

最全面、最权威、最实用的数学真题解析



2007 考研 数学一

最新历年真题题型解析

主 编 黄先开 曹显兵
副主编 施明存 殷先军

● 囊括**20年**全部真题 ● 名师归纳总结**127题型** ● 附送**6重**好礼

- 全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1987~2006年真题
- 题题精解，有分析，有评注，多种解法全部列出
- 章章总结，将历年试题按题型分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
- 每章后附自测练习题，全部来自数二、三、四的历年真题，互相借鉴，触类旁通
- 20年真题原样重现，附录在全书最后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明



中国人民大学出版社

013-44
191
:2007(1)

国内同类最畅销图书

考研

数学一最新历年真题题型解析

主 编 黄先开 曹显兵
副主编 施明存 殷先军



2007

图书在版编目(CIP)数据

考研数学一最新历年真题题型解析/黄先开,曹显兵主编

北京:中国人民大学出版社,2006

ISBN 7-300-07360-3

I. 考…

II. ①黄…②曹…

III. 高等数学-研究生-入学考试-解题

IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 054882 号

考研数学一最新历年真题题型解析

主 编 黄先开 曹显兵

副主编 施明存 殷先军

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号 邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室) 010-62511239(出版部)

010-82501766(邮购部) 010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司) 010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.1kao.net>(中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 河北涿州星河印刷有限公司

规 格 210×285mm 16 开本 版 次 2006 年 6 月第 1 版

印 张 28.75 印 次 2006 年 6 月第 1 次印刷

字 数 794 000 定 价 32.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

郑重声明

黄先开、曹显兵教授主编的《考研数学最新历年真题题型解析》系列图书,因其名师的底蕴、全面的内容、权威的解析,名副其实地成为最全面、最权威、最实用的数学真题类考研书。

当前考研图书市场盗印盗销行为猖獗。盗版行为在侵害作者和出版者权益的同时,也因其印装粗劣、错漏百出,使考生蒙受金钱损失、精力损失,甚至误导考生,毁掉考生考研前程。

多年来,我们一直与盗版行为做着艰苦的斗争,并让一些盗版者受到了应有的处罚。今年,我们将进一步加大打击盗版的力度,并利用包括法律在内的一切手段,让盗版者受到严惩。

请广大考生认准以下防盗版特征:(1)封面防伪标带 16 位密码网上注册查真伪。(2)封面防伪标带 16 位密码短信查真伪。(3)封面压有带人大出版社社标的压纹。

在以上措施的基础上,我们奉行以服务打击盗版,让买人大版图书的考生享受到实实在在的服务。今年我们将举办“买人大版考研书 送六重好礼”等一系列活动,服务详情请及时登录中国 1 考网(www.1kao.net)查询。

为保障您和您尊敬的老师的合法权益,请将您掌握的盗版者信息告诉我们,我们将视举报情况给予奖励。

举报电话:010-62515275

编辑电话:010-62511915

电子邮箱:1kao2005@163.com

中国人民大学出版社

授权律师 徐 波

2006 年 5 月

真题复习

攻克数学的突破口

数学在研究生入学考试中分值之高,使其对于考研的成功与否起着至关重要的作用。而要攻克这一重点与难关,必须要把真题复习作为突破口。

黄先开、曹显兵教授多年从事研究生入学考试的研究与辅导,在考生中广受赞誉,他们积丰富经验所主编的这套《考研数学最新历年真题题型解析》,内容权威,覆盖面广,解析精准,对于考生深度复习真题,全面提高应试能力大有帮助。

考研是一项系统工程,在全力攻克数学真题的同时,考生还需要在其他方面下工夫。相关图书如下:

考研英语 《2007 年考研英语词汇复习指南》《2007 年考研英语新教程》
《历年考研英语真题专项突破》《2007 年考研英语阅读 200 篇》
《2007 年考研英语写作专项突破》《2007 年考研英语阅读新题型专项突破》

