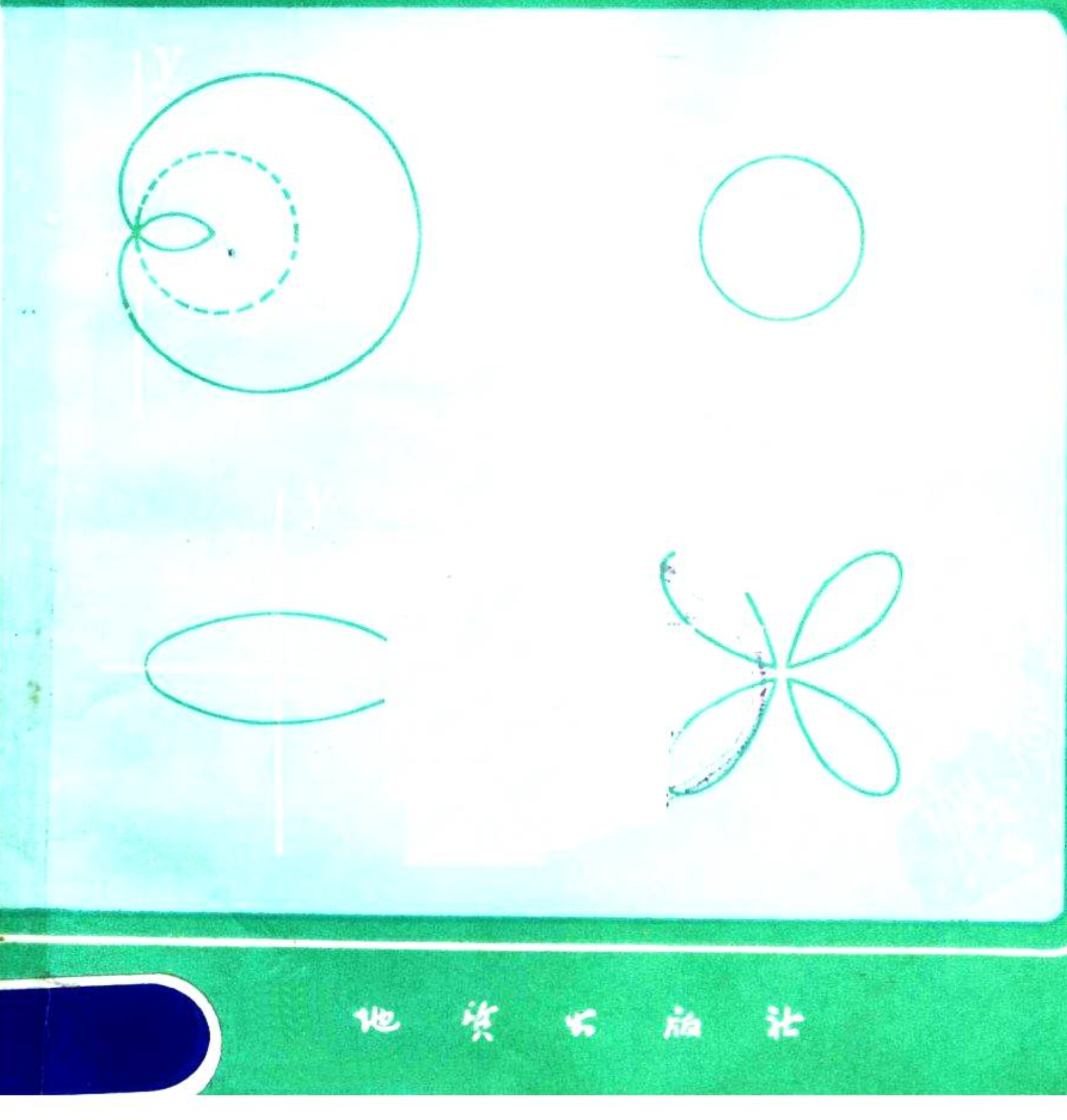
中学数学自学辅导教材（修订二版）

代　　数

第三册（一）课本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编



地质出版社

中学数学自学辅导教材（修订二版）

代　　数

第三册　（一）　课本

中国科学院心理研究所　卢仲衡　主编

北京海淀区教师进修学校　张士充　审阅

地质出版社

中学数学自学辅导教材（修订二版）

代　　数

第三册（一）课本

中国科学院心理研究所　卢仲衡　主编

北京海淀区教师进修学校　张士充　审阅

·

责任编辑：[illegible]

