐标均为整数)求点 P 的坐标.
11. 已知点 $M(x,y)$ 在第三象限内，它到两坐标轴的距离之和为 5，它到 x 轴的距离比到 y 轴的距离大 3，则点 M 的坐标是____.

例题 6

如图所示，已知点 $A(3,0)$，点 $B(0,4)$.求在 x 轴上一点 C，使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.



自助解题

解：(1) 若使 $AB=AC$

① 若点 C 在 x 轴的正半轴上

$\because A(3,0),B(0,4)\ \therefore AB=5\quad \therefore AC=AB=5$

$\therefore OC=OA+AC=3+5=8\ \therefore C(8,0)$

② 若点 C 在 x 轴的负半轴上

$\because AC=OC+OA$

$\therefore OC=AC-OA=5-3=2\ \therefore C(-2,0)$

(2) 若使 $BC=AC$，且点 C 在 x 轴上

设 $C(x,0)$.

则有 $|x-3|=\sqrt{x^2+4^2}$

即 $-6x=7$

$\therefore x=-\frac{7}{6}\ \therefore C(-\frac{7}{6},0)$ 为什么只此一解？

(3) 若 $BC=AB$，由图可得 $C(-3,0)$

综上所述：所求 C 点坐标：$(-3,0)$ 或 $(-2,0)$ 或 $(-\frac{7}{6},0)$ 或 $(8,0)$.

即学即练

12. 已知：在平面直角坐标系中，有点 $B(-2,0)$，点 $C(3,0)$，点 $D(0,6)$，若 P 点在 y 轴上，使得 $\triangle POB\backsim\triangle DOC$，求 P 点坐标.

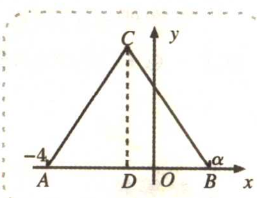
例题 7

已知等边 $\triangle ABC$ 的两个顶点坐标为 $A(-4,0)$，$B(2,0)$. 试求(1)点 C 的坐标；(2)$\triangle ABC$ 的面积.

自助解题

先画出平面直角坐标系，描出点 $A(-4,0)$，$B(2,0)$，再看等边 $\triangle ABC$ 的顶点 C 的位置，点 C 可能在 x 轴上方，也可能在 x 轴下方，但一定在线段 AB 的垂直平分线上，这两个点是关于 x 轴对称的，因此只要求出一个符合条件的点，另一个点由对称性可求解.

解：(1) 如图所示，过 C 点作 $CD\perp x$ 轴于 D



$\because OA=|-4|=4,OB=2$

$\therefore AB=6$

$\because CD\perp AB$

$\therefore D$ 为 AB 的中点. 等腰△的性质

$\therefore D$ 点横坐标为 -1，

$\therefore AD=3$

又 $\because AC=6$

$\therefore CD=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ 勾股定理

$\therefore$ 点 C 的坐标是$(-1,\ 3\sqrt{3})$

同样另一个符合条件的点 C' 的坐标是$(-1,\ -3\sqrt{3})$

故所求顶点 C 的坐标为$(-1,\ 3\sqrt{3})$或$(-1,\ -3\sqrt{3})$

(2) $\because$ 正三角形 ABC 的边长为 6

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

金点子

（1）运用数形结合，建立直角坐标系，画出符合条件的图形，再运用几何知识是解答本题的关键.

（2）分析点 C 的位置时，切勿漏掉在 x 轴下方的情况.

即学即练

13. 已知点 A 到原点 O 的距离 $OA=5$，设 $A(x,y)$，AO 与 x 轴的正半轴所夹的角为 30°，求点 A 的坐标.

14. 在同一直角坐标系中，分别描出点 $A(3,0)$，$B(0,3)$，$C(-4,0)$，$D(-1,-3)$，并顺次用线段连结各点.

(1)求四边形 $ABCD$ 的周长和面积；

(2)判断四边形 $ABCD$ 的形状.

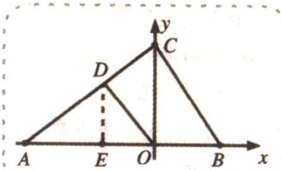
例题 8

如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为$(-4,0)$，点 C 为 y 轴上一动点，连结 AC，过点 C 作 $CB\perp AC$，交 x 轴于 B.

(1) 当点 B 坐标为$(1,0)$时，求点 C 的坐标；

(2) 如果 $\sin A$ 和 $\cos A$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数根，过原点 O 作 $OD\perp AC$，垂足为 D，且点 D 的纵坐标为 a^2，求 a 的值.

自助解题



解：(1) 设点 C 坐标为 $C(0,x)$

$\because \angle ACB=90°$，$AB\perp OC$，

$\therefore x^2=OA\cdot OB=4\times1=4$

$\therefore x=\pm2$

$\therefore C(0,2)$或$(0,-2)$.

(2) 过 D 作 $DE\perp AO$，垂足为 E，

$\because$ $\sin A$、$\cos A$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根，

$\therefore$ $\sin A+\cos A=-a$，

$\sin A\cdot\cos A=b$

$\because$ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$\therefore$ $(\sin A+\cos A)^2-2\sin A\cos A=1$

$\therefore$ $a^2-2b=1$　　①

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中，$\angle ADO=90°$，$OD=OA\cdot\sin A=4\sin A$，

$AD=OA\cdot\cos A=4\cos A$

又 $S_{\triangle ADO}=\frac{1}{2}AD\cdot DO=\frac{1}{2}AO\cdot DE$

$\therefore$ $16\sin A\cdot\cos A=4a^2$

$\therefore$ $a^2=4b$　　②

解由①、②组成的方程组得：$a=\pm\sqrt{2}$

$\because$ $\sin A+\cos A=-a>0$，

$\therefore$ $a=-\sqrt{2}$.

金点子

利用射影定理：$OC^2=OA\cdot OB$ 及 $S_{\triangle ADO}=\frac{1}{2}AD\cdot OD=\frac{1}{2}AO\cdot DE$ 是解题关键.

即学即练

15. 在平面直角坐标系中，A 和 B 两点在 x 轴正半轴上，且这两点的横坐标是方程 $-\frac{1}{7}x^2+bx+c=0$ 的两个根，已知 $AB=4$，点 P 在第三象限，它的横坐标为 -1，作 $PH\perp x$ 轴于 H，$\angle PAH=45°$，$\cot\angle PBH=\frac{7}{3}$，求 b 和 c 的值.

小网吧

平面直角坐标系又称为笛卡儿坐标，这是为了纪念著名法国数学家笛卡儿(1596~1650 年)为数学发展所做出的杰出贡献. 1637 年笛卡儿在《几何学》一书里首先创立了直角坐标系，他使坐标平面上的点与一对有序实数对建立起一一对应关系，从而使得数形结合得更紧密了. 恩格斯对此作过评价：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入