考研政治 《2007 年考研政治理论新大纲重要知识点深度解析》《最新考研政治真题命题研究与高分策略》《2007 年考研政治理论实用经典复习教程》《2007 年考研政治理论最新精编 1000 题》
《2007 年考研政治理论新编考试参考书》《考研政治考前 10 小时金题预测》

考研数学 《2007 年考研数学最新经典讲义》《考研数学最新历年真题题型解析》《2007 年考研数学最新精选 600 题》

经过认真复习,我们相信您定可以轻松上阵,考取高分,圆考研名校梦。

前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来,至今已整整 20 年,共命制试卷近百份,有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

“知己知彼,百战不殆”。拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题,是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题,可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考典型题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心分析研究,并结合授课体会和学生的需要经过全新编写而成的,相信能够满足考生的要求。

本书具有以下特点:

1. 内容最全面。汇集了统考以来 20 年的所有试题,便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供(如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题),以便考生进一步巩固相关知识,考生有了本书后,也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。

2. 分类最精练。题是无限的,但题型是有限的。我们将全部历年真题精心浓缩为 100 个左右的典型题型,分别涵盖了考试大纲对四个卷种要求的全部内容,从而为考生节省大量宝贵的复习时间。

3. 题型最丰富。根据考试大纲的要求,每一章节均按题型进行归类,并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究,把握命题特点和命题思路,做到举一反三,触类旁通。

4. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法,然后详解——详细、规范的解答过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及到的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

5. 对照最直接。本书在每部分的开头,先列出了考试大纲规定的内容与要求,与此相对照再进行题型归类和分析总结,顺序与考试大纲和一般教材一致,便于考生对照复习。

6. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外,每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结,这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重,从而发现命题的重点、最常考的题型,以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排,又提供成套试卷。前期复习建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行,后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析,但

希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注,而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后,再去看书中的分析、详解和评注,仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同;如果存在问题,应尽量查找原因,看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺,还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。注意,这样的归纳总结过程是必不可少的,其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来,在掌握基本理论、基本概念和基本方法上,在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上,相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点,同时在这次编写完善过程中,参考了众多相关的教材和复习指导书,在此不一一提及,谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促,加上编者水平所限,书中难免还有不足之处,恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信,衷心祝愿广大考生充满信心,通过脚踏实地的艰苦努力,一定能够心想事成。

黄先开 曹显兵

2006年5月24日于北京

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续 3

题型 1.1	函数的概念及其特性	3
题型 1.2	极限的概念与性质	5
题型 1.3	函数极限的计算	5
题型 1.4	函数极限的逆问题	11
题型 1.5	数列的极限	12
题型 1.6	无穷小量的比较	14
本章总结		16
自测练习题		16
自测练习题答案或提示		20

第二章 一元函数微分学 22

题型 2.1	导数的定义	22
题型 2.2	利用导数求曲线的切线、 法线方程	25
题型 2.3	一般导函数的计算	26
题型 2.4	可导、连续与极限的关系	28
题型 2.5	微分的概念与计算	28
题型 2.6	利用导数确定单调区间与 极值	29
题型 2.7	求函数曲线的凹凸区间与 拐点	33
题型 2.8	求函数曲线的渐近线	34
题型 2.9	确定函数方程 $f(x) = 0$ 的根	35
题型 2.10	确定导函数方程 $f'(x) = 0$ 的根	37
题型 2.11	微分中值定理的综合应用	38
题型 2.12	利用导数证明不等式	40
本章总结		44
自测练习题		45
自测练习题答案或提示		49

第三章 一元函数积分学 51

题型 3.1	原函数与不定积分的概念	51
--------	-------------	----

题型 3.2	定积分的基本概念与性质	52
题型 3.3	不定积分的计算	54
题型 3.4	定积分的计算	56
题型 3.5	变限积分	58
题型 3.6	定积分的证明题	63
题型 3.7	广义积分	66
题型 3.8	应用题	67
本章总结		72
自测练习题		73
自测练习题答案或提示		76