[illegible]出版

（北京西四）

沧州地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　全国新华书店经售

·

开本　787×1092 1/32　印张（共三册）：18 1/4　字数　404,000

1985年5月沧州修订二版　1985年5月第一次印刷

印数：1—[illegible]6,085册（共三册）　定价　[illegible].45元

统一书号：7038·新159

前　言

一、中学数学自学辅导实验教材是1965年由中国科学院心理研究所卢仲衡根据人民教育出版社课本内容，运用九条有效的学习心理学原则并结合我国优秀教师的教学经验，首次编写出的一种自学教材。使用这套教材的教学过程，由我国著名心理学家潘菽先生定名为“自学辅导教学”。

开始，这套教材每册有三个本子，一是课本，一是留有空白让学生做题的练习本，一是答案本，当时曾称“三本”教学（现在已把答案附在课本后面，增加了一个小测验本，即没有答案的练习题本）。1966年初在北京市女六中和西四中学与常规教学班级进行对比实验，效果略优于对比班，学生的学习时间比对比班缩短四分之一以上。后由于十年动乱，实验被迫停止。1973年至1974年重新在北京一七二中和三中进行实验，在连续一年半的实验中，不仅获得与1966年实验的同样效果，而且学习者自学能力成长的速度比对比班快多了。但是在“四人帮”的干扰破坏下，实验无法深入下去。1978年以来，在上级领导和各方面的支持下，我们又恢复并逐步扩大了实验，现已在全国二十六个省市的上千个班级进行实验。由于使用这套教材的教学特点是在教师指导、辅导下以学生的自学为主，能充分调动学生的学习积极性和主动性，绝大多数实验班的学生在学业成绩、自学能力成长、自学能力迁移和学科全面发展四个指标上都取得了良好的效果。

1983年中国科学院心理研究所组织专家进行鉴定的结果表明，中学数学自学辅导教材和自学辅导教学法不仅确能提高实验班学生学习数学的能力，而且完全适用于青年自学和各种形式的成人教育。

二、使用这套教材做实验时，教师启发、指导、提问、答疑和小结等平均每课时约占10分钟左右的时间，而且这些活动都是在课时开始或结束前进行的，中间约有30分钟至35分钟让学生集中精力由粗到细到精地认真阅读课本内容，接着做练习并对答案，中间不打断学生的思路，以便快者快学，慢者慢学。学生学完老师规定的进度之后，可以自学参考书或人民教育出版社编的课本。在学生自学时，老师可以巡视学生的学习情况并辅导差生。学生做练习时，应在做完一大题所包含的全部小题以后再对答案，而不要做一小题就对答案，以免造成思维步子过小，影响思维能力的成长，但也不要全部做完一个练习才对答案，这样容易出现连锁性的错误（具有较好的数学才能的学生可以做完一个练习再对答案）。本套教材的使用方法详见《教育研究》1982年第11期“怎样进行自学辅导教学实验”一文，以及1984年第1期“自学辅导教学实验的教学原则”一文。

三、为了便于老师和学习者检查对自学教材的掌握程度，每学完一个小单元（几个练习）之后，就有一个小测验，测验题单独装订成册，由教师掌握。小测验是没有答案的，学生做完后交老师批改。个人自学的，可以互改或找高年级的学生帮助批改。每个小测验题几乎都包含概念题、基本题、变式题和思考题，教师可以根据具体情况来增删，这样可以全面了解学习者掌握知识和思维能力发展的情况。教师对小测验题要认真地详细批改。对于多数学生没有掌握的

某类型题或带有普遍性的错误，老师可以进行复习性的讲述，务必使绝大多数学习者弄懂为止；对于个别学习者出现错误，可在课上或课下进行个别辅导，不必进行全班讲述，以免占用大多数学生的时间。

四、这套中学数学自学辅导教材是参照人民教育出版社出版的数学课本内容编写的，根据1983年的教学大纲要求进行了修订，目前又在1984年修订版的基础上对全书图文做了校勘订正。本册教材由卢仲衡、宋同荦、段惠若、孙嘉谟编写。冯丽华、吴琼、赵爱秋等给予协助，特此致谢。由于水平所限，错误之处定然不少，请批评指正。

中国科学院心理研究所
数学自学辅导教学实验组
1985年1月

目　录

第九章　数的开方……………………………………………………1
9.1　平方根……………………………………………………1
9.2　平方根表……………………………………………………11
9.3　立方根……………………………………………………16
9.4　立方根表……………………………………………………19
9.5　无理数……………………………………………………21
9.6　实数……………………………………………………22
9.7　小结……………………………………………………25
9.8　附录：平方根的笔算求法……………………………………27
第十章　二次根式……………………………………………………36
10.1　二次根式……………………………………………………36
10.2　二次根式的性质……………………………………………40
10.3　最简二次根式和同类根式…………………………………51
10.4　二次根式的加减……………………………………………55
10.5　二次根式的乘除……………………………………………58
10.6　分母有理化……………………………………………64
10.7　$a\pm2\sqrt{b}$的算术平方根……………………………………73
10.8　小结……………………………………………………74
第十一章　一元二次方程……………………………………………76
一、一元二次方程……………………………………………76
11.1　一元二次方程……………………………………………76
11.2　一元二次方程的解法……………………………………78
11.3　一元二次方程的根的判别式………………………………94

11.4 一元二次方程的应用题……98
11.5 一元二次方程的根与系数的关系……101
二、可化为一元二次方程的方程……113
11.6 简单的高次方程……113
11.7 分式方程……116
11.8 无理方程……121
三、简单的二元二次方程组……128
11.9 二元二次方程和二元二次方程组……128
11.10 由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组……129
11.11 由两个二元二次方程组成的方程组……130
11.12 小结……138
第十二章 指数……143
12.1 正整数指数幂的意义……143
12.2 零指数和负整数指数……145
12.3 分数指数……158
12.4 小结……178
练习题答案
第九章……182
第十章……195
第十一章……215
第十二章……242

第九章　数 的 开 方

9.1　平方根

在代数第一册和第二册里，你们已经学会了有理数的加法和减法、乘法和除法这两对互逆的运算以及乘方的运算。这一章要讲乘方的逆运算——开方的运算；乘方运算的结果——幂；开方运算的结果——方根。开平方是开方中最简单的一种，平方根是方根中最简单的一种。

在生产实践中常常会遇到开方的运算。

例如一块正方形钢板，边长是3分米，求它的面积就要用乘方运算，即$3 \times 3 = 3^2 = 9$（平方分米）。反过来，截一块面积是9平方分米的正方形钢板，要求这正方形的边长，设这个正方形边长为x分米，这就是求一个数x，使得$x^2 = 9$。我们知道$3^2 = 9$，$(-3)^2 = 9$，所以$x = \pm 3$。这± 3叫做9的**平方根**或**二次方根**。因为正方形的边长不能为负数，所以所求的边长是$+3$分米。

一般地说，如果一个数的平方等于a，这个数就叫做**a的平方根**，也叫做**a的二次方根**。即：如果$x^2 = a$，那么，x就叫做a的平方根。

例如　$\because$　$2^2 = 4$，$(-2)^2 = 4$，

$\therefore$　2和-2是4的平方根，

$\therefore$　4的平方根有两个。

又如　$\because$　$11^2 = 121$，$(-11)^2 = 121$，

$\therefore$　121的平方根有两个：11和-11。

又如 $\because \left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}, \left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25},$