第四章 向量代数与空间解析几何 79

题型 4.1	向量运算	79
题型 4.2	建立直线或平面的方程	80
题型 4.3	求点到直线和点到平面的 距离	82
题型 4.4	确定直线、平面之间的 几何关系	82
题型 4.5	建立旋转曲面的方程	83
题型 4.6	杂 题	86
本章总结		87

第五章 多元函数微分学 88

题型 5.1	基本概念题	88
题型 5.2	求多元复合函数的偏导数和 全微分	91
题型 5.3	求隐函数的偏导数和 全微分	95
题型 5.4	利用变量代换将方程变形	97
题型 5.5	利用偏导或全微分 确定常数	99
题型 5.6	求函数的方向导数和梯度	100
题型 5.7	多元函数微分学的 几何应用	102
题型 5.8	求多元函数的极值与最值	105

本章总结	109
自测练习题	109
自测练习题答案或提示	112
第六章 重积分	114
题型 6.1 交换积分顺序	114
题型 6.2 利用区域的对称性和函数的 奇偶性求积分	117
题型 6.3 分块积分	120
题型 6.4 选择适当坐标系计算 重积分	121
题型 6.5 重积分的应用	125
本章总结	128
自测练习题	128
自测练习题答案或提示	130
第七章 曲线、曲面积分	132
题型 7.1 计算第一类曲线积分	132
题型 7.2 计算第二类平面曲线积分 ...	134
题型 7.3 有关曲线积分与路径 无关的问题	138
题型 7.4 计算第二类空间曲线积分 ...	145
题型 7.5 计算第一类曲面积分	147
题型 7.6 计算第二类曲面积分	149
题型 7.7 曲线、曲面积分的应用	158
题型 7.8 计算向量场的散度及旋度 ...	161

第二部分

第一章 行列式	219
题型 1.1 利用行列式的性质和按行(列) 展开定理计算行列式	219
题型 1.2 利用行列式和矩阵的运算 性质计算行列式	220
题型 1.3 利用秩、特征值和相似矩阵等 计算行列式	223
本章总结	225
自测练习题	225
自测练习题答案或提示	227

本章总结	163
第八章 无穷级数	164
题型 8.1 判定数项级数的敛散性	164
题型 8.2 证明数项级数的敛散性	170
题型 8.3 求幂级数的收敛半径、 收敛区间及收敛域	173
题型 8.4 求幂级数的和函数	176
题型 8.5 求数项级数的和	179
题型 8.6 求函数的幂级数展开式	181
题型 8.7 傅里叶级数	185
本章总结	189
自测练习题	189
自测练习题答案或提示	192

第九章 常微分方程

题型 9.1 一阶微分方程	193
题型 9.2 可降阶方程	197
题型 9.3 高阶常系数线性微分方程 ...	198
题型 9.4 求解含变限积分的 函数方程	202
题型 9.5 微分方程的应用	204
题型 9.6 欧拉方程	209
本章总结	210
自测练习题	210
自测练习题答案或提示	214

线性代数

第二章 矩阵	228
题型 2.1 有关逆矩阵的计算与证明 ...	228
题型 2.2 矩阵的乘法运算	231
题型 2.3 解矩阵方程	233
题型 2.4 与初等变换有关的命题	234
题型 2.5 与伴随矩阵 A^* 有关的 命题	236
题型 2.6 矩阵秩的计算与证明	237
本章总结	240
自测练习题	240
自测练习题答案或提示	245

第三章 向量 246

- 题型 3.1 向量的线性组合与
线性表示 246
- 题型 3.2 向量组的线性相关性 248
- 题型 3.3 求向量组的秩与矩阵的秩 253
- 题型 3.4 有关向量空间的命题 253
- 本章总结 255
- 自测练习题 256
- 自测练习题答案或提示 259

第四章 线性方程组 260

- 题型 4.1 解的判定、性质和结构 260
- 题型 4.2 求齐次线性方程组的
基础解系、通解 262
- 题型 4.3 求非齐次线性方程组的
通解 264
- 题型 4.4 抽象方程组的求解问题 267
- 题型 4.5 有关基础解系的命题 269
- 题型 4.6 讨论两个方程组解之间的
关系(公共解、同解) 269
- 题型 4.7 与 $AB = 0$ 有关的命题 271
- 题型 4.8 线性方程组的综合应用 272
- 本章总结 274
- 自测练习题 274
- 自测练习题答案或提示 278