$$\therefore \frac{9}{25}\text{的平方根有两个：}\frac{3}{5}\text{和}-\frac{3}{5}.$$

由此可知，**正数a的平方根有两个，它们互为相反数。** 因为，$0^2=0$，所以，**零的平方根是零。**

任何正数、负数平方后都是正数，零的平方是零，也就是说，任何数的平方都不是负数，因此，**负数没有平方根。** 例如，-9，-36，-49都没有平方根。

（翻开练习本做练习一）

通过前面的学习和练习，平方根的意义清楚了。求一个数的平方根（二次方根）的运算叫做**开平方**。

根据平方根的意义，可以知道开平方和平方互为逆运算。根据这种互逆的运算关系，我们常常可以用平方的关系来解决开平方的问题，或者用平方来检验开平方的结果是否正确。

例如：已知$15^2=225$，$(-15)^2=225$，求225的平方根。

解： 根据平方根的意义，由平方关系$15^2=225$，$(-15)^2=225$，可知225的平方根是15和-15。

又如，检验4和-4是不是16的平方根？

解： $\because 4^2=16, (-4)^2=16,$

$\therefore$ 4和-4都是16的平方根。

为了方便，任何一种运算都要用运算符号来表示。一个正数a的正的平方根，用“$+\sqrt[2]{a}$”表示（“+”号可省略）；一个正数a的负的平方根，用“$-\sqrt[2]{a}$”表示（“$-$”号不能省略）。这两个平方根合起来可以记做$\pm\sqrt[2]{a}$。这里符号

“$\sqrt[2]{\ }$”读做“二次根号”，a叫做被开方数，2叫做根指数。根指数2通常省略不写。如$\pm\sqrt[2]{a}$写做$\pm\sqrt{a}$，读作“正、负根号a”。例如9的平方根，可写成$\sqrt{9}$和$-\sqrt{9}$，不必写成$\sqrt[2]{9}$和$-\sqrt[2]{9}$。

注意：因为负数没有平方根，所以$\sqrt{a}$中的被开方数a一定要大于或等于零，即$a\geqslant 0$。

例1 求下列各数的平方根：

(1)81； (2)$\frac{49}{121}$； (3)$3\frac{22}{49}$； (4)0.0064。

解：(1)$\because(\pm 9)^2=81$，

$\therefore$81的平方根是± 9，

即$\pm\sqrt{81}=\pm 9$；

(2)$\because\left(\pm\frac{7}{11}\right)^2=\frac{49}{121}$，

$\therefore\frac{49}{121}$的平方根是$\pm\frac{7}{11}$，

即$\pm\sqrt{\frac{49}{121}}=\pm\frac{7}{11}$；

(3)$\because 3\frac{22}{49}=\frac{169}{49}$，$\left(\pm\frac{13}{7}\right)^2=\frac{169}{49}$，

$\therefore\frac{169}{49}$的平方根是$\pm\frac{13}{7}$，

即$\pm\sqrt{3\frac{22}{49}}=\pm\frac{13}{7}$；

(4)$\because(\pm 0.08)^2=0.0064$，

$\therefore$0.0064的平方根是± 0.08，

即$\pm\sqrt{0.0064}=\pm 0.08$。

从这些例题再一次看到一个正数的平方根一定有两个，

而且它们是互为相反数。

（翻开练习本做练习二）

我们已经知道正数的两个平方根互为相反数，并且用$\sqrt{a}$表示正数a的一个正的平方根，用$-\sqrt{a}$表示正数a的一个负的平方根。很明显，如果求得正的平方根$\sqrt{a}$，则立刻可以求得负的平方根。例如求得$\sqrt{81}=9$，立刻可以求得$-\sqrt{81}=-9$。也就是说，通过求正数的正的平方根，就可以求出负的平方根。所以我们只需特别研究正数的正的平方根即可。为此做出规定：

正数a的正的平方根，**叫做a的算术平方根**（**简称算术根**），记作$\sqrt{a}$。例如49的算术平方根是$\sqrt{49}=7$，$\frac{25}{64}$的算术平方根是$\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}$等。又因为规定**零的算术根仍旧是零**，即$\sqrt{0}=0$，所以也可以这样给算术平方根下定义：非负数$a$的非负平方根叫做**$a$的算术平方根**。

这样规定以后，只要求出一个数的算术平方根，就可直接写出它的两个平方根来。例如$\sqrt{9}=3$，那么9的平方根就是$\pm\sqrt{9}=\pm 3$。$+3$是正数，它是9的算术平方根；而-3是负数，它虽是9的平方根，但不是9的算术平方根。

从算术根的意义可知道，算术根必须满足以下两个条件：

（1）被开方数必须是正数或零，即$\sqrt{a}$中$a\geqslant 0$；

（2）平方根的值也必须取正数或零，即$\sqrt{a}\geqslant 0$。

再一次提醒**注意**： 1.因为负数没有平方根，所以$\sqrt{a}$中的被开方数a一定要大于或等于零，即$a\geqslant 0$。 2.一个数的平方根一定有一个是负数。

不要把“负数没有平方根”错误的理解为“一个数的平

方根不能是负数"。

例2　求下列各数的算术平方根：

(1) 36；　(2) $\frac{64}{81}$；(3) $2\frac{7}{9}$；(4) 0.0004。

解：(1) $\because 6^2=36$，

$\therefore$ 36的算术平方根是6，

即　$\sqrt{36}=6$；

(2) $\because \left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{81}$，

$\therefore \frac{64}{81}$的算术平方根是$\frac{8}{9}$。

即　$\sqrt{\frac{64}{81}}=\frac{8}{9}$；

(3) $\because 2\frac{7}{9}=\frac{25}{9}$，$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，

$\therefore$　$\frac{25}{9}$的算术平方根是$\frac{5}{3}$，

即　$\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$；

(4) $\because (0.02)^2=0.0004$，

$\therefore$　0.0004的算术平方根是0.02，

即　$\sqrt{0.0004}=0.02$。

注意：若被开方数是四位小数，它的算术平方根定是两位小数。

（翻开练习本做练习三）

例3　求下列各式的值：

(1) $\sqrt{10000}$；(2) $-\sqrt{0.01}$；(3) $\pm\sqrt{169}$；

(4) $-\sqrt{\dfrac{9}{25}}$；　(5) $\sqrt{\dfrac{121}{144}}$；　(6) $\pm\sqrt{\dfrac{64}{81}}$。

解：(1) $\because 100^2=10000$，　$\therefore \sqrt{10000}=100$；

(2) $\because 0.1^2=0.01$，　$\therefore -\sqrt{0.01}=-0.1$；

(3) $\because 13^2=169$，　$\therefore \pm\sqrt{169}=\pm 13$；

(4) $\because \left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$，　$\therefore -\sqrt{\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{3}{5}$；

(5) $\because \left(\dfrac{11}{12}\right)^2=\dfrac{121}{144}$，　$\therefore \sqrt{\dfrac{121}{144}}=\dfrac{11}{12}$；

(6) $\because \left(\dfrac{8}{9}\right)^2=\dfrac{64}{81}$，　$\therefore \pm\sqrt{\dfrac{64}{81}}=\pm\dfrac{8}{9}$。

例 4　下列各式中的被开方数是正数还是负数？

(1) $\sqrt{(-3)^2}$；　(2) $\sqrt{(-1.1)^2}$；

(3) $\sqrt{(-5)^2}$；　(4) $\sqrt{(-3)(-12)}$。

解：(1) $\because (-3)^2=9$，$\therefore \sqrt{(-3)^2}$中被开方数是正数；

(2) $\because (-1.1)^2=1.21$，$\therefore \sqrt{(-1.1)^2}$中被开方数是正数；

(3) $\because (-5)^2=25$，$\therefore \sqrt{(-5)^2}$中被开方数是正数；

(4) $\because (-3)(-12)=36$，$\therefore \sqrt{(-3)(-12)}$中被开方数是正数。

例 5　(1) $\sqrt{9^2}$是不是等于 9？　(2) $\sqrt{(-9)^2}$是不是等于-9？

解：(1) $\because \sqrt{9^2}=\sqrt{81}$，$\sqrt{81}$表示81的算术平方根，$\therefore \sqrt{9^2}=9$。

(2) $\because\sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}$，$\sqrt{81}$表示81的算术平方根，是正数，而$-9$是负数，不是算术平方根；$\therefore\sqrt{(-9)^2}\neq-9$。

一般来说，

1. 当a是正数，即$a>0$时，$\sqrt{a^2}=a$。

   如例5中的(1)题，$a=9$，$\because 9$是正数，

   $\therefore\sqrt{9^2}=9$。

2. 当a是负数，即$a<0$时，$\sqrt{a^2}\neq a$，$\sqrt{a^2}=-a$。

   如例5中的(2)题，$a=-9$，-9是负数，

   $\therefore\ \sqrt{(-9)^2}\neq-9$，$\sqrt{(-9)^2}=-(-9)$
   $=9$。

   即：当$a<0$时，$\sqrt{a^2}=-a$。

3. 当$a=0$时，$\sqrt{a^2}=a$。

   综合以上三种情况，得到下面结果：

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & (\text{当}a\geqslant0\text{时}),\\ -a & (\text{当}a<0\text{时}).\end{cases}$$