第五章 特征值与特征向量 280

- 题型 5.1 求数字矩阵的特征值和

特征向量 280

- 题型 5.2 求抽象矩阵的特征值 283
- 题型 5.3 特征值、特征向量的
逆问题 284
- 题型 5.4 相似矩阵的判定及其
逆问题 285
- 题型 5.5 可对角化的判定及其
逆问题 289
- 题型 5.6 实对称矩阵的性质 290
- 题型 5.7 特征值、特征向量的应用 291
- 本章总结 295
- 自测练习题 295
- 自测练习题答案或提示 298

第六章 二次型 301

- 题型 6.1 二次型的矩阵、秩和正负
惯性指数 301
- 题型 6.2 化二次型为标准形 302
- 题型 6.3 化二次型为标准形的
逆问题 304
- 题型 6.4 合同变换与合同矩阵 306
- 题型 6.5 正定二次型与正定矩阵 307
- 本章总结 308
- 自测练习题 308
- 自测练习题答案或提示 309

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率 313

- 题型 1.1 事件关系与概率的性质 313
- 题型 1.2 古典概型与几何概型 314
- 题型 1.3 乘法公式、条件概率公式 317
- 题型 1.4 全概率公式、贝叶斯公式 318
- 题型 1.5 事件的独立性 319
- 题型 1.6 贝努利概型 321
- 本章总结 322
- 自测练习题 323

自测练习题答案或提示 325

第二章 随机变量及其分布 326

- 题型 2.1 分布函数的概念及其性质 326
- 题型 2.2 求随机变量的分布律,
分布函数 327
- 题型 2.3 利用常见分布计算概率 329
- 题型 2.4 常见分布的逆问题 331
- 题型 2.5 随机变量函数的分布 333
- 本章总结 336

自测练习题	336
自测练习题答案或提示	339
第三章 多维随机变量及其分布	341
题型 3.1 二维离散型随机变量的联合 分布、边缘分布、条件分布	341
题型 3.2 二维连续随机变量的联合分布、 边缘分布、条件分布	344
题型 3.3 二维随机变量函数的分布	346
题型 3.4 二维随机变量取值的 概率计算	352
题型 3.5 随机变量的独立性	353
本章总结	355
自测练习题	355
自测练习题答案或提示	357
第四章 随机变量的数字特征	359
题型 4.1 数学期望与方差的计算	359
题型 4.2 一维随机变量函数的期望与 方差	362
题型 4.3 二维随机变量函数的期望与 方差	363
题型 4.4 协方差与相关系数的计算	365
题型 4.5 随机变量的独立性与 不相关性	367
本章总结	370
自测练习题	370
自测练习题答案或提示	374

附录

附录一	1987 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	401
附录二	1988 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	403
附录三	1989 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	404
附录四	1990 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	406
附录五	1991 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	408
附录六	1992 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	410
附录七	1993 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	412

第五章 大数定律和中心极限定理

题型 5.1 切比雪夫不等式	377
本章总结	378
自测练习题	378
自测练习题答案或提示	379

第六章 数理统计的基本概念

题型 6.1 求统计量的数字特征	381
题型 6.2 求统计量的分布或取值的 概率	385
本章总结	387
自测练习题	387
自测练习题答案或提示	388

第七章 参数估计

题型 7.1 求参数的矩估计和最大 似然估计	389
题型 7.2 估计量的评价标准	394
题型 7.3 区间估计	395
本章总结	396
自测练习题	397
自测练习题答案或提示	398

第八章 假设检验

题型 8.1 单正态总体均值 μ 的 假设检验	399
本章总结	400

附录八	1994 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	414
附录九	1995 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	416
附录十	1996 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	418
附录十一	1997 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	420
附录十二	1998 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	422
附录十三	1999 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	424
附录十四	2000 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	427