注意：当$a<0$时，$-a>0$。

（翻开练习本做练习四）

练习四第4题的(4)、(5)、(6)、(7)小题，你答对了吗？

我们前面讲过，如果a是非负数(a是正数或零)，a^2的算术平方根等于a；如果a是负数($a<0$)，a^2的算术平方根不等于a，而等于$-a$($a<0$时，$-a>0$)。

就是：
$$\boxed{\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & (\text{当}a\geqslant0\text{时})\\ -a & (\text{当}a<0\text{时})\end{cases}}\quad\text{公式 I}$$

因为3是9的算术平方根，即 $3=\sqrt{9}$。

而$3^2=9$，所以$(\sqrt{9})^2=9$。

同理可知：$5=\sqrt{25}$，　$5^2=25$　$\therefore (\sqrt{25})^2=25$

$0=\sqrt{0}$，　$0^2=0$　$\therefore (\sqrt{0})^2=0$

一般地说：**如果a是非负数(a是正数或零)，那么a的算术平方根的平方等于a。**

即：　$\boxed{(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)}$　公式Ⅱ

注意：当$a<0$时，$\sqrt{a}$没有意义。

例6　计算下列各式：

$(\sqrt{9})^2$，$(\sqrt{25})^2$，$(\sqrt{0.36})^2$，$\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2$，

$(\sqrt{7})^2$，$(\sqrt{0.1})^2$，$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$。

解：$(\sqrt{9})^2=9$；$(\sqrt{25})^2=25$；$(\sqrt{0.36})^2=0.36$；

$\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2=\frac{1}{4}$；$(\sqrt{7})^2=7$；$(\sqrt{0.1})^2=0.1$；

$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$。

例7　当$a=9$时　$\sqrt{a^2}=\sqrt{9^2}=9$　①

当$a=9$时　$(\sqrt{a})^2=(\sqrt{9})^2=9$　②

当$a=0$时　$\sqrt{a^2}=\sqrt{0^2}=0$　③

当$a=0$时　$(\sqrt{a})^2=(\sqrt{0})^2=0$　④

当$a=-9$时　$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-9)^2}=-(-9)=9$　⑤

当$a=-9$时　$(\sqrt{a})^2=(\sqrt{-9})^2$　⑥

注意：负数没有平方根，所以⑥中的$\sqrt{-9}$没有意义。

比较①、②、③和④式可以看出，当a是非负数时，

$$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2;$$

比较⑤和⑥式可以看出，当a是负数时，

$\sqrt{a^2}$有意义，而$(\sqrt{a})^2$没有意义。

对公式Ⅰ和Ⅱ，一定要弄懂，以免将来出错。

例8 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{4})^2$；(2) $\sqrt{4^2}$；(3) $(\sqrt{16})^2$；

(4) $\sqrt{16^2}$；(5) $\sqrt{(-3)^2}$；(6) $\sqrt{0^2}$。

解：(1) $(\sqrt{4})^2=4$；(2) $\sqrt{4^2}=4$；

(3) $(\sqrt{16})^2=16$；(4) $\sqrt{16^2}=16$；

(5) $\sqrt{(-3)^2}=-(-3)=3$；

(6) $\sqrt{0^2}=0$。

例9 说明下列各式，哪个有意义？哪个无意义？

(1) $(\sqrt{-9}^2)$；

(2) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{9}}\right)^2$。

解：(1) ∵负数没有平方根，-9是负数，

∴ $\sqrt{-9}$无意义，

因此，$(\sqrt{-9})^2$也无意义。

(2) 非负数开平方有意义，$\dfrac{1}{9}$是非负数，

∴$\sqrt{\dfrac{1}{9}}$有意义，因此，$\left(\sqrt{\dfrac{1}{9}}\right)^2$有意义。

（翻开练习本做练习五）

例10 就下列情况求$\sqrt{(a-3)^2}$的值：