附录十五	2001 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	429	附录十八	2004 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	436
附录十六	2002 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	431	附录十九	2005 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	438
附录十七	2003 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	433	附录二十	2006 年全国硕士研究生入学 统一考试数学一试题	441

PART ONE

第一部分

高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考 试 内 容

函数的概念及函数的表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限和右极限,无穷小和无穷大的概念及其关系,无穷小的性质及无穷小的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则——单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立简单应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

题型 1.1

函数的概念及其特性

1. (88,5分)* 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【分析】 先由 $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 确定 $\varphi(x)$ 的表达式,再求 $\varphi(x)$ 的定义域.

* (88,5分) 表示该题为 1988 年考研数学一真题,其分值为 5 分.

【详解】 由 $f[\varphi(x)] = 1-x$, 有 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1-x$, 解得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$.

其定义域为 $\ln(1-x) \geq 0$, 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$.

【评注】 假设有关系式 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知, 有两种情况:

(1) 已知 f , 求 g : 相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}[\varphi(x)]$.

(2) 已知 g , 求 f : 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$, 于是有 $f(u) = \varphi[g^{-1}(u)]$, 再根据函数关系与变量字母无关, 得知 $f(x) = \varphi[g^{-1}(x)]$.

2. (90, 3分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 应填 1.

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可, 注意 $|f(x)| \leq 1$.

【详解】 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 知 $|f(x)| \leq 1$. 因此有 $f[f(x)] = 1$.

【评注】 已知 $f(x), g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$ (或 $g[f(x)]$), 一般用代入法逐次复合即可, 应特别注意的是 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的对应关系.

3. (05, 4分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. **【 】**

【答案】 应选 (A).

【分析】 本题可直接推证, 但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解 1】 任一原函数可表示为 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$, 且 $F'(x) = f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时, 有 $F(-x) = F(x)$, 于是 $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, 即 $-f(-x) = f(x)$, 也即 $f(-x) = -f(x)$, 可见 $f(x)$ 为奇函数;

反过来, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, 从而 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$ 为偶函数, 可见 (A) 为正确选项.

【详解 2】 令 $f(x) = 1$, 则取 $F(x) = x + 1$, 可排除 (B), (C);

令 $f(x) = x$, 则取 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 可排除 (D).

故应选 (A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系?



函数的概念及函数的复合, 包括分段函数的复合, 本质上是函数关系的建立问题, 而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性: 奇偶性和周期性一般用定义检验; 单调性则大多用导数符号分析; 有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2

极限的概念与性质

(03, 4分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【 】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限的概念, 极限值与数列前面有限项的大小无关, 可立即排除(A), (B); 而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 可能存在也可能不存在, 举反例说明即可; 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 属“ $1 \cdot \infty$ ”型, 必为无穷大量, 即不存在. 故应选(D).

【详解 2】 用举反例法, 取 $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{1}{2}n (n=1, 2, \dots)$, 则可立即排除(A), (B), (C), 因此正确选项为(D).

小结

关于极限的存在性, 以下几点是值得注意的:

1. 若 $\lim f$ 存在, $\lim g$ 不存在, 则 $\lim(f \pm g)$ 一定不存在, 但 $\lim fg, \lim \frac{f}{g}$ 可能存在, 也可能不存在.
2. 若 $\lim f = l \neq 0, \lim g = \infty$, 则 $\lim fg = \infty$.
3. 若 f 有界, $\lim g = \infty$, 则 $\lim(f \pm g) = \infty$, 但 $\lim fg$ 不一定为 ∞ .

题型 1.3

函数极限的计算

一、利用左右极限求函数极限

1. (92, 3分) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(B) 等于 0.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在但不为 ∞ .

【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 本题的关键是注意 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, 故有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

可见, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不为 ∞ .

【评注】 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^{\frac{1}{x-x_0}}, \lim_{x \rightarrow x_0} \arctan \frac{1}{x-x_0}$ 等均是极限不存在的情形, 遇此情形一般应通过左、右极限进行讨论.